1. a) Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, que verifican que $AX=XA$.

b) ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución

a) Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AX=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}\ ;\ XA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix}.$$

Para que $AX=XA$ ha de ocurrir que $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b & -b \\ c+2d & -d \end{pmatrix}$, es decir, $\begin{cases} 2a=2a+b \\ 2b=-b \\ a-c=2c+d \\ b-d=-d \end{cases}$.

De la segunda ecuación se obtiene que $b=0$. Si este valor se sustituye en la primera y en la cuarta obtenemos $2a=2a$ y $-d=-d$, es decir, dos igualdades que no aportan nada nuevo y que indican que a y d "van por libre". Además, de la tercera ecuación, $a-c=2c+d \Rightarrow a=3c+d$.

De este modo, todas las matrices X que conmutan con A son de la forma $X=\begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$.

b) Supongamos que X es simétrica (es decir, coincide con su traspuesta: $X=X^t$) y que conmuta con la matriz A. Entonces $X=\begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c+d & c \\ 0 & d \end{pmatrix}=X^t$. De aquí se obtiene que $c=0$. Por tanto, la matriz X será de la forma $X=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Como su determinante ha de ser igual a 4 se tiene que $d^2=4 \Rightarrow d=\pm 2$, con lo que las posibles soluciones son $X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. a) Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

Solución

a) Sean x, y y z los precios (en céntimos), respectivamente, de un lápiz, un cuaderno y una agenda. Como 5 euros son 500 céntimos de euro, podemos expresar el enunciado mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+y+z=500 \\ 2y+z=500 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 2 & 1 & 500 \end{pmatrix}$.

Puesto que, tanto la matriz A como la matriz B contienen un menor de orden dos distinto de cero, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$, tenemos que $rango(A) = rango(B) = 2 < 3 = n$, donde n indica el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) con grado de libertad igual a uno. Llamemos $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema lo podemos escribir del siguiente modo:

$$\begin{cases} 3x + y = 500 - \lambda \\ 2y = 500 - \lambda \end{cases}$$

De la segunda ecuación $y = \dfrac{500-\lambda}{2}$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación y despejando x:

$$3x + \frac{500-\lambda}{2} = 500 - \lambda \Rightarrow 6x + 500 - \lambda = 1000 - 2\lambda \Rightarrow 6x = 500 - \lambda \Rightarrow x = \frac{500-\lambda}{6}.$$

Para responder a la pregunta que se hace en el enunciado, consideremos $\lambda > 0$ (ninguno de los artículos es gratis). Además, como todos son múltiplos de 50, deberíamos de buscar un λ múltiplo de 50, de tal modo que x e y también lo sean. Probando con λ igual a 50, 100, 150, 200, 250, 300 y 350, llegamos a que, para $\lambda = z = 200$, $x = \dfrac{500-200}{6} = \dfrac{300}{6} \Rightarrow x = 50$, $y = \dfrac{500-200}{2} = \dfrac{300}{2} \Rightarrow y = 150$. En los demás casos no se obtienen múltiplos de 50 para las tres incógnitas.

Por tanto, un lápiz cuesta 50 céntimos (0,50 €), un cuaderno 150 céntimos (1,50 €) y una agenda 200 céntimos (2 €).

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = [\text{Indeterminación } 1^{+\infty}] = e^L$, donde $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}-1\right)\right]$.

Pero $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}-1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1$.

Entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^1 = e$.

También se puede hacer de otro modo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e\cdot 1 = e.$$

Aquí hemos utilizado el hecho conocido de que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

3. a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$

a.1) ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2) Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx$$

El cambio de variable $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Solución

a) Resolvamos la ecuación $f(x) = 0$ para hallar los puntos en los que la curva corta al eje OX.

$a-x^2=0 \Rightarrow x^2=a$. Si $a<0$ no existe solución real. Si $a=0$, entonces $x=0$, y la curva cortaría al eje OX solamente en un punto, el $(0,0)$, y la curva no delimitaría con dicho eje recinto cerrado alguno. Finalmente, si $a>0$, entonces la ecuación $x^2=a$ admite dos soluciones: $x=\sqrt{a}$ y $x=-\sqrt{a}$. De este modo, la curva corta al eje OX en dos puntos: $\left(-\sqrt{a},0\right)$ y $\left(\sqrt{a},0\right)$ y, en este caso, la curva delimita con el eje OX un recinto cerrado. Esto responde al subapartado a.1).

