Junio 2011

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblícuas de $f(x)$. (1,25 puntos)

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$. (1,25 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int (cos(2x) + sen\, x\ cos\, x)\ dx$. (1,25 puntos)

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+2}\, dx$. (1,25 puntos)

3A. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2X & + & 3Y & = & A \\ X & + & Y & = & B \end{array} \right.$. (1,25 puntos)

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B) (1,25 puntos)

4A. Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & at \\ y & = & 1 & - & t \\ z & = & & & 2t \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Determina el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos. (1,25 puntos)

b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1,1,0)$. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE) UNIVERSIDAD DE CASTILLA LA MANCHA JUNIO – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro preguntas que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones, el tribunal podrá anular su examen.

En el desarrollo de cada respuesta, detalle y explique los procedimientos empleados en la misma. Se califica todo.

PROPUESTA A

Ejercicio 1º) Dada la función $f(x)=\frac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de f(x).

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de f(x).

Solución

a)

Las asíntotas son las siguientes:

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$2x=0$;; $\underline{\underline{x=0}}$ (El eje de ordenadas es asíntota vertical)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\frac{4}{0^-}=\underline{-\infty \Rightarrow \downarrow}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\frac{4}{0^+}=\underline{+\infty \Rightarrow \uparrow}.$$

Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{2x^2}=\underline{2=m}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x}=\underline{\frac{3}{2}=n}.$$

$$\underline{\underline{Asíntota\ \ oblicua:\ y=2x+\frac{3}{2}}}$$

b)

Una función tiene un extremo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{(8x+3)\cdot 2x-\left(4x^2+3x+4\right)\cdot 2}{(2x)^2}=\frac{16x^2+6x-8x^2-6x-8}{4x^2}=\frac{8x^2-8}{4x^2}=\underline{\frac{8\left(x^2-1\right)}{4x^2}=f(x)}$$

.

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{8\left(x^2-1\right)}{4x^2}=0\ ;;\ 8\left(x^2-1\right)=0\ ;;\ x^2-1=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-1}\ ;;\ \underline{x_2=1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un máximo relativo y si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x)=\frac{16x\cdot 4x^2-8\left(x^2-1\right)\cdot 8x}{\left(4x^2\right)^2}=\frac{64x^3-64x^3+64x}{4x^4}=\frac{64x}{4x^4}=\underline{\frac{16}{x^3}=f''(x)}.$$

$f''(-1)=\frac{16}{(-1)^3}=\frac{16}{-1}=-16<0\ \Rightarrow$ <u>Máximo relativo para x = -1.</u>

$$f(-1)=\frac{4\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+4}{2\cdot(-1)}=\frac{4-3+4}{-2}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Máximo}:\ A\left(-1,\ -\frac{5}{2}\right)}}.$$

$f''(1)=\frac{16}{1^3}=\frac{16}{1}=16>0\ \Rightarrow$ <u>Mínimo relativo para x = 1.</u>

$$f(1)=\frac{4\cdot 1^2+3\cdot 1+4}{2\cdot 1}=\frac{4+3+4}{2}=\frac{11}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Mínimo}:\ B\left(1,\ \frac{11}{2}\right)}}.$$

****

Ejercicio 2º) Calcula las siguientes integrales:

a) $I=\int\left[\cos(2x)+sen\ x\cdot\cos\ x\right]\cdot dx$.   b) $I=\int\frac{x^3-1}{x+2}\cdot dx$

Solución

a)

$$I=\int\left[\cos(2x)+sen\ x\cdot\cos\ x\right]\cdot dx=\int\cos(2x)\cdot dx+\int sen\ x\cdot\cos\ x\cdot dx=\underline{I_1+I_2=I}\qquad(*)$$

$$I_1=\int\cos(2x)\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}2x=t\\ dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int\cos t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{2}sen\ t=\underline{\frac{1}{2}sen(2x)=I_1}.$$

$$I_2=\int sen\ x\cdot\cos\ x\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}sen\ x=t\\ \cos\ x\cdot dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int t\cdot dt=\frac{t^2}{2}+C=\underline{\frac{1}{2}sen^2\ x=I_2}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2:

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{2}sen(2x)+\frac{1}{2}sen^2\ x+C=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left[sen(2x)+sen^2\ x\right]+C=I}}$$

b)

$I=\int\frac{x^3-1}{x+2}\cdot dx\Rightarrow$ Efectuando la división:

$$\begin{array}{rrrr|l}
+x^3 & & & +1 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & & & x^2-2x+4 \\ \cline{1-4}
0 & -2x^2 & & +1 & \\
 & +2x^2 & +4x & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & +4x & +1 & \\
 & & -4x & -8 & \\ \cline{1-4}
 & & 0 & -7 &
\end{array}$$

$$I=\int\frac{x^3-1}{x+2}\cdot dx=\int\left(x^2-2x+4-\frac{7}{x+2}\right)\cdot dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+4x-7\int\frac{1}{x+2}\cdot dx=$$

$$=\underline{\frac{x^3}{3}-x^2+4x-7I_1=I}.\qquad(*)$$

$$I_1=\int\frac{1}{x+2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x+2=t\\ dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow I_1=\int\frac{1}{t}\cdot dt=L|t|+C=\underline{L|x+2|+C=I_1}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1: $\underline{\underline{I=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-7L|x+2|+C}}$.

