EJERCICIO 1

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g(x)=e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0.

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución

a) **Teorema de Bolzano.**

Si f es una función continua en un intervalo $[a,\, b]$ y $\text{signo}\, f(a)\neq \text{signo}\, f(b)$, entonces existe un número real c perteneciente al intervalo $(a,\, b)$ tal que $f(c)=0$.

b) Sea $h(x)=f(x)-g(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x$. La función h es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas. Además:

$$h(-1)=-3-10-10+3-e^{-1}=-20-e^{-1}=-\left(20+e^{-1}\right)<0$$

$$h(0)=3-e^0=3-1=2>0$$

Por el Teorema de Bolzano existe un punto $c\in(-1,\, 0)$ tal que $h(c)=0$, es decir, tal que $f(c)-g(c)=0$, o sea $f(c)=g(c)$, con lo que hemos demostrado que las funciones f y g se cortan en el punto de abscisa $x=c$, entre -1 y 0.

c) Hagamos la primera derivada, igualémosla a cero y extraigamos la soluciones de la ecuación correspondiente.

$$f'(x)=15x^4-40x^3+30x^2,\ f'(x)=0\Leftrightarrow 15x^4-40x^3+30x^2=0\Leftrightarrow 5x^2\left(3x^2-8x+6\right)=0.$$

Esta ecuación solamente tiene la solución $x=0$, pues la ecuación $3x^2-8x+6=0$ no tiene soluciones reales (su discriminante es menor que cero: $\Delta=64-4\cdot3\cdot6=64-72=-8$).

Hagamos ahora la segunda derivada y procedamos como antes:

$$f''(x)=60x^3-120x^2+60x,$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 60x^3-120x^2+60x=0\Leftrightarrow 60x\left(x^2-2x+1\right)=0\Leftrightarrow 60x(x-1)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}.$$

Si estos puntos tienen tercera derivada distinta de cero serán puntos de inflexión:

$$f'''(x)=180x^2-240x+60,\ f'''(0)=60\neq0,\ f'''(1)=180-240+60=0.$$

De lo anterior se deduce que $x=0$ es un punto de inflexión. Para ver que no hay ninguno más (o sea, que $x=1$ no lo es), hagamos la cuarta derivada.

$$f^{iv)}(x)=360x-240,\ f^{iv)}(1)=120>0.$$

Por tanto, lo que se puede afirmar del punto $x=1$ es que la función es creciente y convexa en el mismo pues $f'(1)=5>0$ y $f^{iv)}(1)=120>0$.

EJERCICIO 2

Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$.

Solución

Calculemos los puntos donde la función f corta al eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ x = a \end{cases}.$$

Entonces el área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas es:

$$\int_{-a}^{a} \left(-x^2 + a^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x\right]_{-a}^{a} = \left(-\frac{a^3}{3} + a^3\right) - \left(\frac{a^3}{3} - a^3\right) = 2a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$, es justamente la derivada de f en el punto de abscisa $x = -a$, o sea, $f'(-a)$. Como $f'(x) = -2x$, entonces $f'(-a) = 2a$.

Entonces:

$$\frac{4a^3}{3} = 2a \Leftrightarrow 4a^3 = 6a \Leftrightarrow 4a^3 - 6a = 0 \Leftrightarrow 2a\left(2a^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}.$$

Como el valor del parámetro que se pide ha de ser mayor que cero, la solución es $a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

EJERCICIO 3

a) Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $\left|M^2\right|$ y $|2M|$.

Solución

a) Las dos condiciones se pueden expresar mediante un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene:

$$2A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 1 & 5/2\end{pmatrix}.$$

De manera similar, restando ambas ecuaciones:

$$2B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & -3/2\\ -1 & -3/2\end{pmatrix}$$

b) Se sabe que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices respectivas. Por tanto:

$$\left|M^2\right|=\left|M\cdot M\right|=\left|M\right|\cdot\left|M\right|=7\cdot 7=49.$$

Otra propiedad de los determinantes dice que si una fila (o una columna) de un determinante tiene un factor común, éste puede sacarse fuera del determinante.

La matriz $2M$ es el resultado de multiplicar cada fila (o cada columna) de la matriz M por 2. Así pues, las dos filas de M (o las dos columnas tendrán al número 2 como factor común, con lo que:

$$\left|2M\right|=2^2\left|M\right|=4\cdot 7=28.$$

En general, si M es una matriz cuadrada de orden n y k es un número real cualquiera: $\left|kM\right|=k^n\left|M\right|$.

EJERCICIO 4

a) Estudia la posición relativa del plano $\pi\equiv x-y-z=a$ y la recta $r\equiv\begin{cases}2x+y+az=0\\ x-2y=0\end{cases}$, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a\in\mathbb{R}$.

Solución

a) Estudiemos el sistema conjunto formado por el plano y la recta:

$$\begin{cases}x-y-z=a\\ 2x+y+az=0\\ x-2y=0\end{cases}$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Su rango es al menos dos pues existe un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-(-2)=3\neq 0$.

El determinante de la matriz A es $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=(0-a+4)-(-1+0-2a)=a+5$. Entonces el determinante se anula para $a=-5$, con lo que: $\text{rango}\,A=3\Leftrightarrow a\neq -5$ y $\text{rango}\,A=2\Leftrightarrow a=-5$.

La matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & a\\ 2 & 1 & a & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

- Claramente, si $a\neq -5$, $\text{rango}\,A=\text{rango}\,B=3=n$ (número de incógnitas), con lo que el sistema es compatible determinado (solución única). Esto quiere decir que, en este caso, el plano π y la recta r se cortan en un punto.

Veamos qué ocurre si $a=5$.

La matriz ampliada queda de la forma $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -5\\ 2 & 1 & -5 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango es tres pues tiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix}-1 & -1 & -5\\ 1 & -5 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-50$.

- Por tanto, si $a=-5$, $\text{rango}\,A=2\neq\text{rango}\,B=3$, con lo que el sistema es incompatible (no existe solución). Entonces el plano π y la recta r son paralelos.

b) Hemos visto que si $a\neq -5$, el plano y la recta son secantes, con lo que la distancia entre ambos será nula:

- Si $a\neq -5\Rightarrow d(r,\,\pi)=0$.

Si $a=-5$ el plano y la recta son paralelos y entonces la distancia entre ambos coincidirá con la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano. En este caso la recta es $r\equiv\begin{cases}2x+y-5z=0\\ x-2y=0\end{cases}$. Es fácil extraer un punto suyo. Si $y=1$, $x=2$. Sustituyendo en la primera ecuación: $4+1-5z=0\Rightarrow 5z=5\Rightarrow z=1$. Así pues, un punto de la recta es $P(2,\,1,\,1)$. Además, el plano es, en este caso, $\pi\equiv x-y-z+5=0$.

La fórmula de la distancia entre una recta r y un plano $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ paralelos viene dada por $d(r,\,\pi)=\dfrac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, donde $P(a_1,\,a_2,\,a_3)$ es un punto de la recta. De este modo:

- Si $a=-5\Rightarrow d(r,\,\pi)=\dfrac{|1\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 1+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2-1-1+5|}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

EJERCICIO 1

a) Calcula los valores de los parámetros $a,\, b\in\mathbb{R}$ para que la función

$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{x+1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y=2x+3$.

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x=0$.

Solución

a) Si $y=mx+n$ es una asíntota oblicua, entonces $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

En nuestro caso:

$$2=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+bx}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2+x}=a\text{ . Por tanto } a=2.$$

$$3=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+bx-2x^2-2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-2)x}{x+1}=b-2\Rightarrow b-2=3\Rightarrow b=5.$$

b) Para los valores encontrados en el apartado anterior la función queda de la forma:

$$f(x)=\frac{2x^2+5x}{x+1}$$

La recta tangente en el punto de abscisas $x=0$ es:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

Derivemos y evaluemos en cero la derivada:

$$f'(x)=\frac{(4x+5)\cdot(x+1)-\left(2x^2+5x\right)\cdot 1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{5\cdot 1}{1^2}=5.$$

Por otro lado: $f(0)=\frac{2\cdot 0^2+5\cdot 0}{0+1}=0$.

Entonces la recta tangente en el punto de abscisas $x=0$ es:

$$y-0=5(x-0)\Rightarrow y=5x$$

EJERCICIO 2

Calcula las siguientes integrales:

$$\int\frac{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{1+\mathrm{sen}^2 x}\,dx \qquad\qquad \int\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$$

Solución:

- $\displaystyle\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx$. Es inmediata pues la derivada del denominador es justamente el numerador. Por tanto:
  $\displaystyle\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx=\ln\left|1+\text{sen}^2 x\right|+C$.

- $\displaystyle\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx$. Es de tipo racional. El grado del denominador es mayor que el del numerador. Factoricemos el denominador: $x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=x(x+2)(x-2)$. Entonces podemos descomponer la fracción algebraica del siguiente modo:

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

  Igualando denominadores y dando valores a x tenemos:

  ✓ Si $x=0$, entonces $-4=-4A\Rightarrow A=1$.

  ✓ Si $x=-2$, entonces $-2=8B\Rightarrow B=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$.

