

Esboza la gráfica de $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ calculando el dominio, asíntotas, monotonía, máximos y mínimos relativos, curvatura y puntos de inflexión

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{0\}$

La función no existe si $x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$

2° Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{0\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} \Rightarrow$$

Cálculo de límites laterales

A) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot \frac{1}{e^{+\infty}} = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ no existe asíntota vertical si $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot (+\infty) \Rightarrow \text{transformamos en } \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{L'Hopital}{=} \frac{\infty}{\infty}$$

B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$

Luego $x=0$ ASÍNTOTA VERTICAL (por la derecha de cero)

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

*A.O. : $y = m x + n$

A) Cuando $x \rightarrow +\infty$

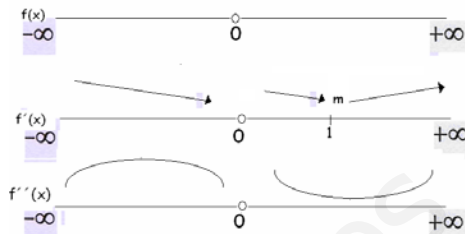
1° Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = e^0 = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x + n \rightarrow n = y - x$

2° Se calcula el "n":

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = +\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{transformamos en } \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{L'hopital}{=} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = e^0 = 1$$

Luego " $y=x+1$ " será una asíntota oblicua en el $+\infty$.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	$Y=x+1$	$Y_1 - Y_2$	Situación
$x=100$	$y_1=101,0050167$	$y_2=101$	$101,0050167 - 101 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$

B) Cuando $x \rightarrow -\infty$

1° Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = e^0 = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x+n \rightarrow n = y - x$

2° Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) \underset{x \text{ por } -x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) = -\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{transformamos en } \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{-1}{x}} \right) \stackrel{L'hopital}{=} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \right) = e^0 = 1$$

Luego " $y=x+1$ " será una asíntota oblicua en el $-\infty$.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	$Y=x+1$	$Y_1 - Y_2$	Situación
$x=-100$	$y_1=-99,0044983$	$y_2=-99$	$-99,0044983 + 99 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

3° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y'=0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \underset{\text{factorizamos}}{=} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$y'=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, 1) \Rightarrow y'(0,5) < 0 \text{ decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$x=1 \quad f(1)=1 \cdot e = e$ En $(1, e)$ existe un mínimo relativo.

5º Curvatura, puntos de inflexión.

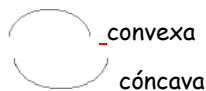
$$y'' = \frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-x+1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{luego nunca se anula la derivada } y''.$$

No hay puntos de inflexión.

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y''(-8) < 0$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y''(1) > 0$$



6º Gráfica:

