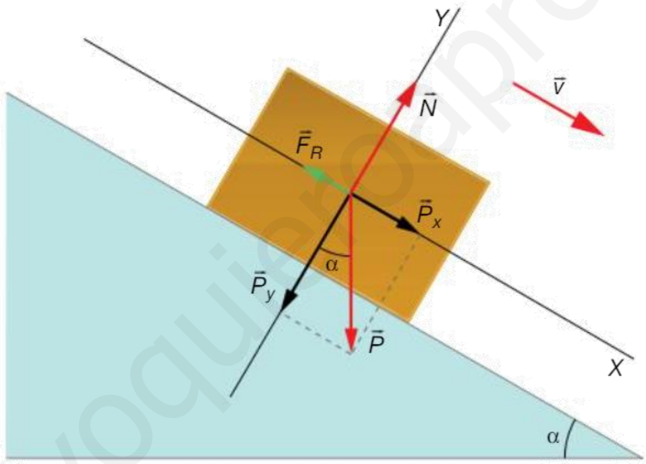
DINÁMICA

Aplicación de las leyes de Newton.
Sistemas con fuerza de rozamiento.
Movimiento en un plano horizontal.
Movimiento en un plano inclinado.

1. Dibuja las fuerzas que actúan sobre un cuerpo situado en un plano inclinado con rozamiento, y estudia las condiciones para que haya fuerza neta no nula.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal y el rozamiento. Utilizamos como sistema de referencia unos ejes cartesianos cuyo eje X sea paralelo al plano:



En este sistema de referencia:

- El peso se divide en sus componentes X a Y: $\vec{p} = \overrightarrow{p_x} + \overrightarrow{p_y} = p_x\hat{\imath} - p_y\hat{\jmath}$
- La normal va en sentido Y positivo: $\vec{N} = N\hat{\jmath}$
- La fuerza de rozamiento va en sentido X negativo: $\overrightarrow{F_{roz}} = -F_{roz}\hat{\imath}$

Eje Y:

En este eje la resultante de las fuerzas es nula, pues si fuese $N > p_y$, el cuerpo se separaría del plano, y si $N < p_y$, penetraría en él. Ninguna de las dos situaciones ocurre, por lo que la segunda Ley de Newton queda:

$$N - p_y = 0 \;\rightarrow\; N = p_y$$

Eje X:

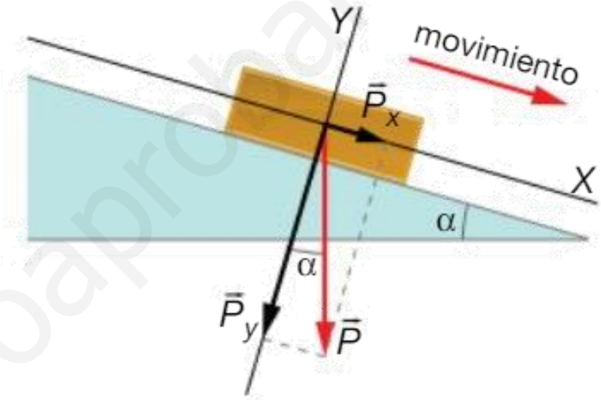
En este eje tenemos la componente X del peso y la fuerza de rozamiento:

- Si $p_x \leq F_{roz}$, el cuerpo no desliza, pero no sube, ya que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento, pero no lo produce.
- Si $p_x > F_{roz}$, el cuerpo comienza a deslizar, y la fuerza de rozamiento toma el valor $F_{roz} = \mu_d N$. En este caso, la fuerza neta proporcionada por la segunda ley de Newton es:

$$p_x - F_{roz} = m \cdot a$$

2. Expresa las componentes del peso del ejercicio anterior en función del ángulo de inclinación, α.

En la figura, $\overrightarrow{p_y}$ es perpendicular a la superficie del plano, y $\vec{p}$ lo es a su base. Por tanto, al ser perpendiculares dos a dos el ángulo que forman $\overrightarrow{p_y}$ y $\vec{p}$ es el mismo comprendido entre la base del plano y su superficie.

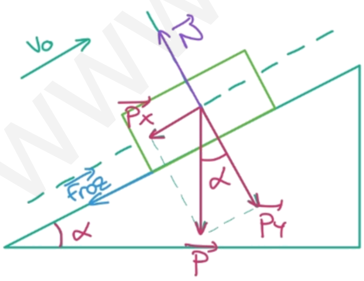


Con esto:

$$sen(\alpha) = \frac{p_x}{p} \quad \rightarrow$$
$$p_x = p \cdot sen(\alpha) = m \cdot g \cdot sen(\alpha)$$

$$cos(\alpha) = \frac{p_y}{p} \quad \rightarrow$$
$$p_x = p \cdot cos(\alpha) = m \cdot g \cdot cos(\alpha)$$

3. Desde el punto más bajo de un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal, con coeficiente de rozamiento μ, se lanza un cuerpo de masa m con una velocidad inicial v_0. El cuerpo sube deslizando hasta detenerse y vuelve hasta el punto de partida. Calcula el tiempo total invertido, y el espacio recorrido.



SUBIDA: MRUA + 2ª Ley de Newton

Δt_s [tiempo invertido]

- $\cancel{v} = v_0 + a_s(t - t_0) = v_0 + a_s \Delta t$

$$\Delta t_s = \frac{-v_0}{a_s}$$

Δx [espacio recorrido]

- $\cancel{v^2} - v_0^2 = 2 \cdot a_s (x - x_0)$

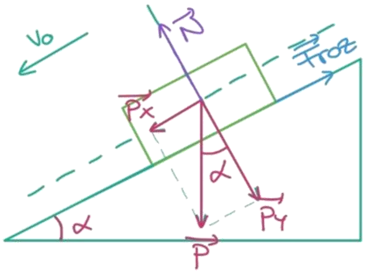
$$\Delta x = \frac{-v_0^2}{2a_s}$$

de donde sale a_s

EJE Y: $N - p_y = 0$; $N = p_y = p \cdot \cos\alpha = mg\cos\alpha$

EJE X: $-p_x - F_{roz} = m \cdot a_s$

$$a_s = \frac{-p_x - F_{roz}}{m} = \frac{-p\,sen\,\alpha - \mu N}{m} = \frac{-mg\,sen\,\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m}$$



BAJADA: MRUA + 2ª Ley de Newton

• El espacio recorrido ya lo sé

Δx [espacio recorrido]

• $v^2 - \cancel{v_0^2} = 2 \cdot a_b \underbrace{(x - x_0)}_{}$

$v = \sqrt{2 a_b \Delta x}$

• $v = \cancel{v_0} + a_b \overbrace{(t - t_0)}^{\Delta t_b \text{[tiempo invertido]}} = a_b \Delta t$

$$\Delta t_b = \frac{v}{a_b} = \frac{\sqrt{2 a_b \Delta x}}{a_b} = \frac{\sqrt{2 a_b \Delta x}}{\sqrt{a_b^2}} = \sqrt{\frac{2 \Delta x}{a_b}}$$

de donde saco a_b

EJE Y: $N - P_y = 0$; $N = P_y = P \cdot \cos\alpha = mg\cos\alpha$

EJE X: $P_x - F_{roz} = m \cdot a_b$

$$a_b = \frac{P_x - F_{roz}}{m} = \frac{P\,sen\,\alpha - \mu N}{m} = \frac{mg\,sen\,\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m}$$

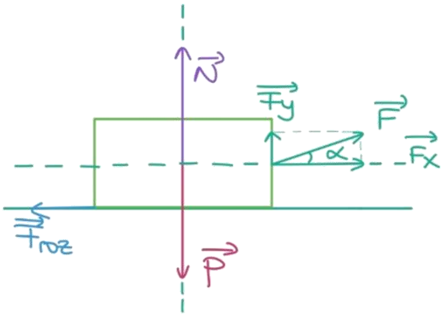
$\Longrightarrow$ Tiempo total invertido: $\Delta t_T = \Delta t_s + \Delta t_b = \frac{-v_0}{a_s} + \sqrt{\frac{2\Delta x}{a_b}}$

$\Longrightarrow$ Espacio total recorrido: $\Delta x_T = 2\Delta x = -\frac{v_0^2}{a_s}$

En el ejercicio anterior, los numeradores de la expresión del tiempo total tienen un signo <<–>>, en uno de los sumandos, incluso dentro de una raíz cuadrada. ¿Se trata de un error matemático? Razona tu respuesta.

No es un error matemático, ya que hay que tener en cuenta que la aceleración de subida tiene signo negativo. Por tanto, el primer término tendrá signo positivo, igual que en el segundo; al dividir entre la aceleración de subida, la raíz será positiva.

5. Se arrastra un cajón de 35kg tirando de él con una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y el cajón es $\mu_e = 0{,}3$, y el dinámico $\mu_d = 0{,}25$. ¿Qué fuerza mínima habrá que aplicar para que el cajón deslice? Si se ejerce una fuerza doble, ¿cuál es la aceleración?



Datos: $m = 35kg$ $\alpha = 30°$
$\mu_e = 0'30$ $\mu_d = 0'25$

La fuerza mínima necesaria para que el cajón empiece a moverse coincide con la que se contrapone al movimiento: F_{roz}

2º Ley de Newton:

EJE Y: $N + F_y - P = 0$; $N = P - F_y = mg - F\,sen\,\alpha$

EJE X: $F_x - F_{roz} = 0$; $F\cos\alpha - \mu_e N = 0$

↳ porque va a empezar el movimiento

$F\cos\alpha - \mu_e(mg - F\,sen\,\alpha) = 0$

$F\cos\alpha - \mu_e mg + \mu_e F\,sen\,\alpha = 0$

$$\Longrightarrow F = \frac{\mu_e mg}{\cos\alpha + \mu\,sen\,\alpha} = \frac{0'3 \cdot 35 \cdot 9'8}{\cos 30^\circ + 0'3 \cdot sen\,30^\circ} = 101'3\,N$$

Ahora: $F = 2 \cdot 101'3 = 202'55\,N$. 2º ley de Newton

EJE Y: $N + F_y - P = 0$; $N = P - F_y = mg - F\,sen\,\alpha$ (no varía)

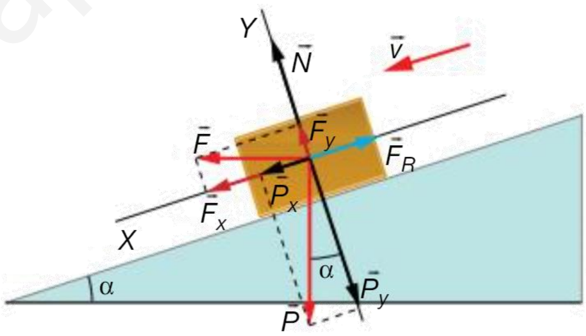
EJE X: $F_x - F_{roz} = m \cdot a$; $F\cos\alpha - \mu_d N = m \cdot a$

↳ porque el cuerpo ya está en movimiento

$$\Longrightarrow a = \frac{F\cos\alpha - \mu_d(mg - F\,sen\,\alpha)}{m} =$$

$$= \frac{202'55 \cdot \cos 30^\circ - 0'25(35 \cdot 9'8 - 202'55\,sen\,30^\circ)}{35} = 3'29\,\frac{m}{s^2}$$

6. Un bloque de masa m baja deslizando por un plano inclinado un ángulo α por la acción de su peso y una fuerza F horizontal que favorece el movimiento. Si el coeficiente de rozamiento plano-bloque es μ, calcula la aceleración en función de la fuerza aplicada, y el valor de F a partir del cual el cuerpo se separa del plano.



Se aplica la segunda ley de Newton al bloque:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot sen\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a \\ N + F \cdot sen\,\alpha - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$a = \frac{F}{m} \cdot (\cos\alpha + \mu \cdot sen\,\alpha) + g \cdot (sen\,\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

La condición de contacto entre dos superficies es que la fuerza normal sea $N > 0$. Cuando F aumenta, N disminuye, y habrá un valor de F que haga que $N = 0$, momento en el cual deja de haber contacto entre superficies. Esto es:

$$N = m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot sen\,\alpha > 0 \quad \rightarrow \quad m \cdot g \cdot \cos\alpha > F \cdot sen\,\alpha \quad \rightarrow$$

$$F < m \cdot g \cdot \cot\alpha \quad \rightarrow \quad F < 754{,}8\,\text{N}$$

Por tanto, si $F \geq m \cdot g \cdot \cot\alpha$, $N \leq 0$, y el cuerpo se separará del plano, siendo este el valor máximo de F que asegura contacto entre ellos.