

Esboza la gráfica de $y = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ calculando dominio, simetrías, asíntotas, cortes con los ejes, monotonía, máximos y mínimos relativos.

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si $\frac{2x}{x^2+1} \notin \mathbb{R}$

2° Simetrías:

$$f(-x) = e^{\frac{-2x}{x^2+1}} = \frac{1}{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}$$

No existen simetrías.

3° Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{2x}{x^2+1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} \stackrel{L'Hopital}{=} \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = \frac{1}{+\infty} = +0 \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

Luego "y=1" asíntota horizontal en el $+\infty$.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{2x}{x^2+1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2+1} \stackrel{L'Hopital}{=} \frac{-\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x} = \frac{1}{-\infty} = -0 \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

Asíntota horizontal "y=1" en el $-\infty$.

C) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$	$y_1 - 1$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = 1,02$	$1,02 - 1 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = 0,98$	$0,98 - 1 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

*A.O. : $y = m x + n$

Tiene asíntota horizontal en el $+\infty$ y en el $-\infty$ por lo tanto no existe una asíntota oblicua.

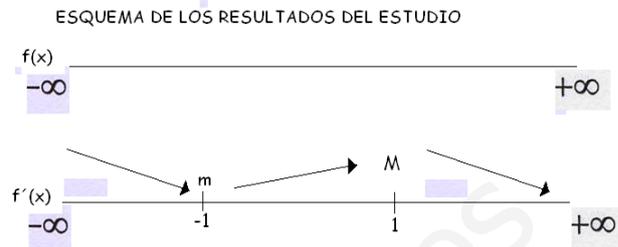
4° Corte con OX: (¿?, 0)

$$0 = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \Rightarrow e^{\frac{2x}{x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{no hay corte con OX}$$

Corte con OY: (0, ¿?)

$$f(0) = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1 \Rightarrow (0,1) \text{ punto de corte con OY}$$

5° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:



Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 + 1)2 - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2 + 1}} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} e^{\frac{2x}{x^2 + 1}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{2x}{x^2 + 1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty, -1)$ $y'(-4) < 0$ decreciente

$\forall x \in (-1, 1)$ $y'(0) > 0$ creciente

$\forall x \in (1, +\infty)$ $y'(4) < 0$ decreciente

$x = -1$; $f(-1) = e^{\frac{-2}{e}} = \frac{1}{e} \approx 0,368 \Rightarrow \left(-1, \frac{1}{e}\right)$. En $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ existe un mínimo relativo.

$x = 1$; $f(1) = e^{\frac{2}{e}} = e \approx 2,72 \Rightarrow (1, e)$, En el $(1, e)$ existe un máximo relativo.

6° Gráfica:

