

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 7
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 8
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 8
- Reserva 4, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 8
- Julio, Ejercicio 7
- Julio, Ejercicio 8

Considera los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ se ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene el vector $\vec{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 7

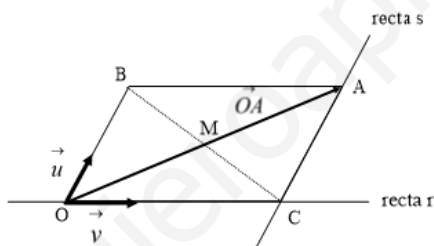
R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (2, 0, -1) \cdot (1, a, b) = 0 \Rightarrow 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (-1, 2, 3) \cdot (1, a, b) = 0 \Rightarrow -1 + 2a + 3b = 0 \Rightarrow 2a + 3b = 1 \Rightarrow 2a + 6 = 1 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

b)



Calculamos la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 \\ z = 0 - t \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases}$ y calculamos el punto de corte que

nos darán las coordenadas del vértice C

$$\begin{cases} 0 + 2t = -4 - \lambda \\ 0 = 4 + 2\lambda \\ 0 - t = 7 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2 ; t = -1, \text{ luego: } C(-2, 0, 1)$$

Calculamos el punto $M = \frac{O + A}{2} = \frac{(0, 0, 0) + (-4, 4, 7)}{2} = \left(-2, 2, \frac{7}{2}\right)$

Calculamos el vértice B

$$M = \frac{B + C}{2} \Rightarrow \left(-2, 2, \frac{7}{2}\right) = \frac{(a, b, c) + (-2, 0, 1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2 = \frac{a - 2}{2} \Rightarrow a = -2 \\ 2 = \frac{b + 0}{2} \Rightarrow b = 4 \\ \frac{7}{2} = \frac{c + 1}{2} \Rightarrow c = 6 \end{cases} . \text{ Luego: } B(-2, 4, 6)$$

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto

$P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten.

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + (1 + a)\lambda \\ y = 2 - a\lambda \\ z = 3 + 3a\lambda \end{cases}$$

Igualemos, las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2 + t &= 1 + (1 + a)\lambda \\ -t &= 2 - a\lambda \\ 1 + 2t &= 3 + 3a\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = a\lambda - 2 \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 + a\lambda - 2 &= 1 + (1 + a)\lambda \\ 1 + 2(a\lambda - 2) &= 3 + 3a\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a\lambda &= 1 + \lambda + a\lambda \\ 1 + 2a\lambda - 4 &= 3 + 3a\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ 1 - 2a - 4 = 3 - 3a \Rightarrow a = 6 \end{cases}$$

Luego, las rectas se cortan si $a = 6$

b) Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es cero, luego:

$$(1, -1, 2) \cdot (1 + a, -a, 3a) = 0 \Rightarrow 1 + a - a + 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$$

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

b) ¿Existe algún plano que contiene a r y es perpendicular a s ?

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 7.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos las rectas a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0, 0); \vec{u} = (0, 1, 0); \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow B(1, 0, 0); \vec{v} = (0, 0, 1)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ y como: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango de } (\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 3 \Rightarrow$ Las

rectas se cruzan y como, además, $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$ son perpendiculares

a) El plano viene definido por: $A(0, 0, 0); \vec{u} = (0, 1, 0); \vec{v} = (0, 0, 1)$

Luego, su ecuación es: $\begin{vmatrix} x-0 & 0 & 0 \\ y-0 & 1 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0$

b) El plano perpendicular a s tiene como vector normal el vector director de s , es decir, $\vec{n} = (0, 0, 1)$.
Luego todos los planos perpendiculares a s tendrán de ecuación: $0x + 0y + z + D = 0$ y como contiene a la recta r , tiene que pasar por el punto $A(0, 0, 0)$, luego: $0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$
Por lo tanto, el plano es $z = 0$

Considera los planos $\pi_1 \equiv x + y + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv x - z - 1 = 0$, así como la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .

b) Halla el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas $r \equiv \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. Cualquier punto de la recta tiene de

coordenadas: $A = (t, 1, 1 - 2t)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|1 \cdot t + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2t) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|1 \cdot t + 0 \cdot 1 - 1 \cdot (1 - 2t) - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} \Rightarrow |t + 3| = |3t - 2| \Rightarrow \begin{cases} t + 3 = 3t - 2 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \\ t + 3 = -3t + 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Luego, los puntos son: si $t = \frac{5}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)$; $t = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)$

b) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (1, 0, -1)$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos planos, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r .

b) Calcula la distancia entre r y π .

