



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = \arctg(\sqrt{x-1})$ definida para $x \geq 1$, se pide:

- a) Calcula y simplifica $f'(x)$. (1,5 puntos)
- b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal. (1 punto)

2A. Calcula $a \in \mathbb{R}$, siendo $a > 0$, para que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6x^2$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ sea igual a $2000 u^2$. (2,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Estudia para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz $M - \lambda N$ es igual a 3. (1,25 puntos)
- b) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3X + Y = M \\ X + Y = N \end{cases}$, donde X e Y son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

4A. Dado el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x + ay - z = 4$, se pide:

- a) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano π sea paralelo al plano de ecuación $\pi' \equiv x + y + z = 2$. (1,25 puntos)
- b) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano π sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1,25 puntos)

Propuesta A

1A) $f(x) = \arctg(\sqrt{x-1})$, $x \geq 1$

a) $f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{1+x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

b) Para que la recta tangente sea horizontal, tiene que tener pendiente cero, luego $f'(x) = 0$, lo que implica que $0 = 1$ Falso.

Por tanto, no hay ningún punto en el que la recta tangente a $f(x)$ sea horizontal.

2A) Límites de integración (puntos de corte con OX)

$$f(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

El otro límite de integración es $x = a$

Primitiva

$$\int f(x) dx = \int 6x^2 dx = \frac{6x^3}{3} = 2x^3 + C = G(x)$$

Área

$$A = \int_0^a f(x) dx = G(a) - G(0) = 2a^3 = 2000 \text{ u}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{\frac{2000}{2}} = 10}$$

3A) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Rangos de $M - \lambda N$

$$M - \lambda N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 2\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|M - \lambda N| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)(3-\lambda) - 4\lambda(3-\lambda) + 8\lambda = 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(M - \lambda N) = 3$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M - \lambda N) = 2$
(no se pide)

Solución: para $\lambda \neq 1$, $\text{rango}(M - \lambda N) = 3$

b) $3X + Y = M$ $3X + Y = M$
 $X + Y = N \xrightarrow{\cdot(-1)} -X - Y = -N$
Sumamos $2X = M - N \Rightarrow X = \frac{1}{2}(M - N)$

Como $X + Y = N \Rightarrow Y = N - \frac{1}{2}(M - N)$

$$X = \frac{1}{2}[M - N] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = N - \frac{1}{2}(M - N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4A a) $\pi \equiv 2x + 2y - z = 4$

$\pi' \equiv x + y + z = 2$

$\pi \parallel \pi' \Rightarrow \vec{n}_{\pi} \parallel \vec{n}_{\pi'} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{-1}{1}$ Imposible \Rightarrow

$\Rightarrow \nexists a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \pi \parallel \pi'$

b) $\pi \parallel r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{\pi} \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2, 2, -1) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \Rightarrow -2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Reserva 2 de 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Determina los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla que pasa por el punto de coordenadas $(3, 10)$ y tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1, -2)$. (2,5 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = x + 1$) (2,5 puntos)

3B. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$, obtén el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

(0,75 puntos el apartado a), 0,75 puntos el apartado b) y 1 punto el apartado c))

4B. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -2\mu \\ z = 4 + \mu \end{cases} \mu \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Comprueba que las dos rectas se cortan en un punto calculando dicho punto de corte. (1,5 puntos)

b) Determina el ángulo de corte entre ambas rectas. (1 punto)

Propuesta B

1B $f(x) = ax^2 + bx + c$

- f pasa por $(3, 10) \Rightarrow f(3) = 10$
- f tiene un extremo relativo en $(1, -2) \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(3) = 10 \Rightarrow 9a + 3b + c = 10 \\ f(1) = -2 \Rightarrow a + b + c = -2 \\ f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-2F_1 + F_3]{-9F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{-6F_3 + F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]: $z = 1$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{28 + 8 \cdot 1}{-6} = -6$

Sustituimos en [1]: $x = -2 - (-6) - 1 = 3$

Solución: la función pedida es $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

2B $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx = \left[\begin{matrix} y = x+1 \\ dy = dx \end{matrix} \right] = \int \frac{y+1}{\sqrt{y}} dy = \int \frac{y}{\sqrt{y}} dy + \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy =$

$$= \int y^{1/2} dy + \int y^{-1/2} dy = \frac{y^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{y^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2\sqrt{y^3}}{3} + 2\sqrt{y} =$$

$$= \frac{2y\sqrt{y}}{3} + \frac{6\sqrt{y}}{3} = \frac{(2y+6)\sqrt{y}}{3} = \frac{[2(x+1)+6]\sqrt{x+1}}{3} = \frac{(2x+8)\sqrt{x+1}}{3} + C$$

De otra forma (con otro cambio de variable)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx = \left[t^2 = x+1 \right] = \int \frac{t^2+1}{t} 2t dt = 2 \int (t^2+1) dt =$$

$$= 2 \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} + \sqrt{x+1} \right) = 2 \left[\frac{(x+1)\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x+1}}{3} \right] =$$

$$t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^3 = \sqrt{(x+1)^3}$$

$$= \frac{(2x+8)\sqrt{x+1}}{3} + C$$

$$\boxed{3B} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$a) \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 15$$

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = - \left(- \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \right) = 5 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 10 = 50$$

$$c) \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} = 5 \cdot 10 = 50$$

$$\boxed{4B} \quad a) \{P\} = r \cap r'$$

$$\left. \begin{array}{l} 2-\lambda = 2+\mu \\ 2\lambda = -2\mu \\ 2+\lambda = 4+\mu \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \\ \hline 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \Rightarrow \mu = -1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda=1$ en las ecuaciones de r (o $\mu=-1$ en las ecuaciones de r'), obtenemos P :

$$P \begin{cases} x=2-1 \\ y=2-1 \\ z=2+1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,2,3)}$$

$$b) \boxed{\alpha = \angle \{r, r'\} = \arccos \left| \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'}}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_{r'}|} \right| = \arccos \frac{4}{6} = 48^\circ 11' 22,87''}$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'} = (-1, 2, 1) \cdot (1, -2, 1) = -1 - 4 + 1 = -4$$

$$|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'}| = |-4| = 4$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{u}_{r'}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$