****

Ejercicio 3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{cases} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n \in N$. (Indicación: calcula las primeras potencias de la matriz B).

Solución

a)

$$\left.\begin{cases} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2X+3Y=A \\ -2X-2Y=-2B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{Y=A-2B} \;;;\; X=B-Y=B-A+2B=\underline{-A+3B=X}$$

.

$$X=-A+3B=-\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}}=X.$$

$$Y=A-2B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}}}=Y.$$

b)

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\underline{I=B^2}.$$

$$B^3=B^2\cdot B=I\cdot B=\underline{B=B^3}.$$

$$B^4=B^3\cdot B=B\cdot B=\underline{I=B^4}.$$

....

$$\underline{\underline{B^n=I \;\; si \;\; n \;\; es \;\; par \;;;\; B^n=B \;\; si \;\; n \;\; es \;\; impar}}$$

****

Ejercicio 4º) Consideramos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1+at \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$, $t \in R$.

a) Determina el parámetro $a \in R$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.
b) Para el valor de α determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto P(1, 1, 0).

Solución

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es condición suficiente que el vector normal del plano sea perpendicular al vector director de la recta.

El vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 0,\ -1)$ y el vector director de r es $\overrightarrow{v} = (a,\ -1,\ 2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow (1,\ 0,\ -1) \cdot (a,\ -1,\ 2) = 0$;; $a - 0 - 2 = 0$;; $a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

<u>La recta r y el plano π son paralelos cuando α = 2.</u>

b)

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (2,\ -1,\ 2)$ y el haz de planos perpendiculares a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ tiene por expresión general $\alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano β que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 \ ;;\ 2 - 1 + D = 0 \ ;;\ 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\beta \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0}.$$

El haz de planos paralelos a $\pi \equiv x - z = 0$ tiene por expresión $\gamma \equiv x - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano μ que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \equiv x - z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \ ;;\ 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -1} \Rightarrow \underline{\mu \equiv x - z - 1 = 0}.$$

La recta r' es la intersección de los planos β y μ: $\underline{r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}}$.

Para expresar r' por unas ecuaciones paramétricas hacemos lo siguiente:

$$r' \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \ ;;\ x = 1 + z = \underline{1 + \lambda = x} \ ;;\ y = 2x + 2z - 1 = 2 + 2\lambda + 2\lambda - 1 =$$

$$= \underline{1 + 4\lambda = y} \Rightarrow \underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}.$$

****

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}, \qquad t \in [1, 10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t = 1$ hora y $t = 10$ horas. (2,5 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, y la recta $x = 2$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - z = \lambda \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$. (1 punto)

4B. Dados los puntos de coordenadas $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$ y $D(k,1,1)$, donde $k \in \mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C. (1 punto)

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tiene un volumen de $5\,u^3$? (1,5 puntos)

PROPUESTA B

Ejercicio 1°) En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la siguiente expresión: $C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3},\ t\in[1,\ 10]$. Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre t = 1 hora y t = 10 horas.

Solución

La cantidad mínima será el mínimo de la función $C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3}$:

$$C'(t)=10+\frac{0-10}{t^2}+\frac{0-240\cdot 3t^2}{t^6}=10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}=\frac{10t^4-10t^2-720}{t^4}=10\cdot\frac{t^4-t^2-72}{t^4}.$$

$$C'(t)=0\ \Rightarrow\ 10\cdot\frac{t^4-t^2-72}{t^4}=0\ ;;\ t^4-t^2-72=0.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada:

$$t^4-t^2-72=0\ \Rightarrow\ t^2=y\ \Rightarrow\ y^2-y-72=0\ ;;\ y=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{289}}{2}=\frac{1\pm 17}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{y_1=9}\ ;;\ \underline{y_2=-8}.$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} t^2=9\ \Rightarrow\ \underline{t_1=3}\ ;;\ \underline{t_2=-3} \\ t^2=-8\ \Rightarrow t\notin R \end{cases}$.

La solución del problema es <u>t = 3</u>; la solución t = -3 carece de sentido lógico.

La cantidad de agua en estado líquido a las 3 horas es la siguiente:

$$C(3)=\frac{2}{3}+10\cdot 3+\frac{10}{3}+\frac{240}{3^3}=\frac{2}{3}+30+\frac{10}{3}+\frac{80}{9}=\frac{6+270+30+80}{9}=\frac{386}{9}\cong\underline{42'89\ litros}.$$

<u>La mínima cantidad en estado liquido son 42’89 litros a las tres horas.</u>

****

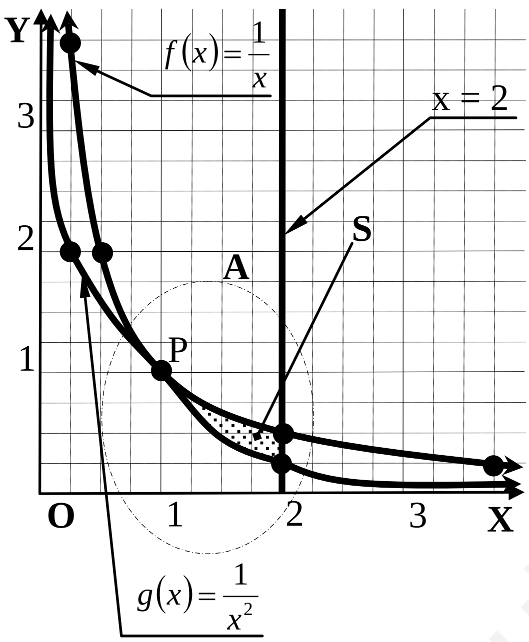
Ejercicio 2º) a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta x = 2.

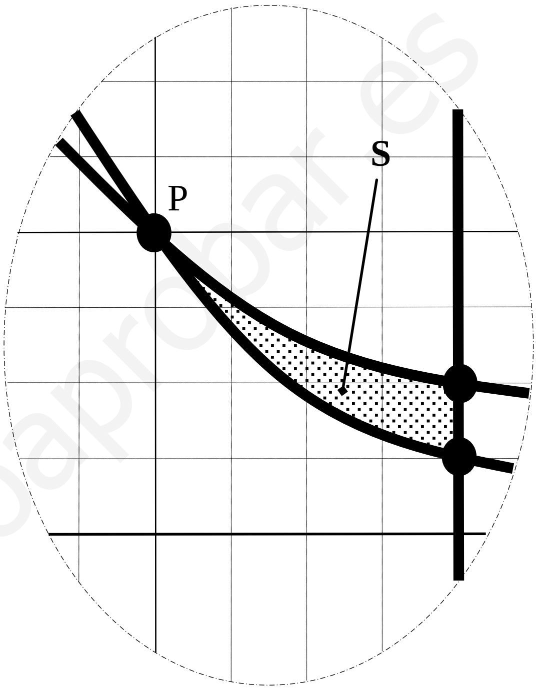
b) Calcula el área de dicha región.

Solución

a)

El punto de corte de las funciones se obtiene de la igualación de sus expresiones:





Detalle A

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} \;;;\; x^2=x \;;;\; x^2-x=0 \;;;\; x(x-1)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

Nótese que la solución x = 0 tiene como valor de las funciones infinito, por lo cual el único punto real de corte es P(1, 1).

b)

Todas las ordenadas de la función f(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función g(x) por lo que la superficie pedida es:

$$S=\int_1^2 [f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx=\left[Lx-\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2=\left[Lx+\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(L2+\frac{1}{2}\right)-\left(L1+\frac{1}{1}\right)=$$

$$=L2+\frac{1}{2}-L1-1=\underline{\underline{\left(L2-\frac{1}{2}\right)u^2=S}}.$$

****

Ejercicio 3º) a)Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in R$, el sistema $\begin{cases} \lambda x+2y-z=\lambda \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$.

Solución

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 & \lambda \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\lambda-3-10-5+12+\lambda=3\lambda-6=0 \;;;\; \lambda-2=0 \;;;\; \underline{\lambda=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda \neq 2 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M'=3=n^o\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

Para $\lambda = 2$ es $M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}$.

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=2 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

b)

Para $\lambda = 2$ el sistema es $\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Para resolver el sistema despreciamos una de las ecuaciones (tercera) y parametrizamos una de las incógnitas $(z=\lambda)$:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 3x-y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+2y=2+\lambda \\ 3x-y=1+\lambda \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x+2y=2+\lambda \\ 6x-2y=2+2\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 8x=4+3\lambda \;;;$$

$$\underline{x=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\lambda} \;;;\; y=3x-z-1=\frac{3}{2}+\frac{9}{8}\lambda-\lambda-1=\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda \;,\; \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

Ejercicio 4º) Dados los puntos de coordenadas A(0, 1, 0), B(1, 2, 3), C(0, 2, 1) y D(k, 1, 1), donde $\lambda \in R$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tienen volumen de 5 u^3?

Solución

a)

Los puntos A(0, 1, 0), B(1, 2, 3) y C(0, 2, 1) determinan los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, que son los siguientes:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 0) = (1,\ 1,\ 3).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 2,\ 1) - (0,\ 1,\ 0) = (0,\ 1,\ 1).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left| i + k - 3i - j \right| = \frac{1}{2} \left| -2i - j + k \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4+1+1} = \frac{1}{2} \sqrt{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ u^2 = S}}.$$

b)

Los puntos A(0, 1, 0) y D(k, 1, 1) determinan el vector :

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (k,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ 0) = (k,\ 0,\ 1).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w} \right] \right| = 5\ u^3 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left| 1 + k - 3k \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| 1 - 2k \right| = 5 \ ;;\ \left| 1 - 2k \right| = 30 \ ;;$$

$$\left. \begin{matrix} 1 - 2k = 30 \\ -1 + 2k = 30 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = -\frac{29}{2}}} \ ;;\ \underline{\underline{k_2 = \frac{31}{2}}}.$$

****