  ✓ Si $x=2$, entonces $2=8C\Rightarrow C=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

  Por tanto:

$$\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x-2|+C.$$

EJERCICIO 3

a) Sabiendo que

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=2$$

donde $a,\,b,\,c\in\mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix}a-1&b-1&c-1\\a^2-1&b^2-1&c^2-1\\5&5&5\end{vmatrix}\quad \text{y}\quad \begin{vmatrix}(a+1)^2&(b+1)^2&(c+1)^2\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

b) Razona que, puesto que $|A|=2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales).

Solución:

a) Calculemos el valor del primer determinante:

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} 5\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 = 10$$

Propiedades utilizadas:

(1) y (3): Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) y (4): Un determinante con dos filas o dos columnas proporcionales vale cero.

(5): Si en un determinante multiplicamos todos los términos de una fila o de una columna por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

(6): Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas o dos columnas el determinante conserva el mismo valor absoluto, pero cambia de signo. Como se han hecho dos intercambios (1ª y 3ª fila y luego 2ª y 3ª fila), el determinante cambia dos veces de signo y permanece igual.

Calculemos ahora el valor del segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & a^2+2b+1 & a^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

Propiedades utilizadas:

(1) y (3): Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) y (4): Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

b) Si $a=b$, la primera y la segunda columna serían iguales y el determinante valdría cero, lo cual contradice que $|A|=2$. Por tanto $a\neq b$.

Si $a=c$, la primera y la tercera columna serían iguales y el determinante valdría cero, lo cual contradice que $|A|=2$. Por tanto $a\neq c$.

Del mismo modo se puede razonar si se supusiera que $b\neq c$. En este caso la segunda y tercera columna serían iguales y se llegaría también a contradicción. Por tanto $b=c$.

EJERCICIO 4

a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$$

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a) Pasemos ambas rectas a paramétricas. Para ello hagamos $z=\lambda$:

- $r\equiv\begin{cases}x+y-z=1\\2x+y-2z=1\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x+y=1+\lambda\\2x+y=1+2\lambda\end{cases}$

  Restando ambas ecuaciones: $-x=-\lambda\Rightarrow x=\lambda$.

  Multiplicando la primera por -2 y sumando a la segunda: $-y=-1\Rightarrow y=1$.

  Por tanto: $r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=1\\z=\lambda\end{cases}$

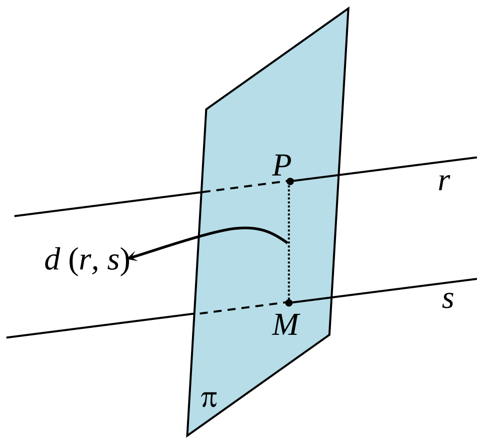
- $s\equiv\begin{cases}x-z=0\\x+2y-z=12\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\x+2y=12+\lambda\end{cases}$

  Sustituyendo en la segunda ecuación: $\lambda+2y=12+\lambda\Rightarrow y=6$.

  Por tanto: $s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=6\\z=\lambda\end{cases}$

Ambas rectas tienen el mismo vector director: $\vec{u}=(1,\,0,\,1)$. Luego ambas rectas han de ser paralelas o coincidentes. Un punto de r es $P(0,\,1,\,0)$ y un punto de s es $Q(0,\,6,\,0)$. Como el vector $\overrightarrow{PQ}=(0,\,5,\,0)$ no tiene la misma dirección que $\vec{u}$ las rectas no pueden ser coincidentes. Por tanto r y s son paralelas.

b) Al ser paralelas, la distancia entre r y s coincidirá con la distancia entre un punto de r, por ejemplo el punto $P(0,\,1,\,0)$, y la recta s: $d(r,s)=d(P,s)$.



Esta distancia será también igual a la distancia de P a M, donde M es el punto de intersección de s con el plano π que pasa por P y es perpendicular a s (ver figura).

El vector $\vec{u}=(1,\,0,\,1)$, dirección de r y s nos servirá como vector normal del plano (así el plano será perpendicular a s). Por tanto $\pi\equiv x+z+D=0$. Como π pasa por P, claramente $D=0$. Entonces $\pi\equiv x+z=0$. El corte de este plano y s es justamente $Q(0,\,6,\,0)$ (es muy fácil de comprobar). Luego $M=Q$. Por tanto:

$$d(r,s)=d(P,s)=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{0^2+5^2+0^2}=5.$$