EJERCICIO 1

a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle.

b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación

$$x^5-5x+3=0$$

c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas.

Solución

a) **Teorema de Bolzano.**

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $\text{signo}\, f(a) \neq \text{signo}\, f(b)$, entonces existe al menos un número real c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f(c)=0$.

Teorema de Rolle.

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el abierto (a, b) y, además, $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un número real $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)=0$.

b) Sea la función $f(x)=x^5-5x+3$. Esta función, por ser polinómica, está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Además, se tiene que:

$$f(-2)=(-2)^5-5(-2)+3=-32+10+3=-19$$

$$f(-1)=(-1)^5-5\cdot(-1)+3=-1+5+3=7$$

$$f(1)=1^5-5\cdot 1+3=1-5+3=-1$$

$$f(2)=2^5-5\cdot 2+3=32-10+3=25$$

Por tanto, en los intervalos $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$, la función cambia de signo en los extremos de cada uno de ellos. Aplicando el Teorema de Bolzano, existen al menos $c_1 \in (-2, -1)$, $c_2 \in (-1, 1)$, $c_3 \in (1, 2)$ tales que $f(c_1)=0$, $f(c_2)=0$ y $f(c_3)=0$, es decir tales que $c_1^5-5c_1+3=0$, $c_2^5-5c_2+3=0$ y $c_3^5-5c_3+3=0$. Hemos demostrado pues, tal y como queríamos, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación $x^5-5x+3=0$.

c) Supongamos que existe $c_4 \in \mathbb{R}$ distinto de c_1, c_2 y c_3 tal que $f(c_4)=0=f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)$.

Supongamos, para fijar ideas, que $c_1<c_2<c_3<c_4$. Si los números c_1, c_2, c_3 y c_4 estuvieran ordenados de otra manera la demostración se haría exactamente lo mismo.

Entonces, por el Teorema de Rolle, existe al menos un número real $x_1 \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(x_1)=0$; al menos un número real $x_2 \in (c_2, c_3)$ tal que $f'(x_2)=0$; y al menos un número real $x_3 \in (c_3, c_4)$ tal que $f'(x_3)=0$
Pero esto es imposible pues $f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-5=0$, sólo admite dos raíces reales: 1 y -1.

Hemos demostrado pues, por reducción al absurdo, que la ecuación $x^5-5x+3=0$ no puede tener más de tres raíces reales ya que, en ese caso, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-5=0$ tendría más de dos raíces reales y eso es, tal y como se ha visto, una contradicción.

www.yoquieroaprobar.es

EJERCICIO 2

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx \qquad\qquad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Solución

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\int 3\operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$.
- $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$.

EJERCICIO 3

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que se usan en cada caso para justificar tu respuesta.

Solución

- $\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

  Propiedades utilizadas:

  (1) Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

  (2) Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

  (3) Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas o dos columnas el determinante conserva el mismo valor absoluto, pero cambia de signo.

  (4) Si en un determinante multiplicamos todos los términos de una fila o de una columna por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

- $\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d+g & e+h & f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$

$$\overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & d \\ g & h & i \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$$

www.yoquieroaprobar.es

Propiedades utilizadas:

(1) Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(2) Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

(3) Si dos determinantes tienen todos sus elementos iguales salvo, a lo sumo, los de una fila o columna, entonces se pueden sumar, dando como resultado otro determinante con la misma parte común y con el resultado de sumar las dos líneas respectivas.

(4) Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.

EJERCICIO 4

Dado el plano $\pi \equiv x+y+2z=7$ y el punto $P(1,\,0,\,0)$:

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P.

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto al plano π.

Solución

a) El punto Q será la intersección de la recta r perpendicular al plano π que pasa por P, con el propio plano π. Un vector perpendicular a π es $\vec{u}=(1,\,1,\,2)$. Por tanto, la recta perpendicular a π que pasa por P es, en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación del plano: $1+\lambda+\lambda+2\cdot 2\lambda=7 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1$.

