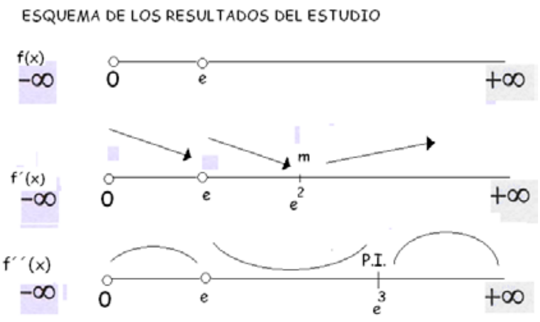
Estudio completo de $y=\dfrac{x}{\ln x-1}$



1º Dominio de f(x):

$D[f(x)]=\forall x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

Pues $\begin{cases}\ln x\in\Re\Rightarrow x>0\\ y\notin\Re\Rightarrow \ln x-1=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e\end{cases}$

2º Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{-x}{\ln(-x)-1}$ **No hay simetría.**

3º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)]=\forall x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

Posible asíntota en ¿x=0+?

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\ln x-1}=\dfrac{0}{-\infty}=0$ **en x=0 no hay asíntota vertical.**

Posible asíntota en ¿x=e?

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x}{\ln x-1}=\dfrac{1}{0}\,no\ exite\quad pues\begin{cases}\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{x}{\ln x-1}=\dfrac{1}{-0}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{x}{\ln x-1}=\dfrac{1}{+0}=+\infty\end{cases}\quad -\infty\neq+\infty$ **luego x"=e" es A.V.**

***AH.** :

A) Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x-1}\overset{L´Hopital}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ **No hay Asíntota horizontal en el +∞.**

B) Se calcula el $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

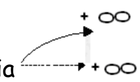
La función no está definida en el **-∞**.Luego **no hay asíntota horizontal en el -∞.**

***A.O.** : y= m x+n

A) Cuando $x\to+\infty$

1º Se calcula **"m"**:

- $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{x}{\ln x-1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln x-1}\right)=\dfrac{1}{+\infty}=+0$

Por lo tanto **no existe una asíntota oblicua en el +∞** : curvatura y tendencia 

B) Cuando $x\to-\infty$

La función no está definida en el **-∞**. Luego **no hay asíntota oblicua en el -∞**

4º Corte con OX: (¿?, 0)

$0=x\quad pero\quad f(x)\quad no\quad existe$ **no hay corte**

Corte con OY: (0, ¿?)

$x=0\quad pero\quad f(0)\quad no\quad existe$ **no hay corte**

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos y´= 0 para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(\ln x - 1) - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{\ln x - 2}{(\ln x - 1)^2} \qquad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \ln x - 2 \Rightarrow \quad \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

$\forall x \in (0, e) \quad y'(\frac{1}{e}) < 0$ decreciente

$\forall x \in (e, e^2) \quad y'(2e) < 0$ decreciente

$\forall x \in (e^2, +\infty) \Rightarrow \quad y'(e^3) > 0$ creciente

$x = e^2 \quad ; f(e) = \frac{e^2}{\ln e^2 - 1} = e^2 \quad \Rightarrow (e^2 \, , e^2)$

En $(e^2 \, , e^2)$ existe un mínimo relativo.

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(\ln x - 1)^2 \frac{1}{x} - (\ln x - 2)2(\ln x - 1)\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^4} \underset{sacar\ factor\ común}{=} \frac{(\ln x - 1)\frac{1}{x}(\ln x - 1 - 2\ln x + 4)}{(\ln x - 1)^4}$$

$$\underset{simplificar}{=} \frac{(-\ln x + 3)}{x(\ln x - 1)^3}$$

$-\ln x + 3 = 0 \Rightarrow \quad \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$

$\forall x \in (0 \, , e) \quad y''(\frac{1}{e}) < 0$ convexa

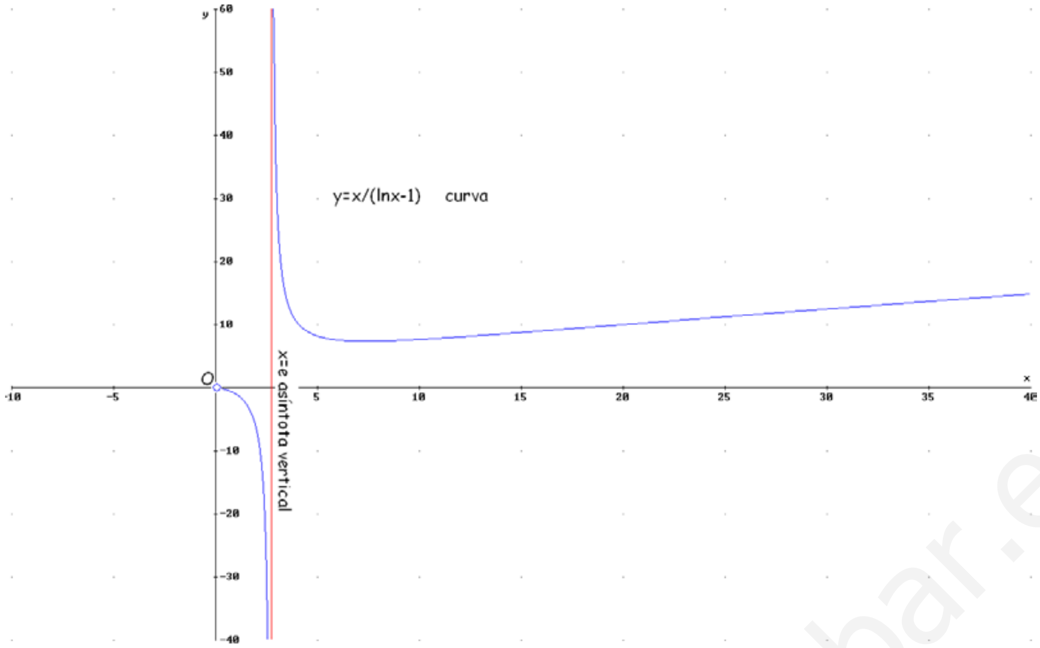
$\forall x \in (e, e^3) \quad y''(e^2) > 0$ cóncava

$\forall x \in (e^3, +\infty) \Rightarrow \quad y''(e^4) < 0$ convexa

Puntos de inflexión:

$x = e^3; \quad f(e^3) = \frac{e^3}{\ln e^3 - 1} = \frac{e^3}{2} \quad \Rightarrow \left(e^3 \, , \frac{e^3}{2}\right)$

7° Gráfica:


y=x/(lnx-1) curva
x=e asíntota vertical