

Estudio completo de $y = x^2 \cdot e^{-x}$

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

2º Simetrías:

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^x = x^2 \cdot e^x$$

No hay simetrías.

3º Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Asíntota horizontal $y=0$ en el $+\infty$; el $+0$ indica que la curva se encuentra por encima de la asíntota.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = +\infty \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

No hay asíntota horizontal en el $-\infty$.

*A.O. : $y = m x + n$

Sólo podrá existir en el $-\infty$

A) Cuando $x \rightarrow -\infty$

1º Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{-x}) = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty$$

Por lo tanto no existe una asíntota oblicua en el $-\infty$. : curvatura y tendencia - ∞

4º Corte con OX: (¿?, 0)

$$0 = x^2 \cdot e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (0,0) \text{ punto de corte con OX}$$

Corte con OY: (0, ¿?)

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ punto de corte con OY}$$

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

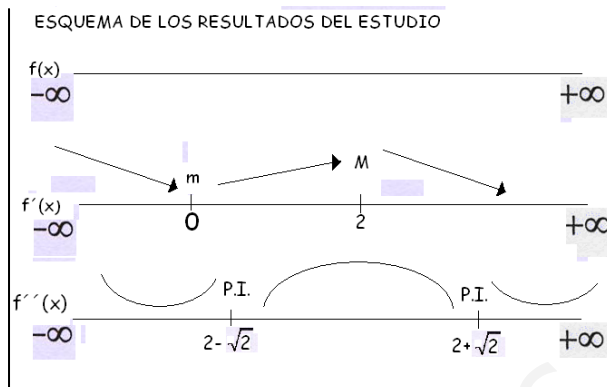
Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} (2x - x^2)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 0 = 2x - x^2 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \quad y'(-4) < 0 \quad \text{decreciente}$$

$$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow y'(1) > 0 \quad \text{creciente}$$



$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0$ decreciente

$$x = 0 ; f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

En $(0, 0)$ existe un mínimo relativo.

$$x = 2 ; f(2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow \left(2, \frac{4}{e^2}\right)$$

En $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ existe un máximo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y' = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = e^{-x}(2 - 4x + x^2)$$

$$2 - 4x + x^2 = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \quad y''(-4) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \quad y''(2) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (2 + \sqrt{2}, +\infty) \Rightarrow y''(4) > 0 \quad \text{cóncava}$$

Puntos de inflexión:

$$x = 2 - \sqrt{2} ; f(2 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-(2 - \sqrt{2})} \approx 0,191 \Rightarrow (2 - \sqrt{2}, 0,191)$$

$$x = 2 + \sqrt{2} ; f(2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-(2 + \sqrt{2})} \approx 0,38353 \Rightarrow (2 + \sqrt{2}, 0,38353)$$

7º Gráfica:

