



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A .
 b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.
 2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.
 3. a) [1,25 punto] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot \cos(3x) dx$.
 b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2 + 1}$.
 4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.
 a) [1 punto] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
 b) [1,5 puntos] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1 .
 5. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.
 b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

6. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3}$.

- a) [1,5 puntos] Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
 b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.
- b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x \sin(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.
8. a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
- a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?
- b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k \ P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

1: a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_1 + F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 : 2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -F_3 + F_2 \\ -F_3 + F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{array} \right) = (I|A^{-1})$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $A\mathbf{x} + 3\mathbf{I} = A$

$$A\mathbf{x} = A - 3\mathbf{I}$$

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}(A - 3\mathbf{I})$$

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1}(A - 3\mathbf{I})} \quad [1]$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}A - A^{-1}3\mathbf{I}$$

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{I} - A^{-1}3\mathbf{I}} \quad [2]$$

Calculamos $A - 3\mathbf{I}$

$$A - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^{-1}(A - 3\mathbf{I})$ con [1]

$$\boxed{\mathbf{x} = A^{-1}(A - 3\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

Calculamos \mathbf{x} con [2]

$$\mathbf{x} = \mathbf{I} - A^{-1}3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & 3/2 \\ -3/2 & 9/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Cipri

(2.-) a)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + z = a \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante de A

$$|A| = 2 + a^2 - 2 - 2 = a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Rango de \tilde{A} para $a=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 3$$

Rango de \tilde{A} para $a=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1 + F_2]{-F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 2$$

Discusión:

Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow (\text{TRF})$
Sistema Compatible Determinado

Si $a = 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow (\text{TRF})$ Sistema Incompatible

Si $a = 1 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow (\text{TRF})$ Sistema Compatible Indeterminado

b) Resolución para $a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[-2F_1 + F_3]{-F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [2]: $y = 0$

Sustituimos en [3]:

$$-2y - z = -1 \Rightarrow z = -2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Sustituimos en [1]:

$$x + 2y + z = 2 \Rightarrow x = 2 - 2 \cdot 0 - 1 = 1$$

$$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = (1, 0, 1)}$$

$$\textcircled{3} \text{ a) } \int x \cos(3x) dx = \left[\begin{array}{l} t = 3x \\ dt = 3 dx \end{array} \right] = \int \frac{t}{3} \cos t \frac{dt}{3} =$$

$$= \frac{1}{9} \int t \cos t dt = \left[\begin{array}{l} u = t \longrightarrow du = dt \\ dv = \cos t dt \longrightarrow v = \sin t \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{9} \left(t \sin t - \int \sin t dt \right) = \frac{1}{9} \left(3x \sin(3x) + \cos(3x) \right) + C$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{2x^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}x \\ dt = \sqrt{2} dx \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + C$$

$$\textcircled{4} \pi_1 \equiv 2x + y + 2z = 3$$

$$\pi_2 \equiv 2x - y + 2z = 0$$

a) ¿a para que $\pi_1 \perp \pi_2$?

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2, 1, 2) \cdot (2, -1, 2) = 0 \Rightarrow 2a - 1 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/4}$$

b) Usando la fórmula

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 + 0 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

De otra forma

Cipri

(1) Determinamos una recta $r \perp \pi_1$ que pase por P .

$$r \equiv \{P, \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1}\}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) Calculamos $Q = r \cap \pi_1$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow (2 + \lambda) + \lambda + 2(1 + 2\lambda) = 3 \Rightarrow 6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

↑
sust. en la ec. del plano π_1

$$Q \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = 1 + 2\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$$

(3) Calculamos $|\overrightarrow{PQ}|$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right) - (2, 0, 1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$(4) \boxed{d(P, \pi_1) = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ u}}$$

$$(5) a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{regla de L'Hôpital}}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{+1}{e^{x-1}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Continuidad en $x=0$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x=0$
y presenta en dicho punto una discontinuidad de salto finito 2

Continuidad en $x=2$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

y presenta una discontinuidad en dicho punto de salto finito 1.

Nota: Las discontinuidades de salto (finito o infinito) son discontinuidades no evitables de primera especie.

⑥ $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3}$

a) Extremos relativos de f

$$f'(x) = \frac{(4x+2)(3x^2+3) - (2x^2+2x-2) \cdot 6x}{(3x^2+3)^2} = \frac{-6(x^2-4x-1)}{(3x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6(x^2-4x-1) = 0 \Rightarrow x^2-4x-1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} \end{cases}$$

(posibles extremos rel.)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(24-12x)(3x^2+3)^2 + 6(x^2-4x-1) \cdot 2(3x^2+3) \cdot 6x}{(3x^2+3)^4} \\ &= \frac{108x^5 - 648x^4 - 216x^3 - 432x^2 - 324x + 216}{(3x^2+3)^4} \end{aligned}$$

$$f''(2-\sqrt{5}) > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ tiene en } x=2-\sqrt{5} \text{ un m\u00edn. relativo de} \\ \text{coordenadas } (2-\sqrt{5}, f(2-\sqrt{5})) = (2-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{3}) \end{array} \right\}$$

$$f''(2+\sqrt{5}) < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ tiene en } x=2+\sqrt{5} \text{ un m\u00e1ximo relativo de} \\ \text{coordenadas } (2+\sqrt{5}, f(2+\sqrt{5})) = (2+\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{3}) \end{array} \right\}$$

b) Ec. de la recta tangente a f en $x=1$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1) &= \frac{2}{3} \\ f(1) &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x-1)}$$

Ec. de la recta normal a f en $x=1$

Cipri

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{\frac{2}{3}}(x-1) \Rightarrow \boxed{y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}(x-1)}$$

7) $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$

a) $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ pasa por } (1,1) \Rightarrow f(1)=1 \\ f \text{ tiene un punto de inflexión en } (1,1) \Rightarrow f''(1)=0 \end{array} \right.$

• $f(1)=1 \Rightarrow a+b=1 \leftarrow$

• $f''(1)=1$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 6a + 2b = 0 \leftarrow$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b=1 & \cdot (-6) \rightarrow -6a-6b=-6 \\ 6a+2b=0 & \quad \quad \quad 6a+2b=0 \\ \hline -4b=-6 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Para $(a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, la función cumple lo que se pide.

b). Teorema de Rolle

Si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $f'(c) = 0$

• $f(x) = x \sin x - \cos x$

i) f es continua en \mathbb{R} , por ser diferencia de funciones continuas, luego es continua en $[-1,1]$

ii) f es derivable en \mathbb{R} , por ser diferencia de funciones derivables, luego es derivable en $(-1,1)$

iii) $f(1) = \sin 1 - \cos 1$

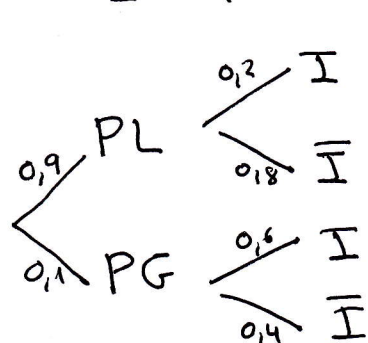
$$f(-1) = -\sin(-1) - \cos(-1) = \sin(1) - \cos 1$$

↑
sen es impar
cos es par

Aplicando el teorema de Rolle, $\exists c \in (-1,1)$ t.q. $f'(c) = 0$

Por tanto, si f tiene un extremo relativo en $(-1,1)$, es en c .

- 8) a) PL = paciente leve
 PG = paciente grave
 I = paciente ingresa en el hospital



$$a1) \boxed{P(I) = P(PL)P(I/PL) + P(PG)P(I/PG)} \\ = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,6 = \boxed{0,24}$$

$$a2) \boxed{P(PL/I) = \frac{P(PL \cap I)}{P(I)}} = \\ = \frac{0,9 \cdot 0,2}{0,24} = \boxed{0,75}$$

- b) X = el paciente es leve

$$X \sim B(8, 0,9)$$

$$b1) \boxed{P(X=4) = 0,0046} \text{ (mirando en la tabla)}$$

Dicha probabilidad se puede calcular también usando la definición de la función masa de probabilidad:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

En nuestro caso:

$$P(X=4) = \binom{8}{4} 0,9^4 \cdot 0,1^{8-4} = 0,0045927$$

$$b2) P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - P(X=8) = \\ = 1 - 0,4305 = \boxed{0,5695}$$

Al igual que antes, la $P(X=8)$ se podría haber calculado con la función masa de probabilidad:

$$P(X=8) = \binom{8}{8} 0,9^8 \cdot 0,1^{8-8} = 0,43046721$$