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por $A = (0, 1, 0)$ y los vectores $\vec{n} = (1, 1, 1)$ y $\vec{u} = (1, -1, 0)$.
Luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -z + y - 1 - z + x = 0 \Rightarrow x + y - 2z - 1 = 0$$

b) El vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$ y el vector director de la recta $\vec{u} = (1, -1, 0)$, son perpendiculares ya que:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (1, 1, 1) \cdot (1, -1, 0) = 1 - 1 + 0 = 0$$

Además el punto $A = (0, 1, 0)$ de la recta no pertenece al plano, luego, la recta y el plano son paralelos. Por lo tanto, la distancia viene dada por la distancia de un punto de la recta $A = (0, 1, 0)$ al plano.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0'5773 \text{ u}$$

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0$, y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{5}$

a) Halla los puntos de r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .

b) Halla el seno del ángulo que forma el plano π_1 con la recta r .

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$. Cualquier punto de la recta

tiene de coordenadas: $A = (1 + t, 2t, -1 + 5t)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|2 \cdot (1 + t) + 1 \cdot 2t + 1 \cdot (-1 + 5t) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|1 \cdot (1 + t) + 2 \cdot 2t - 1 \cdot (-1 + 5t) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \Rightarrow |9t - 2| = |7| \Rightarrow \begin{cases} 9t - 2 = 7 \Rightarrow t = 1 \\ 9t - 2 = -7 \Rightarrow t = -\frac{5}{9} \end{cases}$$

Luego, los puntos son: si $t = 1 \Rightarrow A = (2, 2, 4)$; $t = -\frac{5}{9} \Rightarrow A = \left(\frac{4}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{34}{9}\right)$

b) El vector normal del plano es: $\vec{n}_1 = (2, 1, 1)$ y el vector director de la recta es: $\vec{u} = (1, 2, 5)$.

Aplicando la fórmula del ángulo de recta y plano, tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}} = \frac{9}{\sqrt{180}} = 0'6708$$

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,2,3)$; $B(m,0,1)$; $C(2,1,2)$.

a) Halla los valores de m , sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{18}}{2}$ unidades cuadradas.

b) Para $m=0$, calcula el coseno del ángulo en el vértice A de dicho triángulo.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (m, -2, -2)$; $\vec{AC} = (2, -1, -1)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ módulo } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{ módulo } (0, m-4, 4-m) = \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + (m-4)^2 + (4-m)^2} = \frac{\sqrt{18}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-4)^2 + (4-m)^2 = 18 \Rightarrow 2m^2 + 32 - 16m = 18 \Rightarrow m^2 - 8m + 7 = 0 \Rightarrow m = 7 ; m = 1$$

b) Para $m=0 \Rightarrow \vec{AB} = (0, -2, -2)$; $\vec{AC} = (2, -1, -1)$

$$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{2+2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{48}} = 0'5773$$

Considera el punto $P(2,0,-4)$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 9\alpha + 3\beta \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 3 + 4\alpha + \beta \end{cases}$

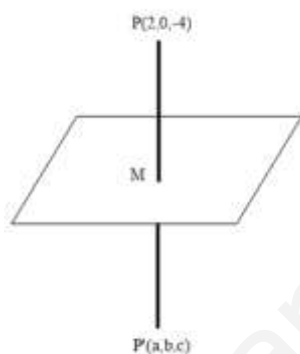
a) Calcula el punto simétrico del punto P respecto del plano π .

b) Calcula la distancia del punto P al plano π .

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos la ecuación general del plano: $\begin{vmatrix} x & 9 & 3 \\ y+1 & 2 & 0 \\ z-3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 6z + 21 = 0$

Con el vector normal del plano $\vec{n} = (2, 3, -6)$ y el punto P , calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -4 - 6t \end{cases}$$

Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$2 \cdot (2 + 2t) + 3 \cdot (3t) - 6 \cdot (-4 - 6t) + 21 = 0 \Rightarrow 49t = -49 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto M es: $M = (2 + 2 \cdot (-1), 3 \cdot (-1), -4 - 6 \cdot (-1)) = (0, -3, 2)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow (0, -3, 2) = \frac{(2, 0, -4) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{2+a}{2} \Rightarrow a = -2 \\ -3 = \frac{0+b}{2} \Rightarrow b = -6 \\ 2 = \frac{-4+c}{2} \Rightarrow c = 8 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P'(-2, -6, 8)$

b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PM} = (-2, -3, 6)$

$$d(P, \pi) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ u}$$

Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0$.

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 2 unidades de dicho plano.

b) Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Los planos paralelos a π tienen de ecuación $2x + y - 2z + D = 0$. Calculamos la distancia de un punto $A(1, 0, 0)$ del plano π al plano $2x + y - 2z + D = 0$

$$d(A, \pi') = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|2 + D|}{\sqrt{9}} = 2 \Rightarrow |2 + D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 2 + D = 6 \Rightarrow D = 4 \\ 2 + D = -6 \Rightarrow D = -8 \end{cases}$$

Luego, los planos son: $2x + y - 2z + 4 = 0$ y $2x + y - 2z - 8 = 0$

b) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

Corte con el eje OX $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0)$

Corte con el eje OY $\Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0)$

Corte con el eje OZ $\Rightarrow z = -1 \Rightarrow C(0, 0, -1)$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores,

$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$; $\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$; $\overrightarrow{OC} = (0, 0, -1)$, es decir:

$$V = \frac{1}{6} \text{ Valor absoluto de } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} u^3$$

Considera las rectas $r \equiv x = 1 - y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s .

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r .

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos las rectas a paramétricas.

$$r \equiv x = 1 - y = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \Rightarrow A(0, 1, 0); \vec{u} = (1, -1, 1) \\ z = t \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 5\lambda \Rightarrow B(0, 1, -1); \vec{v} = (1, 5, 2) \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{AB} = (0, 0, -1); \vec{u} = (1, -1, 1); \vec{v} = (1, 5, 2)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 3$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) El plano que nos piden viene definido por $B = (0, 1, -1); \vec{u} = (1, -1, 1); \vec{v} = (1, 5, 2)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y - 1 & -1 & 5 \\ z + 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7x - y + 6z + 7 = 0$$

Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

a) Calcula a para que r y s se corten. Determina el punto de corte.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y contiene a la recta s .

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv x+1 = y-a = -z \Rightarrow \begin{cases} x = -1+t \\ y = a+t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow A(-1, a, 0) ; \vec{u} = (1, 1, -1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases} \Rightarrow B(5, -3, 2) ; \vec{v} = (2, 0, -1)$$

Las rectas se cortan si el determinante de los vectores $\vec{AB} = (6, -3-a, 2)$; $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vale cero, luego:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3-a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 + 6 + 2a - 4 - 3 - a = 0 \Rightarrow a = 7$$

Calculamos el punto de corte igualando las ecuaciones de las rectas

$$\begin{cases} -1+t = 5+2\lambda \\ 7+t = -3 \\ -t = 2-\lambda \end{cases} \Rightarrow t = -10 ; \lambda = -8$$

Luego el punto de corte es: $(-11, -3, 10)$

b) El plano viene definido por el punto B y los vectores $\vec{BP} = (3, -4, 0)$ y $\vec{v}$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-5 & 3 & 2 \\ y+3 & -4 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 20 + 8z - 16 + 3y + 9 = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 8z - 27 = 0$$

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de r y π .

b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$ halla su simétrico respecto del plano π .

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 8

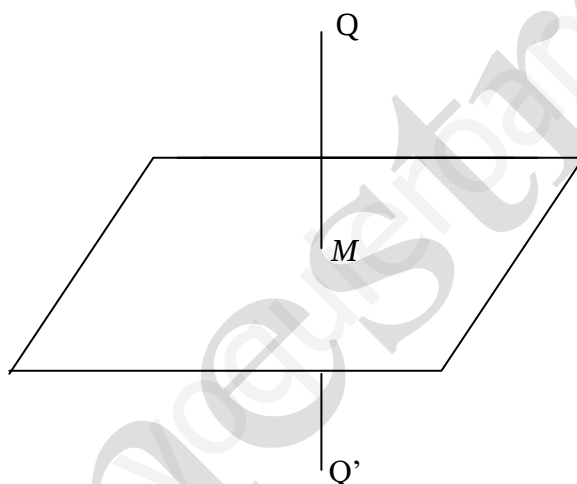
R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y la sustituimos en la ecuación del plano.

$$t + 3t - (1 + t) = 2 \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto de intersección es $(1, 3, 2)$

b)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto Q es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, 1, -1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(2 + t) + (6 + t) - (3 - t) = 2 \Rightarrow 3t = -3 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x = 1; y = 5; z = 4$

Como el punto M es el punto medio del segmento QQ' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto Q' , se debe verificar que:

$$\frac{a+2}{2} = 1 \Rightarrow a = 0 \quad ; \quad \frac{b+6}{2} = 5 \Rightarrow b = 4 \quad ; \quad \frac{c+3}{2} = 4 \Rightarrow c = 5$$

Luego, el punto simétrico es el $Q'(0, 4, 5)$