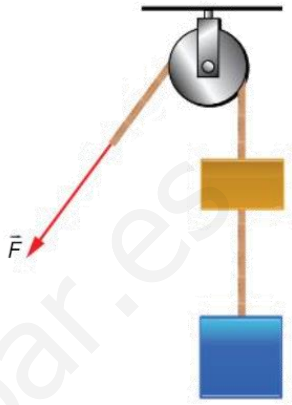
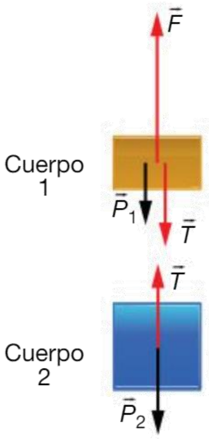
DINÁMICA

Aplicación de las leyes de Newton. Sistemas con fuerza de rozamiento. Movimiento de cuerpos enlazados



1. Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se encuentran unidos verticalmente por una cuerda. Si se tira del primero con una fuerza $\vec{F}$ tal y como se muestra en la figura, calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda que los une.



Dibujamos el diagrama de fuerzas y aplicamos la segunda ley de Newton teniendo en cuenta las siguientes consideraciones (**PONER SIEMPRE**):

- La tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda. Esto es resultado de considerar cuerdas inextensibles y de masa despreciable.
- Esto hace, igualmente, que la aceleración y velocidad de todos los cuerpos tengan módulos iguales para todos los cuerpos del sistema.
- Las poleas tienen masa despreciable y solo cambian la dirección de la tensión.

CUERPO 1:

$$F - p_1 - T = m_1 a$$

CUERPO 2:

$$T - p_2 = m_2 a$$

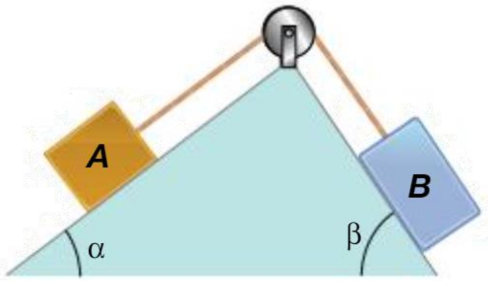
Sumando ambas expresiones:

$$F - p_1 - p_2 = m_1 a + m_2 a = a(m_1 + m_2)$$
$$F - m_1 g - m_2 g = a(m_1 + m_2)$$
$$a = \frac{F - g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$$

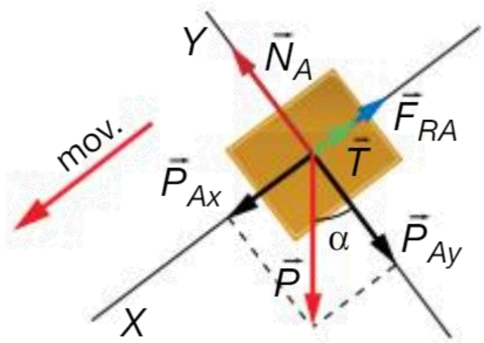
Y, conociendo la aceleración, la tensión de la cuerda:

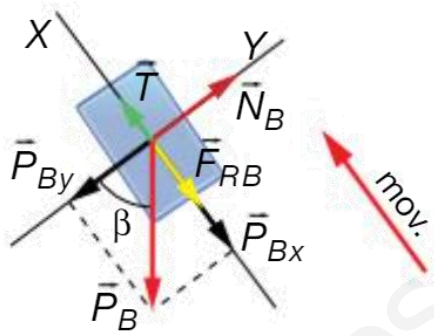
$$T - p_2 = m_2 a$$
$$T = m_2 a + m_2 g = m_2(a + g)$$

2. Dos cuerpos A y B se encuentran unidos por una cuerda como se muestra en la figura. Calcula la aceleración del sistema si se deja libre desde el reposo.



Lo primero es asignar, de forma arbitraria, un sentido al movimiento. Supongamos hacia la izquierda (sentido antihorario):





Se aplica la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

CUERPO A: EJE Y

$$N_A - p_{Ay} = 0 \;\rightarrow\; N_A = p_{Ay} = p_A \cos(\alpha) = m_A g \cos(\alpha)$$

EJE X:

$$p_{Ax} - F_{RA} - T = m_A a$$
$$p_A \operatorname{sen}(\alpha) - \mu N_A - T = m_A a$$
$$m_A g \operatorname{sen}(\alpha) - \mu m_A g \cos(\alpha) - T = m_A a$$

CUERPO B: EJE Y

$$N_B - p_{By} = 0 \;\rightarrow\; N_B = p_{By} = p_B \cos(\beta) = m_B g \cos(\beta)$$

EJE X:

$$T - F_{RB} - p_{Bx} = m_B a$$
$$T - \mu N_B - p_B \operatorname{sen}(\beta) = m_B a$$
$$T - \mu m_B g \cos(\beta) - m_B g \operatorname{sen}(\beta) = m_B a$$

Sumando las expresiones del eje X:

$$m_A g \operatorname{sen}(\alpha) - \mu m_A g \cos(\alpha) - \mu m_B g \cos(\beta) - m_B g \operatorname{sen}(\beta) = m_A a + m_B a$$
$$a = \frac{m_A g[\operatorname{sen}(\alpha) - \mu \cos(\alpha)] - m_B g[\mu \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)]}{m_A + m_B}$$

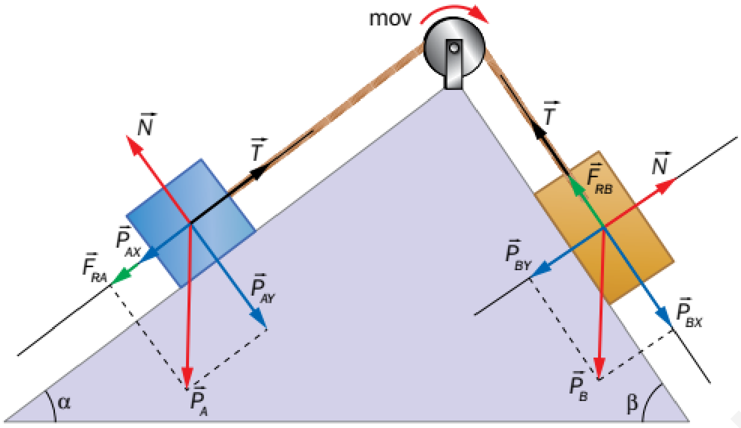
IMPORTANTE: Si al sustituir los datos resulta una aceleración negativa, habrá que replantear el problema suponiendo que se mueven en sentido contrario (hacia la derecha en este caso). Si también resulta una aceleración negativa, entonces el sistema permanece en reposo.

3. Si en el ejercicio anterior $m_A = 10kg, m_B = 15kg, \alpha = 45°, \beta = 30°$ y $\mu = 0{,}3$, calcula la aceleración y el sentido del movimiento. Si pulimos las superficies hasta hacer $\mu \simeq 0$, ¿cuánto valdrá la aceleración?

Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

$$a = \frac{10 \cdot 9{,}8[\operatorname{sen}(45) - 0{,}3 \cos(45)] - 15 \cdot 9{,}8[0{,}3 \cos(30) + \operatorname{sen}(30)]}{10 + 15} = -2{,}53 \frac{m}{s^2}$$

Como resulta aceleración negativa hay que volver a considerar el sistema, ahora con sentido de movimiento horario:



Se aplica la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

CUERPO A: EJE Y

$$N_A - p_{Ay} = 0 \;\rightarrow\; N_A = p_{Ay} = p_A \cos(\alpha) = m_A g \cos(\alpha)$$

EJE X:

$$T - p_{Ax} - F_{RA} = m_A a$$
$$T - p_A \operatorname{sen}(\alpha) - \mu N_A = m_A a$$
$$T - m_A g \operatorname{sen}(\alpha) - \mu m_A g \cos(\alpha) = m_A a$$

CUERPO B: EJE Y

$$N_B - p_{By} = 0 \;\rightarrow\; N_B = p_{By} = p_B \cos(\beta) = m_B g \cos(\beta)$$

EJE X:

$$p_{Bx} - T - F_{RB} = m_B a$$
$$p_B \operatorname{sen}(\beta) - T - \mu N_B = m_B a$$
$$m_B g \operatorname{sen}(\beta) - T - \mu m_B g \cos(\beta) = m_B a$$

Sumando las expresiones del eje X:

$$m_B g \operatorname{sen}(\beta) - \mu m_B g \cos(\beta) - m_A g \operatorname{sen}(\alpha) - \mu m_A g \cos(\alpha) = m_A a + m_B a$$
$$\frac{m_B g[\operatorname{sen}(\beta) - \mu \cos(\beta)] - m_A g[\operatorname{sen}(\alpha) + \mu \cos(\alpha)]}{m_A + m_B} =$$
$$= \frac{15 \cdot 9{,}8[\operatorname{sen}(30) - 0{,}3\cos(30)] - 10 \cdot 9{,}8[\operatorname{sen}(45) + 0{,}3\cos(45)]}{10 + 15} = -2{,}19\,\frac{m}{s^2}$$

Al ser la aceleración también negativa, diremos que el sistema está en reposo. Por tanto, $a = 0m/s^2$.

En el caso de que no exista rozamiento, vamos a suponer que el movimiento es en sentido horario, pues $m_B > m_A$. Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

CUERPO A: EJE Y

$$N_A - p_{Ay} = 0 \;\rightarrow\; N_A = p_{Ay} = p_A \cos(\alpha) = m_A g \cos(\alpha)$$

EJE X:

$$T - p_{Ax} = m_A a$$
$$T - p_A \operatorname{sen}(\alpha) = m_A a$$

$$T - m_A g\,\text{sen}(\alpha) = m_A a$$

CUERPO B: EJE Y

$$N_B - p_{By} = 0 \;\rightarrow\; N_B = p_{By} = p_B\cos(\beta) = m_B g\cos(\beta)$$

EJE X:

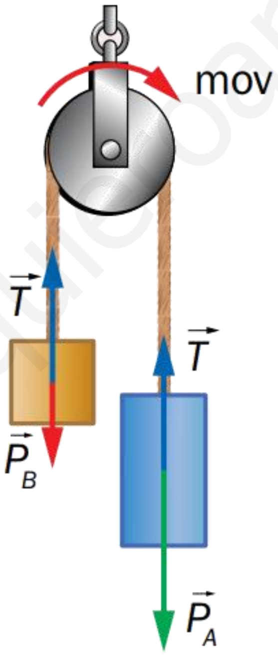
$$p_{Bx} - T = m_B a$$
$$p_B\,\text{sen}(\beta) - T = m_B a$$
$$m_B g\,\text{sen}(\beta) - T = m_B a$$

Sumando las expresiones del eje X:

$$m_B g\,\text{sen}(\beta) - m_A g\,\text{sen}(\alpha) = m_A a + m_B a$$
$$a = \frac{m_B g\,\text{sen}(\beta) - m_A g\,\text{sen}(\alpha)}{m_A + m_B} = \frac{15\cdot 9{,}8\cdot sen(30) - 10\cdot 9{,}8\cdot sen(45)}{10+15} = 0{,}17\,\frac{m}{s^2}$$

4. Una cuerda pasa por una polea. Si de un lado cuelga un cuerpo de 7kg, y en el otro uno de 5kg, calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

El esquema de las fuerzas es el mostrado a continuación:



Aplicando la segunda ley de Newton a los dos cuerpos, y sabiendo que el movimiento será en el sentido horario pues $m_A > m_B$.

CUERPO A:

$$p_A - T = m_A a$$

CUERPO B:

$$T - p_B = m_B a$$

Sumando ambas expresiones:

$$p_A - p_B = m_A a + m_B a = a(m_A + m_B)$$
$$m_A g - m_B g = a(m_1 + m_2)$$

$$a = \frac{g(m_A - m_B)}{m_1 + m_2} = \frac{9{,}8 \cdot (7-5)}{7+5} = 1{,}63\,\frac{m}{s^2}$$

Y, conociendo la aceleración, la tensión de la cuerda:

$$T - p_B = m_B a$$

$$T = m_B a + m_B g = m_B(a+g) = 5 \cdot (1{,}63 + 9{,}8) = 57{,}15N$$

5. En este sistema, calcula el módulo de $\vec{F}$ para que los cuerpos, inicialmente en reposo, se desplacen 5m en 10s. ¿Cuál es la tensión que soporta cada cuerda?

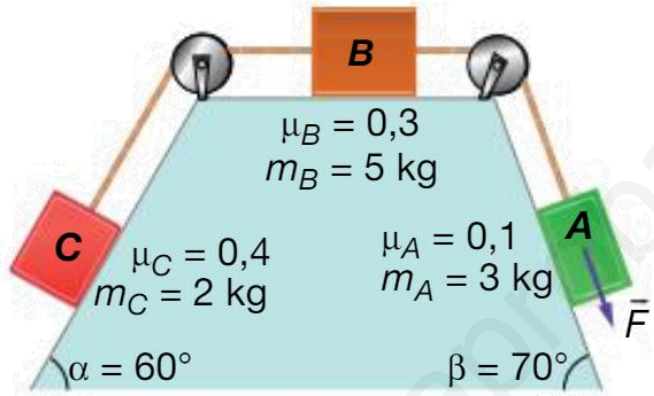
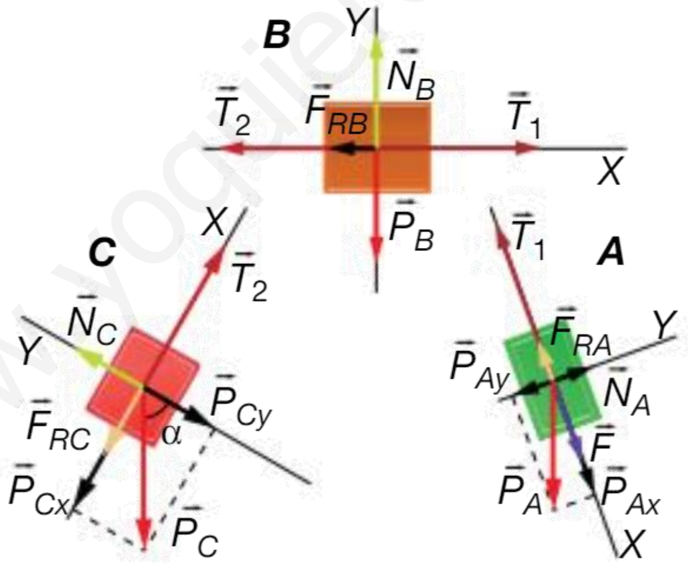


Diagrama de fuerzas (se mueve en sentido horario según $\vec{F}$):



Todos los cuerpos describen un M.R.U.A.:

$$\Delta s = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = \frac{2\Delta s}{t^2} = \frac{2 \cdot 5}{10^2} = 0{,}1\,\frac{m}{s^2}$$

CUERPO A: EJE Y

$$N_A - p_{Ay} = 0 \ \rightarrow \ N_A = p_{Ay} = p_A \cos(\beta) = m_A g \cos(\beta)$$

EJE X:

$$F + p_{Ax} - T_1 - F_{RA} = m_A a$$

$$F + p_A\,\text{sen}(\beta) - T_1 - \mu_A N_A = m_A a$$
$$F + m_A g\,\text{sen}(\beta) - T_1 - \mu_A m_A g\cos(\beta) = m_A a$$

CUERPO B: EJE Y

$$N_B - p_B = 0 \;\rightarrow\; N_B = p_B = m_B g$$

EJE X:

$$T_1 - F_{RB} - T_2 = m_B a$$
$$T_1 - \mu_B N_B - T_2 = m_B a$$
$$T_1 - \mu_B m_B g - T_2 = m_B a$$

CUERPO C: EJE Y

$$N_C - p_{Cy} = 0 \;\rightarrow\; N_C = p_{Cy} = p_C\cos(\alpha) = m_C g\cos(\alpha)$$

EJE X:

$$T_2 - p_{Cx} - F_{RC} = m_C a$$
$$T_2 - p_C\,\text{sen}(\alpha) - \mu_C N_C = m_C a$$
$$T_2 - m_C g\,\text{sen}(\alpha) - \mu_C m_C g\cos(\alpha) = m_C a$$

Si se suman las ecuaciones en el eje X se obtiene:

$$F + m_A g\,\text{sen}(\beta) - \mu_A m_A g\cos(\beta) - \mu_B m_B g - m_C g\,\text{sen}(\alpha) - \mu_C m_C g\cos(\alpha)$$
$$= m_A a + m_B a + m_C a = a(m_A + m_B + m_C)$$

$$F = a(m_A + m_B + m_C) - m_A g\,\text{sen}(\beta) + \mu_A m_A g\cos(\beta) +$$
$$+\mu_B m_B g + m_C g\,\text{sen}(\alpha) + \mu_C m_C g\cos(\alpha) =$$
$$= 0{,}1\cdot(3+5+2) - 3\cdot 9{,}8\cdot sen(70°) + 0{,}1\cdot 3\cdot 9{,}8\cdot cos(70°) +$$
$$+0{,}3\cdot 5\cdot 9{,}8 + 2\cdot 9{,}8\cdot sen(60°) + 0{,}4\cdot 2\cdot 9{,}8\cdot\cos(60°) = 9{,}973N$$

Y sustituyendo la fuerza calculamos las tensiones:

$$F + m_A g\,\text{sen}(\beta) - T_1 - \mu_A m_A g\cos(\beta) = m_A a$$
$$T_1 = F + m_A g\,\text{sen}(\beta) - \mu_A m_A g\cos(\beta) - m_A a =$$
$$= 9{,}973 + 3\cdot 9{,}8\cdot sen(70°) - 0{,}1\cdot 3\cdot 9{,}8\cdot\cos(70°) - 3\cdot 0{,}1 = 36{,}29N$$

$$T_2 - m_C g\,\text{sen}(\alpha) - \mu_C m_C g\cos(\alpha) = m_C a$$
$$T_2 = m_C g\,\text{sen}(\alpha) + \mu_C m_C g\cos(\alpha) + m_C a =$$
$$= 2\cdot 9{,}8\cdot sen(60°) + 0{,}4\cdot 2\cdot 9{,}8\cdot\cos(60°) + 2\cdot 0{,}1 = 20{,}99N$$