De este modo el punto que se pide es $Q(2,\,1,\,2)$.

b) El punto P', simétrico de P respecto del plano π, debe pertenecer a la recta r y estar a la misma distancia de Q que P:

$$d(P,Q)=d(P',Q) \Leftrightarrow \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(1+\lambda-2)^2+(\lambda-1)^2+(2\lambda-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6}=\sqrt{6(\lambda-1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{(\lambda-1)^2} \Leftrightarrow 1=\lambda-1 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Así el punto P', simétrico de P respecto del plano π, es $P'(3,\,2,\,4)$.

También se puede, y quizá más fácilmente, sabiendo que el punto P' debe cumplir $\dfrac{P+P'}{2}=Q$. Llamando $P'(a,\,b,\,c)$, se tiene:

$$\frac{(1,\,0,\,0)+(a,\,b,\,c)}{2}=(2,\,1,\,2) \Leftrightarrow (1,\,0,\,0)+(a,\,b,\,c)=(4,\,2,\,4) \Leftrightarrow (a,\,b,\,c)=(3,\,2,\,4)$$

www.yoquieroaprobar.es

EJERCICIO 1

Dada la función

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{2x+6}$$

calcula los parámetros $a,\ b\in\mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2.
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=0$.

Solución

Como la pendiente de la asíntota oblicua es $m=2$. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{2x+6}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{2x^2+6x}=2\Leftrightarrow\frac{a}{2}=2\Leftrightarrow a=4.$$

De este modo, la función queda de la forma $f(x)=\frac{4x^2+b}{2x+6}$. Al ser $x=0$ un mínimo relativo se tiene que $f'(0)=0$. La derivada de f es: $f'(x)=\frac{8x(2x+6)-(4x^2+b)2}{(2x+6)^2}=\frac{16x^2+48x-8x^2-2b}{(2x+6)^2}=\frac{8x^2+48x-2b}{(2x+6)^2}$.

Entonces $f'(0)=0\Leftrightarrow\frac{8\cdot0+48\cdot0-2b}{(2\cdot0+6)^2}=0\Leftrightarrow\frac{-2b}{36}=0\Leftrightarrow-2b=0\Leftrightarrow b=0$.

Resumiendo: si $a=4$, $b=0$, la función $f(x)=\frac{4x^2}{2x+6}$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2 y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=0$.

EJERCICIO 2

Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y $g(x)=1$.

Solución

Calculemos los puntos donde se cortan ambas gráficas:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x+1=1\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x^2-3x+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x^2-3x+2=0\end{cases}.$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2-3x+2=0$ son $x=1$, $x=2$. Por tanto, los puntos en los que ambas funciones se cortan tienen abscisas $x=0$, $x=1$, $x=2$.

Estudiemos ahora el signo de $f(x)-g(x)$ para saber en qué momentos está una gráfica "por encima" o "por debajo" de la otra: $f(x)-g(x)=x^3-3x^2+2x+1-1=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$. Entonces:

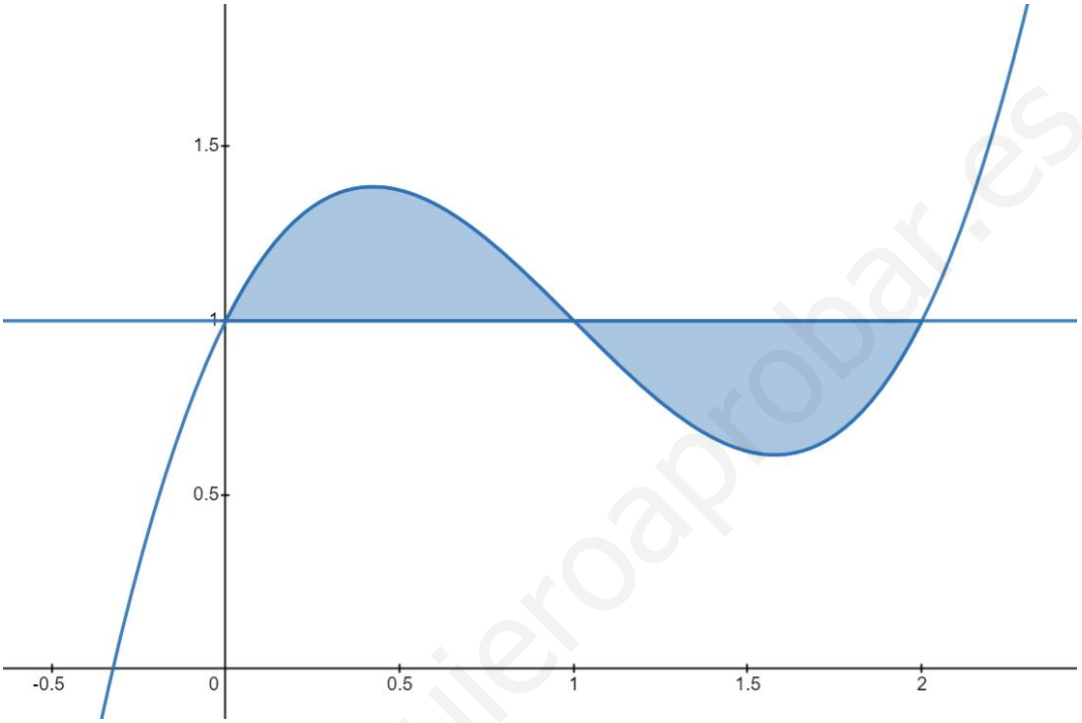
Intervalo	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(1,\ 2)$	$(2,\ +\infty)$
Signo de $f(x)-g(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

www.yoquieroaprobar.es

Los intervalos que nos interesan son $(0, 1)$ y $(1, 2)$ pues ambos extremos contienen a los puntos de corte de las funciones. Es decir:

- Si $x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$
- Si $x \in (1, 2) \Rightarrow f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$

Observa que es así en la siguiente figura, donde se representan tanto la función f como la función g:



De este modo, el área A encerrada entre las gráficas de ambas funciones, es la suma de otras dos A_1 y A_2, donde:

$$A_1 = \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x^3 - 3x^2 + 2x\big)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}.$$

$$A_2 = \int_1^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_1^2 \big(-x^3 + 3x^2 - 2x\big)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \big(-4 + 8 - 4\big) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, finalmente, $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ uds}^2$.

EJERCICIO 3

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax \quad - 3z = a \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$.

b) Resolverlo para el valor de $a = 1$.

Solución

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$.

www.yoquieroaprobar.es

Es fácil darse cuenta de que su rango es al menos dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Además $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = \left(0-6+2a^2\right) - \left(0-a-3a\right) = 2a^2+4a-6$.

Entonces $|A| = 0 \Leftrightarrow 2a^2+4a-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = 1 \end{cases}$.

De este modo concluimos que $\text{rango}\left(A\right) = \begin{cases} 2 \text{ si } a=-3 \text{ o } a=1 \\ 3 \text{ si } a \neq -3 \text{ y } a \neq 1 \end{cases}$.

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -3 & a \\ 2 & a & -1 & a \end{pmatrix}$, cuyo rango no puede ser mayor que 3. Además, ya hemos visto que si $a \neq -3$ y $a \neq 1$, $\text{rango}\left(A\right) = 3$, con lo que podemos concluir que:

- Si $a \neq -3$ y $a \neq 1$, $\text{rango}\left(A\right) = \text{rango}\left(B\right) = 3 =$ número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible determinado (solución única).

Estudiemos ahora lo que ocurre si $a=-3$ o $a=-1$.

- Si $a=-3$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, que tiene al menos un menor de orden tres distinto de cero:

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \left(9+18+0\right) - \left(0+0+3\right) = 21$.

  Así pues, en este caso, $\text{rango}\left(A\right) = 2 \neq \text{rango}\left(B\right) = 3$, y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a=1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2, pues la última fila es suma de las dos primeras (se puede demostrar también comprobando que todos los menores de orden tres son cero).

  Por tanto, en este caso $\text{rango}\left(A\right) = \text{rango}\left(B\right) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y su grado de libertad es $g = 3-2 = 1$.

b) Para $a=1$, podemos eliminar la última ecuación (ya que depende linealmente de la primera y la segunda tal y como se ha visto en el apartado anterior), con lo que el sistema quedará de la forma: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x \quad -3z=1 \end{cases}$.

Llamando $z=\lambda$, se tiene que $\begin{cases} x+y=-2\lambda \\ x=1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1-3\lambda-2\lambda \\ x=1+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1-5\lambda \\ x=1+3\lambda \end{cases}$.

www.yoquieroaprobar.es

Entonces, para $a=1$, las infinitas soluciones dependen del parámetro λ y son $\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-1-5\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Obsérvese que estas soluciones están sobre una recta. De hecho, son las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $P(1,\,-1,\,0)$ y tiene vector director $\vec{u}=(3,\,-5,\,1)$.

EJERCICIO 4

Dado el punto $P(1,\,0,\,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases} x=2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-1 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

b) Calcula la distancia de P a r.

Solución:

a) Calculemos el plano π que contiene a P y es perpendicular a r (véase la figura de la página siguiente).

Un vector director de r es $\vec{u}=(2,\,1,\,0)$. Este vector ha de ser perpendicular (normal) al plano π, con lo que su ecuación debe ser de la forma $\pi\equiv 2x+y+D=0$. Como este plano contiene a P tenemos, sustituyendo, que $2\cdot 1+0+D=0\Rightarrow D=-2$. Así, la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r es

$$\pi\equiv 2x+y-2=0$$

La intersección de este plano con la recta r será un punto: $\pi\cap r=M$. Hallémoslo:

M debe ser de la forma $M(2\lambda,\,3+\lambda,\,-1)$ ya que pertenece a r.

Además, como $M\in\pi$, se deduce que $2\cdot 2\lambda+3+\lambda-2=0\Rightarrow 5\lambda=-1\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{5}$.

Por tanto, el punto es $M\left(-\frac{2}{5},\,\frac{14}{5},\,-1\right)$.

Como $\pi\perp r$, la recta s que pasa por M y P (puntos contenidos en π) también será perpendicular a r. Un vector director de s es $\overrightarrow{MP}=\left(1-\left(-\frac{2}{5}\right),0-\frac{14}{5},0-(-1)\right)=\overrightarrow{MP}\left(\frac{7}{5},-\frac{14}{5},1\right)$.

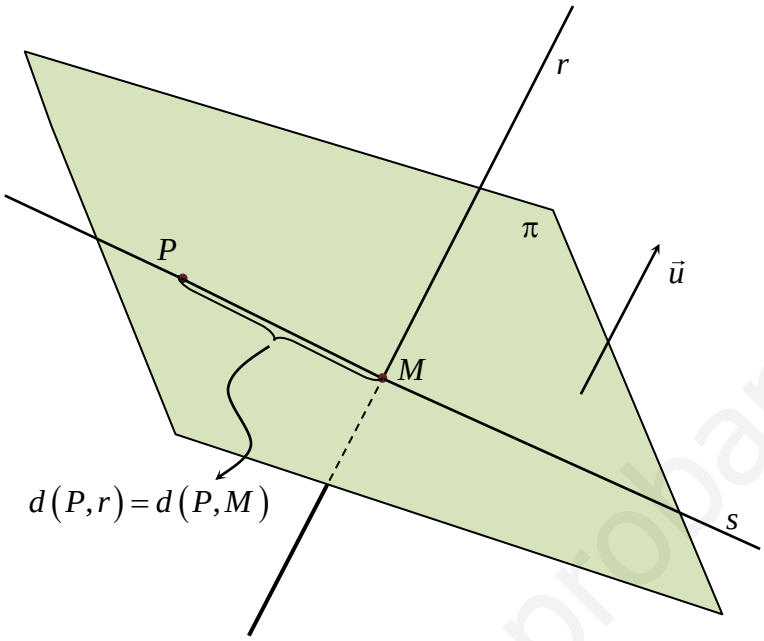
Podemos tomar también como vector director uno proporcional, por ejemplo, $\vec{v}=(7,\,-14,\,5)$.

Así, las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s\equiv\begin{cases} x=1+7\lambda \\ y=-14\lambda \\ z=5\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

b) Como r y s se cortan perpendicularmente en M, la distancia de P a r, $d(P,\,r)$ coincide con la distancia de P a M, $d(P,M)$. Es decir:

$$d\left(P,\,r\right)=d\left(P,\,M\right)=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(-\frac{14}{5}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{49}{25}+\frac{196}{25}+1}=\sqrt{\frac{270}{25}}=\sqrt{\frac{54}{5}}\cong 3,286\,\text{uds}$$



www.yoquieroaprobar.es