Junio 2015

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

# Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

**Bachillerato L. O. E.**

## Materia: MATEMÁTICAS II

**Instrucciones:** El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

## PROPUESTA A

---

**1A.** Dada la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$:
a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto (0,2) y que en dicho punto tiene un extremo relativo. **(1,5 puntos)**
b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo. **(1 punto)**

**2A.** Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ (2x-2)^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Esboza la región encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y el eje de abscisas. **(0,5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

**3A.** a) Despeja $X$ en la ecuación matricial $X \cdot A + B = X$, donde $A$, $B$ y $X$ son matrices cuadradas de orden 3. **(1 punto)**
b) Calcula $X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1,5 puntos)**

**4A.** a) Calcula la distacia del punto $P(-1, 2, 0)$ a la recta

$$r \equiv \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$ **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico de $P$ respecto de $r$. **(1,25 puntos)**

---

(sigue a la vuelta)

$\boxed{\text{Junio de 2015}}$

## PROPUESTA A

**1A** a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + x^2 + ax + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$

$f(x)$ pasa por $(0,2)$ y tiene un extremo relativo en dicho punto

$2 = e^{\operatorname{sen} 0} + 0^2 + a \cdot 0 + b \longrightarrow \boxed{b = 2 - e^0 = 2 - 1 = 1}$

$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x + 2x + a$

$f'(0) = 0$ ya que en $x = 0$ tiene un extremo relativo

$0 = e^{\operatorname{sen} 0} \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 + a \longrightarrow \boxed{a = -1}$

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + x^2 - x + 1$

$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x + 2x - 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \, e^{\operatorname{sen} x} + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^2 x + 2$

$f''(0) = -\operatorname{sen} 0 \cdot e^{\operatorname{sen} 0} + e^{\operatorname{sen} 0} \cdot \cos^2 0 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un mínimo relativo de $f(x)$.

**2A**

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & -2 \le x < 0 \\ (2x-2)^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x+4 & -2 \le x < 0 \\ 4x^2 - 8x + 4 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) $y = 2x + 4$

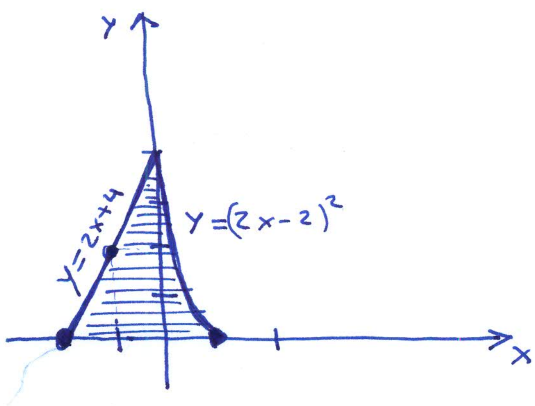
| x | y |
|---|---|
| -2 | 0 |
| -1 | 2 |
| ¿0? | 4 |

$y = 4x^2 - 8x + 4$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{8}{2 \cdot 4} = 1 \\ y_v = 4 - 8 + 4 = 0 \end{array}\right\} V(1, 0)$

Tabla de valores:

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| y | 4 | 0 |




b) $\boxed{A} = \int_{-2}^{0} (2x+4)\,dx + \int_{0}^{1} (4x^2 - 8x + 4) =$

$= 2\dfrac{x^2}{2} + 4x \Big]_{-2}^{0} + 4\dfrac{x^3}{3} - 8\dfrac{x^2}{2} + 4x \Big]_{0}^{1} =$

$= -(4 - 8) + \dfrac{4}{3} - 4 + 4 = 4 + \dfrac{4}{3} = \boxed{\dfrac{16}{3}\ u^2}$

**3A** a) $XA + B = X$

$XA - X = -B$

$X(A-I) = -B$

$X(A-I)(A-I)^{-1} = -B(A-I)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = -B(A-I)^{-1}}$

b) $-B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Cálculo de $(A-I)^{-1}$

$$(A-I\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1+F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_1\cdot(-1)]{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\cdot(-1)]{F_2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(I \,|\, (A-I)^{-1}\right) \Rightarrow (A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $X$

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ +3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

**4A** a) $P(-1, 2, 0)$ ¿$d(P, r)$?

$$r \equiv \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ \quad y + z = 1 \end{cases}$$

$d(P,r) = \dfrac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|}$ donde $\vec{u}_r$ es un vector director de $r$, $A \in r$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - \vec{k} - 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k} = (-1, 1, -1)$$

Punto A: Tomamos $y = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0, 1)$

$\vec{AP} = (-1, 2, 0) - (-2, 0, 1) = (1, 2, -1)$

$$\vec{u}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{k} - \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} = (1,-2,-3)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{AP}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{d(P, r) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{14}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{42}}{3} \text{ u}}$$

b) • plano $\pi \perp r$ que pasa por $P$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (-1, 1, -1) \\ P(-1, 2, 0) \end{array}\right\} \pi \equiv \vec{n}_\pi \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

$$(-1, 1, -1) \cdot (x+1, y-2, z) = 0$$

$$-(x+1) + y - 2 - z = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -x + y - z - 3 = 0}$$

• $\{M\} = r \cap \pi$

$$\begin{array}{l} -x + y + 2z = 0 \\ \quad y + z = 1 \rightarrow y = 1 - z \\ -x + y - z = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -x + 1 - z + 2z = 0 \\ -x + 1 - z - z = 3 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} -x + z = -1 \\ -x - 2z = 2 \end{array} \left.\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)}$$

$$\begin{array}{r} \rightarrow x - z = 1 \\ -x - 2z = 2 \\ \hline -3z = 3 \end{array} \Rightarrow z = -1 \Rightarrow y = 1 - (-1) = 2$$

Como $-x + y + 2z = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\boxed{M(0, 2, -1)}$$

• $P'$ simétrico de $P$ respecto de $M$

$P'(x, y, z)$

$$(0, 2, -1) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \dfrac{y+2}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \\ \dfrac{z}{2} = -1 \Rightarrow z = -2 \end{cases}$$

El simétrico de $P$ respecto de $r$ es $\boxed{P'(1, 2, -2)}$

## PROPUESTA B

---

**1B.** Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$$ **(1,25 puntos por cada función)**

**2B.** Dada la función $f(x) = (x + 1)e^{2x}$, se pide:
a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

**3B.** He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.
a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es $x$, la de las decenas $y$, y la de las unidades $z$, puede expresarse como $100x + 10y + z$. **(1,5 puntos)**
b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado. **(1 punto)**

**4B.** Dados los puntos $A(1, \lambda + 1, -1)$, $B(2, \lambda, 0)$ y $C(\lambda + 2, 0, 1)$, se pide:
a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que $A$, $B$ y $C$ estén alineados. **(1,25 puntos)**
b) Para $\lambda = -1$, da la ecuación implícita del plano $\pi$ que contiene a los puntos $A$, $B$ y $C$. **(1,25 puntos)**

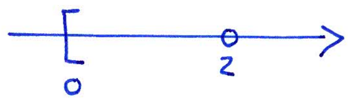
---

# PROPUESTA B

**1B** a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x-2}$

$\sqrt{2x}$ : $2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$x - 2 \neq 0$ : $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$




$\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty) - \{2\}$

Asíntotas:

AA.VV. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty \Rightarrow x = 2$ es una A.V. de $f(x)$

AA.HH. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x-2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\sqrt{2x} - x}{x}}{\frac{x-2}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{2x}{x^2}} - 1}{1 - \frac{2}{x}} = -1 \Rightarrow y = -1$ es una A.H. de $f(x)$

AA.OO.

No tiene, ya que tiene A.H.

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2$

$\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$

Asíntotas:

AA.VV. $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \infty \Rightarrow x = 2$ es una A.V. de $f(x)$

AA.HH. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = \infty \Rightarrow$ No tiene AA.HH.

AA.OO.

$y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}}{x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} - x\right) = [\infty - \infty] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3 - x(x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 4x + 4}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x + 4$ es una A.O. de $f(x)$

$\boxed{2B}$ $f(x) = (x+1)e^{2x}$

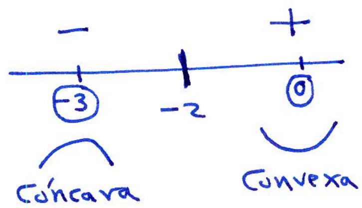
a) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

$$f'(x) = e^{2x} + (x+1)e^{2x} \cdot 2$$

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x} + 4(x+1)e^{2x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{2x}\left(4 + 4(x+1)\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{2x} = 0 & \text{Nunca} \\ 4 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Signo de $f''$




$$\boxed{f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{Cóncava en } (-\infty, -2) \\ \text{Convexa en } (-2, +\infty) \end{cases}}$$

Posible punto de inflexión: $x = -2$

$$f'''(x) = 8e^{2x} + 4e^{2x} + 4(x+1)e^{2x} \cdot 2$$

$f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow$ $\underline{x = -2 \text{ es un punto de inflexión de } f(x)}$

Se podría haber concluido lo mismo poniendo que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y en $x = -2$ pasa de ser cóncava a convexa.

b) $$\int f(x)\,dx = \int (x+1)e^{2x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x+1 \longrightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \longrightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} =$$

$$= (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = F(x)$$

$F(x)$ pasa por el origen de coordenadas $\Longleftrightarrow F(0) = 0$

$$\frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{4}e^0 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, la primitiva que piden es $\underline{F(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}}$

$\boxed{3B}$ El nº es $xyz$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+z}{2} \\ 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 198 \Rightarrow 99x - 99z = 198 \Rightarrow x - z = 2 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x \qquad - z = 2 \\ x + y + z = 12 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $y = \frac{12}{3} = 4$

Sustituimos en [2]: $2y - 2z = 2 \Rightarrow -2z = 2 - 8 = z = \frac{-6}{-2} = 3$

Sustituimos en [1]: $x = 2y - z = 2\cdot 4 - 3 = 5$

El nº que he pensado $\underline{\underline{\text{es } 543}}$.

$\boxed{4B}$ $A(1, \lambda+1, -1)$, $B(2, \lambda, 0)$ y $C(\lambda+2, 0, 1)$

a) $A, B$ y $C$ alineados $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ linealᵗᵉ dependientes $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = (2, \lambda, 0) - (1, \lambda+1, -1) = (1, -1, 1)$

$\overrightarrow{BC} = (\lambda+2, 0, 1) - (2, \lambda, 0) = (\lambda, -\lambda, +1)$

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{-1}{-\lambda} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

b) $\lambda = -1 \Rightarrow A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, 0)$ y $C(1, 0, 1)$

$$\pi \equiv \text{contiene a } A, B \text{ y } C \equiv \begin{cases} A(1, 0, -1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -1, 0) - (1, 0, -1) = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1) - (1, 0, -1) = (0, 0, 2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -1 & 0 \\ z+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(x-1) - 2y = -2x + 2 - 2y = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -2x - 2y + 2 = 0}$$