El área A del este recinto cerrado viene dada por la siguiente integral definida:

$$A=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=\left(a\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}^3}{3}\right)-\left(-a\sqrt{a}-\frac{\left(-\sqrt{a}\right)^3}{3}\right)=$$

$$=a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}+a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}=2a\sqrt{a}-\frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

Para que el área del recinto valga 36 ha de ser:

$$\frac{4a\sqrt{a}}{3}=36 \Rightarrow a\sqrt{a}=27 \Rightarrow a\sqrt{a}=3^3 \Rightarrow a^3=3^6 \Rightarrow a=3^2 \Rightarrow a=9.$$

Esto responde al subapartado a.2).

b) Si $y=\sqrt{f(x)}$, entonces $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Por tanto:

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx=\int\frac{4x}{2\sqrt{1+3x^2}}dx=4\int\frac{x}{2\sqrt{1+3x^2}}dx=\frac{4}{6}\int\frac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{1+3x^2}+C.$$

Usando el cambio de variable obtenemos el mismo resultado:

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{1+3x^2} \\ dt=\dfrac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}}dx \Rightarrow dt=\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx \end{array}\right]=\frac{2}{3}\int\frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int dt=\frac{2}{3}t+C=\frac{2}{3}\sqrt{1+3x^2}+C.$$

4. Sean las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=a \end{cases},\quad s\equiv\begin{cases} x=-1 \\ y=\mu \\ z=-5\mu \end{cases}$$

donde λ y μ son parámetros y $a\in\mathbb{R}$.

a) Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.
b) Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r

Solución

a) Eliminando el parámetro λ en la primera recta se tiene: $r\equiv\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\lambda \\ -y=\lambda \\ z=a \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} \dfrac{x}{2}=-y \\ z=a \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x+2y=0 \\ z=a \end{cases}$,

que es la ecuación general de la recta r.

Eliminando el parámetro μ en la segunda recta se tiene: $s\equiv\begin{cases}x=-1\\ y=\mu\\ -\dfrac{z}{5}=\mu\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=-1\\ y=-\dfrac{z}{5}\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=-1\\ 5y+z=0\end{cases}$,

que es la ecuación general de la recta s.

Uniendo ambas ecuaciones podemos formar el siguiente sistema: $\begin{cases}x+2y=0\\ z=a\\ x=-1\\ 5y+z=0\end{cases}$. Como $x=-1$, sustituyendo en la primera ecuación se tiene que $y=\dfrac{1}{2}$. Y sustituyendo este último valor en la tercera ecuación se tiene que $z=-\dfrac{5}{2}$.

Por tanto, si $a=-\dfrac{5}{2}$, el sistema tiene una única solución, que es $(x,y,z)=\left(-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$, con lo que las dos rectas se cortan en el punto anterior. Sin embargo, si $a\neq-\dfrac{5}{2}$, las rectas no tienen ningún punto en común, con lo que son paralelas o se cruzan. Pero un vector director de r es $\vec{u}=(2,-1,0)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(0,1,-5)$, que son claramente no proporcionales. Por tanto, las rectas no pueden ser paralelas y concluimos que si $a=\dfrac{5}{2}$ las dos rectas se cruzan.

b) El plano π que se pide viene determinado por un punto cualquiera de s, por ejemplo, el punto $P(-1,0,0)$, y por dos vectores directores. Uno de ellos es un vector director de s (ya que el plano debe contener a s). Nos valdría pues el vector $\vec{u}=(0,1,-5)$. El otro vector director será un vector director de r (ya que el plano ha de ser paralelo a r), por ejemplo, $\vec{v}=(2,-1,0)$. De este modo, puesto que la ecuación del plano que pasa por un punto $P(a,b,c)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, es de la forma $\begin{vmatrix}x-a & y-b & z-c\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=0$, tenemos que el plano π que se pide en el enunciado es el siguiente:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x+1 & y & z\\ 0 & 1 & -5\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv-10y-(2z+5x+5)=0\Rightarrow\pi\equiv-5x-10y-2z-5=0.$$

5. a) Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1\equiv x=y+1$ y $\pi_2\equiv y+2z=5$.

b) Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace referencia dicho teorema para la función $f(x)=3/x^2$ en el intervalo $[1,3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

Solución:

a) El enunciado nos dice que el sistema $\begin{cases} x = y+1 \\ y+2z=5 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones y su grado de libertad es igual a uno, puesto que los dos planos se cortan en una recta.

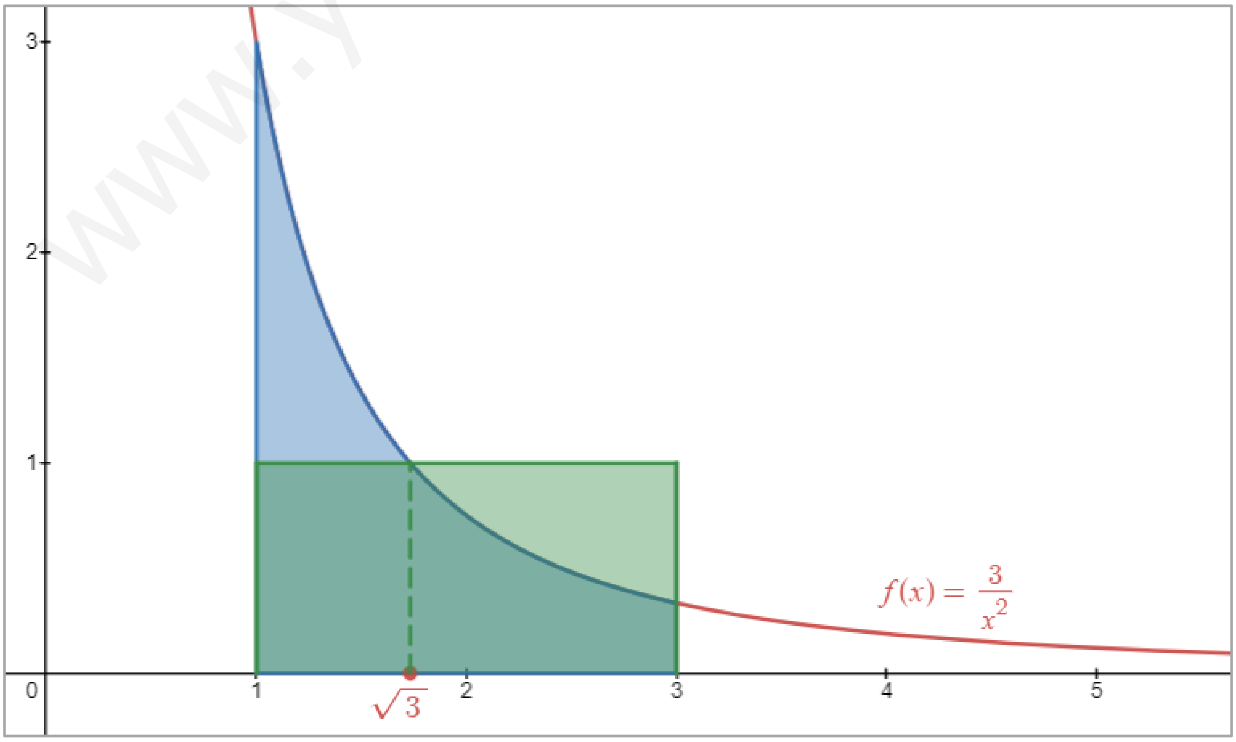
Llamemos $z=\lambda$. Entonces, sustituyendo en la segunda ecuación, $y=5-2\lambda$. Y, a su vez, sustituyendo este valor en la primera ecuación, $x=5-2\lambda+1 \Rightarrow x=6-2\lambda$. De este modo las soluciones del sistema las podemos escribir así: $(x,y,z)=(6-2\lambda,5-2\lambda,\lambda)$. Estas soluciones son también las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los dos planos:

$$r \equiv \begin{cases} x=6-2\lambda \\ y=5-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

b) **Teorema del valor medio del cálculo integral**. Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$.

En el caso de la función $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$, puesto que es claramente continua en el intervalo $[1,3]$ y, además, $\int_1^3 \dfrac{3}{x^2}dx=\left[-\dfrac{3}{x}\right]_1^3=-\dfrac{3}{3}-\left(-\dfrac{3}{1}\right)=-1+3=2$, el teorema del valor medio del cálculo integral nos dice que existe $c\in(1,3)$ tal que $2=\dfrac{3}{c^2}\cdot(3-1)\Rightarrow 2c^2=6\Rightarrow c^2=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$.

Desde el punto de vista geométrico, quiere decir que el rectángulo de base $3-1=2$ y altura $f\left(\sqrt{3}\right)=1$, tiene la misma área, o sea, $2u^2$, que la encerrada por la curva $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$, el eje X y las rectas $x=1$ y $x=3$ (ver figura siguiente).



6. a) Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, siendo.

$$M=\begin{pmatrix}2 & m & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & m\\ 4 & 1 & m & 2\end{pmatrix}$$

b) Sean los planos $\pi_1\equiv 2x+my=1$, $\pi_2\equiv 2x+y=m$ y $\pi_3\equiv 4x+y+mz=2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución

a) El rango de la matriz M es al menos dos porque contiene un menor de orden dos que no es igual a cero: $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2-4=-2\neq 0$. Los menores de orden tres que contienen al menor de orden dos anterior son los siguientes:

- $\begin{vmatrix}2 & m & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & m\end{vmatrix}=2m-2m^2=2m(1-m)$.
- $\begin{vmatrix}2 & m & 1\\ 2 & 1 & m\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=\left(4+4m^2+2\right)-\left(4+4m+2m\right)=4m^2-6m+2=4(m-1)\left(m-\dfrac{1}{2}\right)$..

Claramente, ambos son simultáneamente iguales a cero si $m=1$. Por tanto, podemos concluir lo siguiente:

- Si $m=1$ el rango de la matriz M es igual a dos porque todos sus menores de orden tres son iguales a cero.
- Si $m\neq 1$ el rango de la matriz M es igual a tres porque contendrá algún menor de orden tres que no es igual a cero.

También se puede calcular el rango de la matriz M haciendo uso del método de Gauss.

$$\begin{pmatrix}2 & m & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & m\\ 4 & 1 & m & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ f_2-f_1\\ f_3-2f_1\end{matrix}\begin{pmatrix}2 & m & 0 & 1\\ 0 & 1-m & 0 & m-1\\ 0 & 1-2m & m & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ f_3\leftrightarrow f_2\end{matrix}\begin{pmatrix}2 & m & 0 & 1\\ 0 & 1-2m & m & 0\\ 0 & 1-m & 0 & m-1\end{pmatrix}$$

Está claro que si $m=1$ la última fila está formada por ceros, con lo que el rango de la matriz M será igual a dos. Si $m\neq 1$ ninguna de las filas se anula, con lo que el rango de la matriz M será igual a tres.

b) El sistema de ecuaciones lineales formado por los tres planos es $\begin{cases}2x+my=1\\ 2x+y=m\\ 4x+y+mz=2\end{cases}$, cuya matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}2 & m & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & m\end{pmatrix}$. Como $|A|=2m-2m^2=2m(1-m)=0\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\ m=1\end{cases}$, se tiene que:

- $r(A)=3\Leftrightarrow m\neq 0$ y $m\neq 1$.
- $r(A)=2\Leftrightarrow m=0$ o $m=1$.

La matriz ampliada es la matriz M del apartado anterior. Por tanto, podemos concluir lo siguiente:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, $r(A) = r(M) = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado (solución única), con lo que los tres planos se cortarán en un punto. No se pide en el enunciado, pero las coordenadas de dicho punto se pueden calcular haciendo uso de la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix}}{2m(1-m)} = \frac{m-m^3}{2m(1-m)} = \frac{m(1-m^2)}{2m(1-m)} = \frac{m(1+m)(1-m)}{2m(1-m)} = \frac{1+m}{2}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & m & 0 \\ 4 & 2 & m \end{vmatrix}}{2m(1-m)} = \frac{2m^2-2m}{2m(1-m)} = \frac{2m(m-1)}{2m(1-m)} = \frac{m-1}{1-m} = -1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2m(1-m)} = \frac{(4+4m^2+2)-(4+4m+2m)}{2m(1-m)} = \frac{4m^2-6m+2}{2m(1-m)} = \frac{2(m-1)(2m-1)}{2m(1-m)} = \frac{1-2m}{m}.$$

Por tanto, las coordenadas del punto común a los tres planos son $\left(\frac{1+m}{2}, -1, \frac{1-2m}{m}\right)$.

- Si $m = 0$, $r(A) = 2 \neq r(M) = 3$ y el sistema será incompatible, con lo que los tres planos no tienen ningún punto en común.
- Si $m = 1$, $r(A) = 2 = r(M) < 3$ y el sistema será compatible determinado (infinitas soluciones). En este caso, claramente los planos π_1 y π_2 son el mismo, con lo que los tres planos se cortarán en una recta, cuya ecuación general es $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+y+z=2 \end{cases}$.

7. a) Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %).

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

b.2) Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Solución:

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (i+j)-(k+j) = i-k \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (1,0,-1).$$

Entonces el plano π que se pide es de la forma $\pi \equiv x - z + D = 0$. Como este plano pasa por el punto $A = (0,0,1)$, sustituyendo se tiene que $-1 + D = 0 \Rightarrow D = 1$. Por tanto, el plano es $\pi \equiv x - z + 1 = 0$.

b) Llamemos B al suceso "Benceno juega un partido", y G al suceso "el EVAU club de fútbol gana el partido". Entonces, según el enunciado $P(B)=0,8$, $P(G/B)=0,9$ y $P(G/\overline{B})=0,6$

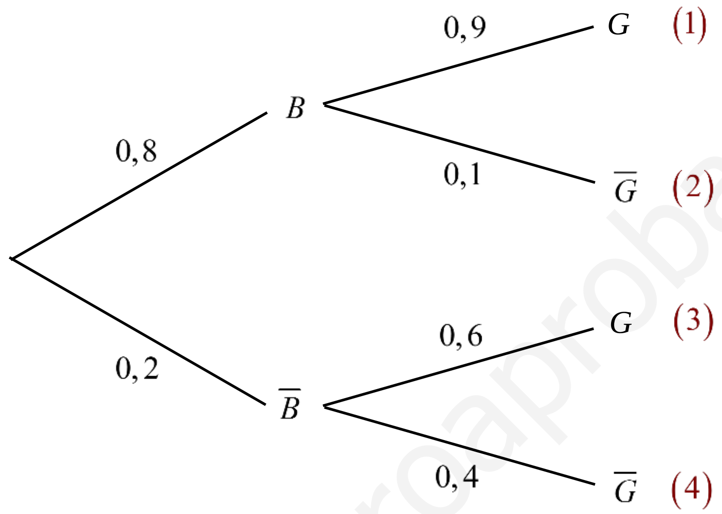
Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera es:

$$P(G)=P(B\cap G)+P(\overline{B}\cap G)=P(B)\cdot P(G/B)+P(\overline{B})\cdot P(G/\overline{B})=0,8\cdot 0,9+0,2\cdot 0,6=0,84.$$

Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, la probabilidad de que Benceno haya jugado es:

$$P(B/G)=\frac{P(B\cap G)}{P(G)}=\frac{P(B)\cdot P(G/B)}{P(G)}=\frac{0,8\cdot 0,9}{0,84}=\frac{0,72}{0,84}\cong 0,857.$$

Si se usa un diagrama se árbol asociado a este experimento, el primer apartado se puede hacer así:



Entonces, $P(G)=(1)+(3)=0,8\cdot 0,9+0,2\cdot 0,6=0,72+0,12=0,84$.

8. a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Solución:

a) Sea X la variable "presentar algún tipo de intolerancia alimentaria". Según el enunciado, la variable X se distribuye según una binomial $X\to B\left(4,\frac{1}{5}\right)$.

La probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1 - 0,8^4 = 1 - 0,4096 = 0,5904 .$$

Para hacer el segundo apartado tendremos ahora en cuenta que la variable Z "servir el pan sin gluten" se distribuye ahora según una binomial $B(8; 0,5904)$. Entonces, la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa es:

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0,5904^0 \cdot 0,4096^8 = 1 - 0,4096^8 \cong 0,9992 .$$

b) Sea X la variable peso de los paquetes de 1 kg de arroz. Entonces $X \to N(985, 25)$.

La probabilidad de que un paquete pese más de un kilo es:

$$P(X \geq 1000) = P\left(X \geq \frac{1000 - 985}{25}\right) = P(Z \geq 0,6) = 1 - P(Z \leq 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743 .$$

Para hacer el segundo apartado, llamemos k al peso más ligero del 70 % de los que más pesan. Entonces:

$$P(X \leq k) = 0,7 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k - 985}{25}\right) = 0,7 .$$

Mirando en la tabla tenemos que $\frac{k - 985}{25} = 0,525 \Rightarrow k - 985 = 13,125 \Rightarrow k = 998,125$. O sea, el paquete más ligero del 70 % de los que más pesan, pesa $998,125$ gramos.

Según la tabla $P(Z \leq 0,52) = 0,6985$ y $P(Z \leq 0,53) = 0,7019$. El primer valor está 15 diezmilésimas por debajo de $0,7$ y el segundo 19 diezmilésimas por encima. Por eso hemos considerado que una buena aproximación para $\frac{k - 985}{25}$ sería el promedio de $0,52$ y $0,53$. Es decir, $0,525$.