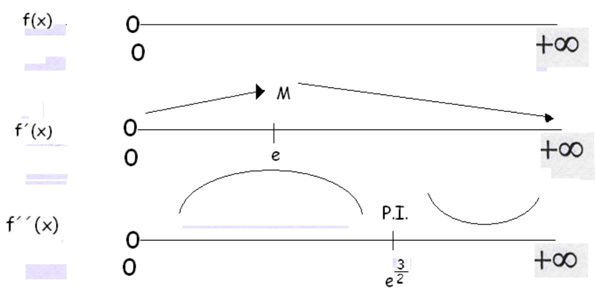
Estudio completo de $y=\dfrac{\ln x}{x}$



1º Dominio de f(x):

$D[f(x)] = \forall x \in (0,+\infty)$

Pues $\begin{cases} \ln x \in \Re \Rightarrow x>0 \\ y \notin \Re \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in (0,+\infty)$

2º Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{\ln(-x)}{-x} \Rightarrow \ln(-x)\ no \quad existe$

No hay simetría.

3º Corte con OX:(¿? , 0)

$0=\dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \ln(x)=0 \Rightarrow x=e^0;\ \ x=1;\quad (1,0)$

Corte con OY: (0, ¿?)

$x=0\quad pero\quad f(0)\quad no\quad existe$ **no hay corte**

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)] = \forall x \in (0,+\infty)$

Posible asíntota en ¿x=0+?

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$ **en x=** 0^+ **hay asíntota vertical.**

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L´Hopital}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = +0$ **y=0 Asíntota horizontal en el +∞.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

La función no está definida en el **-∞.** Luego **no hay asíntota horizontal en el -∞.**

***A.O.** : Cuando $x \to \infty$ **No existe una asíntota oblicua, pues hay horizontal.**

B) Cuando $x \to -\infty$

La función no está definida en el **-∞.** Luego **no hay asíntota oblicua en el -∞**

4º Corte con OX: (¿?, 0)

$0=x\quad pero\quad f(x)\quad no\quad existe$ **no hay corte**

Corte con OY: (0, ¿?)

$x=0\quad pero\quad f(0)\quad no\quad existe$ **no hay corte**

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´ = 0 para estudiar el cambio de monotonía

$y´=\dfrac{x.\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \qquad y´=0 \quad \Rightarrow \quad 0=1-\ln x \Rightarrow \quad \ln x = 1 \Rightarrow x=e$

$\forall x \in (0,e)\quad y´(1)>0$ creciente

$\forall x \in (e,+\infty)\quad y´(2e)<0$ decreciente

En $x = e \quad ; f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e} \quad \Rightarrow \left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

En $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$ existe un máximo relativo.

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{x^2\left(0 - \frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)2x}{x^4} \underset{sacar\ \ factor\ \ \ común}{=} \frac{x(-1 - 2 + 2\ln x)}{x^4}$$

$$\underset{simplificar}{=} \frac{(-3 + 2\ln x)}{x^3}$$

$$-3 + 2\ln nx = 0 \Rightarrow \quad 2\ln x = 3 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

$\forall x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right) \quad y''(e) < 0$ convexa

$\forall x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right) \quad y''(e^3) > 0$ cóncava

Puntos de inflexión:

$$x = e^{\frac{3}{2}} \quad f(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

7° Gráfica: