

Estudio completo de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

1º Dominio de $f(x)$:

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

La función no existe si

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(x, 0)$

$$0 = 2x^2, x=0; (0, 0)$$

Corte con OY: $(0, y)$

$$f(0) = 0; (0, 0)$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{2x^2}{x^2 - 4} = f(x) \text{ es una función par.}$$

4º Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=2$? o $x=-2$?

A) ¿A.V. en $x=-2$. ?

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{0} \text{ hay que hacer límites laterales} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{+0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{-0} = -\infty \end{cases} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} \text{ No existe}$$

Este límite nos sirve para determinar que $x=-2$ ASÍNTOTA VERTICAL

B) ¿A.V. en $x=2$. ?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{0} \text{ hay que hacer límites laterales} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{8}{+0} = +\infty \end{cases} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} \text{ No existe}$$

Este límite nos sirve para determinar que $x=2$ ASÍNTOTA VERTICAL

*A.H. :

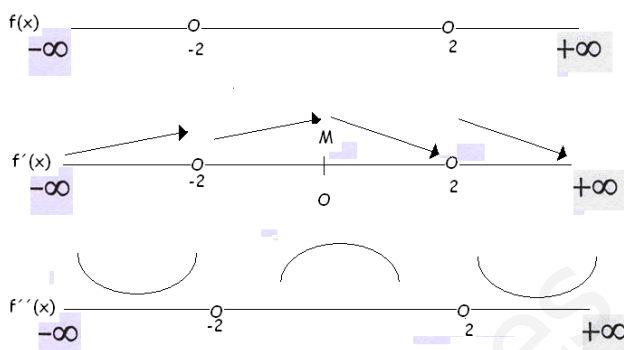
A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$	$y_1 - 2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2 - 4} = 2,00080032$	$2,00080032 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{2(-100)^2}{(-100)^2 - 4} = 2,00080032$	$2,00080032 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



A.O. :No tiene porque tiene asíntota horizontal

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 - 4)(4x) - (2x) \cdot 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y'(-4) > 0 \text{ creciente} \quad \forall x \in (-2, 0) \Rightarrow y'(-1) > 0 \text{ creciente}$$

$$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow y'(1) < 0 \text{ decreciente} \quad \forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0 \text{ decreciente}$$

En (0,0) existe un Máximo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 - 4)^2 \cdot (-16) - (-16x) \cdot 2 \cdot 2x(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} \underset{\text{factorizar}}{=} \frac{(x^2 - 4)(-16x^2 + 64 + 64x^2)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{48x^2 + 64}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 48x^2 + 64 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{3} \text{ no hay solución}$$

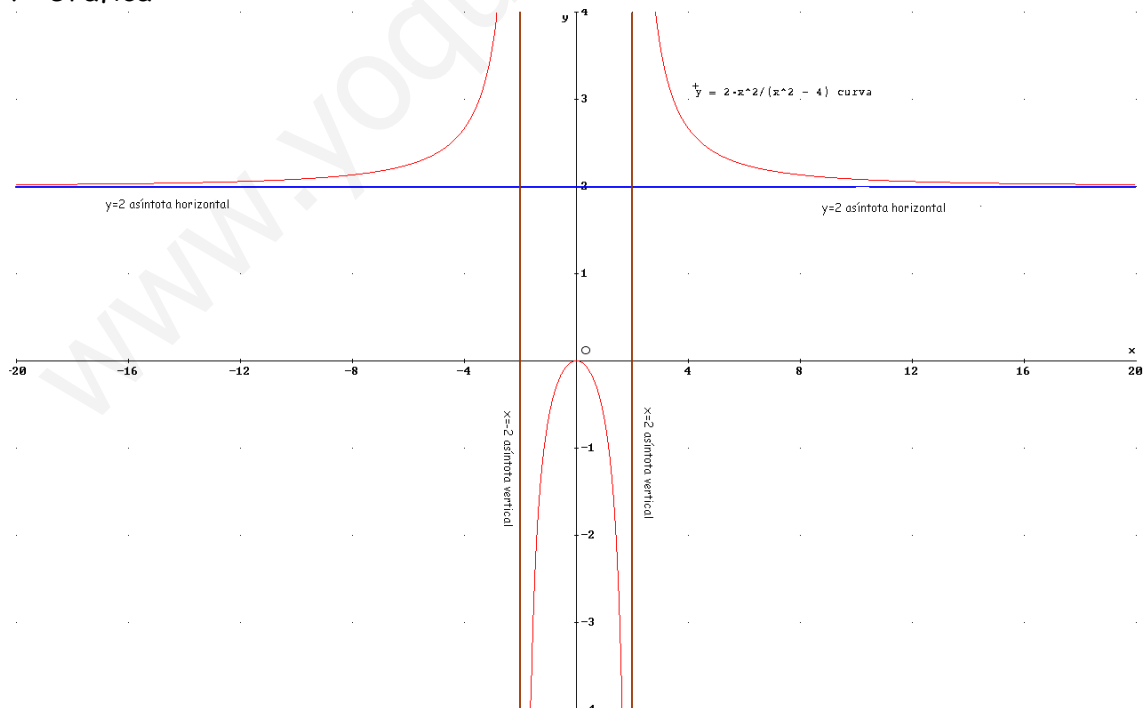
No tiene puntos de inflexión

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y''(-8) > 0 \text{ cóncava}$$

$$\forall x \in (-2, 2) \Rightarrow y''(0) < 0 \text{ convexa}$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \text{ cóncava}$$

7º Gráfica:



Esboza la gráfica de $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$ calculando el dominio, asíntotas, monotonía,

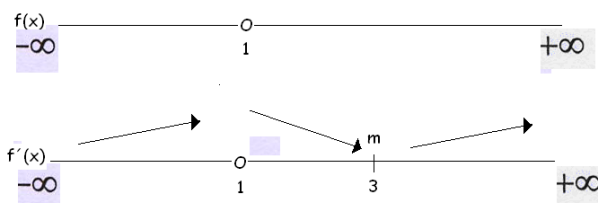
máximos y mínimos relativos.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{1\}$

La función no existe si

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



2º Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{1\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{4}{(x-1)^2} \right) = 1 + \frac{4}{+0} = 1 + \infty = +\infty \quad \text{Este } x=1 \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{(x-1)^2} \right) = +\infty + \frac{4}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty \quad \text{Luego no hay asíntota horizontal.}$$

*A.O. : $y = m x + n$

1º Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{4}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x(x-1)^2} \right) = 1 + \frac{4}{+\infty} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x + n \rightarrow n = y - x$

2º Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Luego " $y=x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$	$y=x$	$y_1 - y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = 100 + \frac{4}{99^2}$	$y_2 = 100$	$100 + \frac{4}{99^2} - 100 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = -100 + \frac{4}{(-101)^2}$	$y_2 = -100$	$-100 + \frac{4}{(-101)^2} - (-100) > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = 1 + \frac{-4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \underset{\text{simplificamos}}{=} 1 + \frac{-8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow (x-1)^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x-1)^3 = 8 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

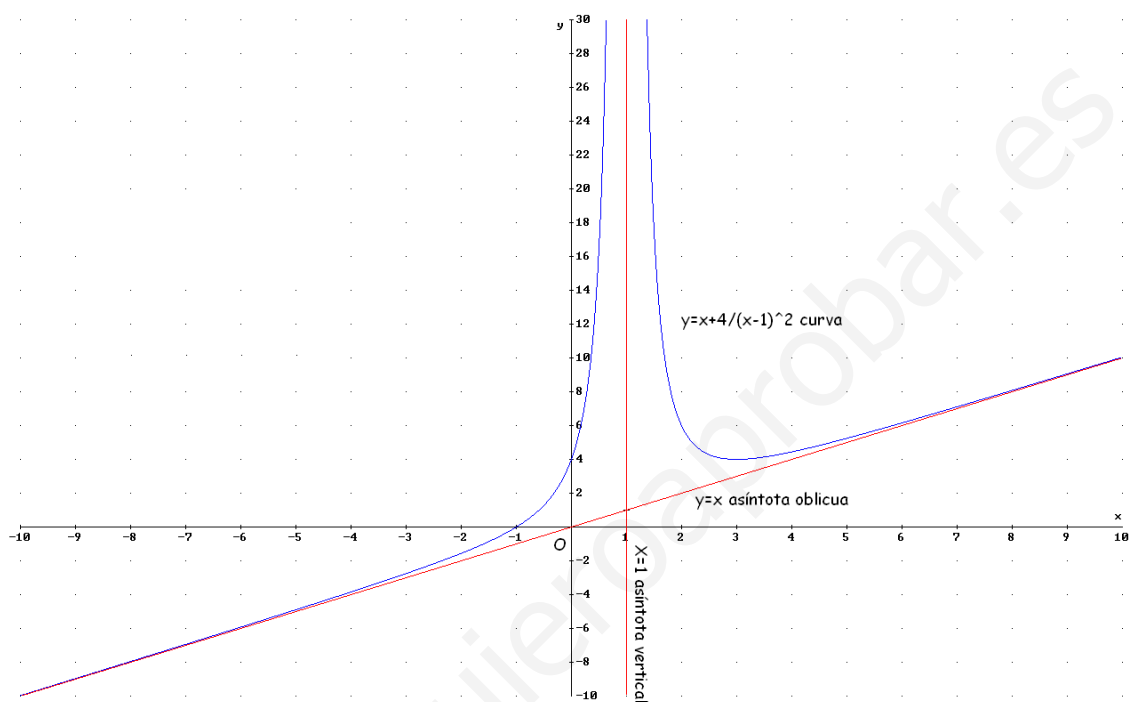
$\forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow y'(-4) > 0$ creciente $\rightarrow$

$\forall x \in (1, 3) \Rightarrow y'(2) < 0$ decreciente $\rightarrow$

$\forall x \in (3, +\infty) \Rightarrow y'(4) > 0$ creciente $\rightarrow$

En (3,4) existe un mínimo relativo.

4º Gráfica:



Estudio completo de $y = \sqrt[3]{x}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Función irracional de índice impar siempre existe.

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\neq, 0)$

$0 = \sqrt[3]{x}$, $x=0$; **$(0,0)$**

Corte con OY: $(0, ?)$

$f(0) = 0$; **$(0,0)$**

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$$

Es una función impar.

Simétrica respecto del origen de coordenadas $(0,0)$.

4º Asíntotas:

***A.V.** : $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Luego no tiene asíntota vertical

***A.H.** : Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\begin{cases} P(x) & \text{polinomio} \\ Q(x) & \text{polinomio} \end{cases}$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O.** : $y = m x + n$

1º Se calcula "m":

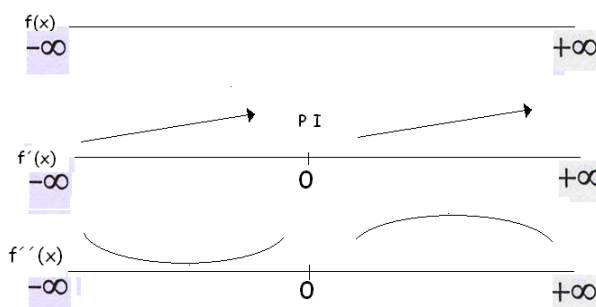
$$- \text{ A) } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \frac{1}{\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

$$- \text{ B) } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{\sqrt[3]{x}}{-x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{-x} = \lim_{\substack{\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{-1}{\frac{2}{x^3}} = \frac{-1}{+\infty} = -0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía de $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$y' = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y' .

Pero y' deja de existir si $\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ y puede haber un cambio de monotonía.

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-15) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

No existen ni máximos ni mínimos relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y'' \neq 0 \Rightarrow -2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y'' .

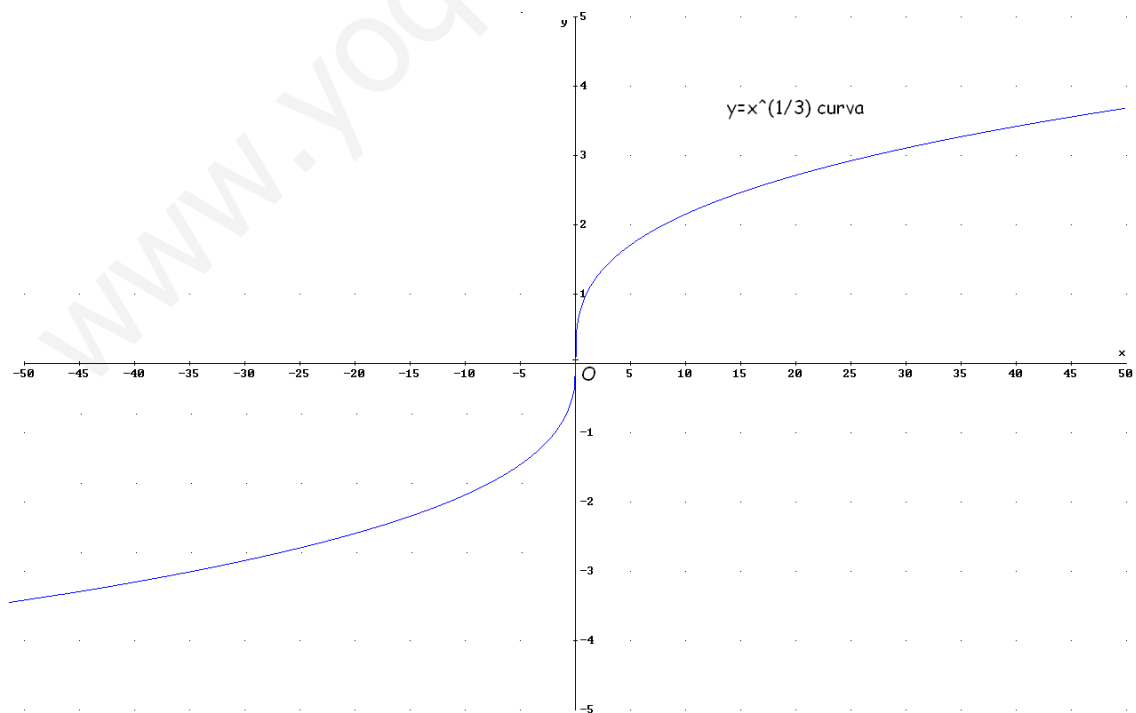
Pero y'' deja de existir si $\sqrt[3]{x^5} = 0 \Rightarrow x = 0$ y podría haber un cambio de curvatura, cosa imposible en este por tener en $x=0$ un mínimo relativo

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y''(-8) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y''(1) < 0 \quad \text{convexa}$$

No hay puntos de inflexión.

7º Gráfica:



Estudio completo de $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\cdot, 0)$

$0 = x^3, x=0; (0,0)$

Corte con OY: $(0, ?)$

$f(0) = 0 ; (0,0)$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 4} = -\frac{x^3}{x^2 + 4} = -f(x) \text{ es una función impar.}$$

4º Asíntotas:

A.V. : No tiene asíntotas verticales $f(x)$ siempre existe.

A.H. : 1º Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

A.O. : A) Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x + n \rightarrow n = y - x$

B) Se calcula el "n":

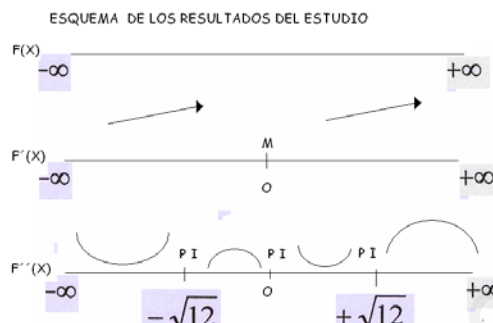
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - 4x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x^2} = -0$$

C) Luego " $y = x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$	$y = x$	$y_1 - y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \frac{100^3}{100^2 + 4} = 99,96001599$	$y_2 = 100$	$99,96001599 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = \frac{(-100)^3}{(-100)^2 + 4} = -99,96001599$	$y_2 = -100$	$-99,96001599 - (-100) > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:



Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 + 4)3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^4 + 12x^2}{(x^2 + 4)^2} \quad y' = 0 \Rightarrow x^4 + 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 12) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 + 12 = 0 \end{cases} \quad x = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 + 4)^2(4x^3 + 24x) - (x^4 + 12x^2)2 \cdot 2x(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{(x^2 + 4)(4x^5 + 16x^3 + 24x^3 + 96x - 4x^5 - 48x^3)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-8x^3 + 96x}{(x^2 + 4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow 8x(-x^2 + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -\sqrt{12}) \Rightarrow y''(-8) > 0 \quad \text{cónica}$$

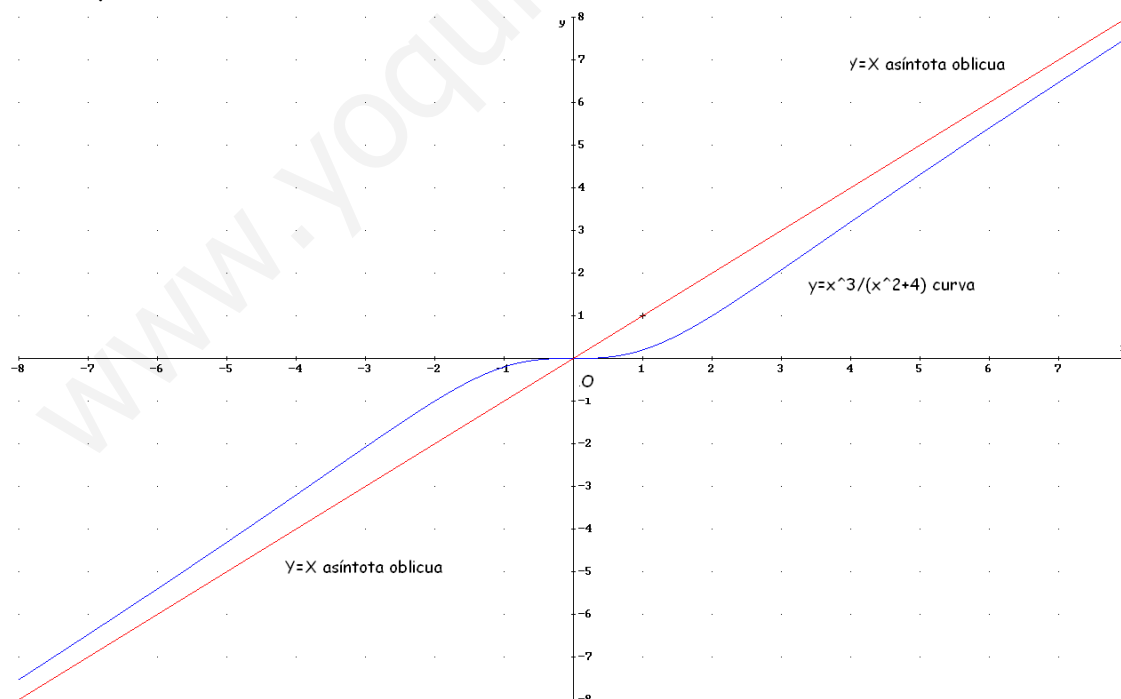
$$\forall x \in (-\sqrt{12}, 0) \Rightarrow y''(-1) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (0, \sqrt{12}) \Rightarrow y''(1) > 0 \quad \text{cónica}$$

$$\forall x \in (\sqrt{12}, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \quad \text{convexa}$$

La función tiene 3 puntos de inflexión : $(0, 0)$; $(-2\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$

7º Gráfica:



Dibujar la gráfica de la función $y = \frac{2x}{x+1}$ indicando dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento, decrecimiento y curvatura.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-1\}$

La función no existe si $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

2ª Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-1\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=-1$?

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0}$$

hay que hacer límites laterales

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{-0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{+0} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1} \text{ No existe}$$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} \stackrel{\text{cambiamos } x \text{ por } -x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{-x+1} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{-1} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

horizontal.

Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x}{x+1}$	$y_1 - 2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{2(100)}{101} = 1,980198$	$1,980198 - 2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{2(-100)}{-100+1} = 2,0202020$	$2,0202020 - 2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

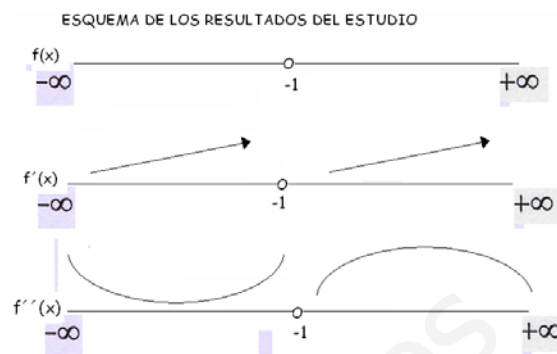
A.O. : No tiene porque tiene asíntota horizontal

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x+1)(2) - (2x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2 = 0 \Rightarrow \text{no existe } 2 \neq 0$$



$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y'(-4) > 0$ creciente $\rightarrow$

$\forall x \in (-1, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0$ decreciente $\rightarrow$

No existe ni máximo ni mínimo relativo.

4º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{0 - 2 \cdot 2(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

simplificar

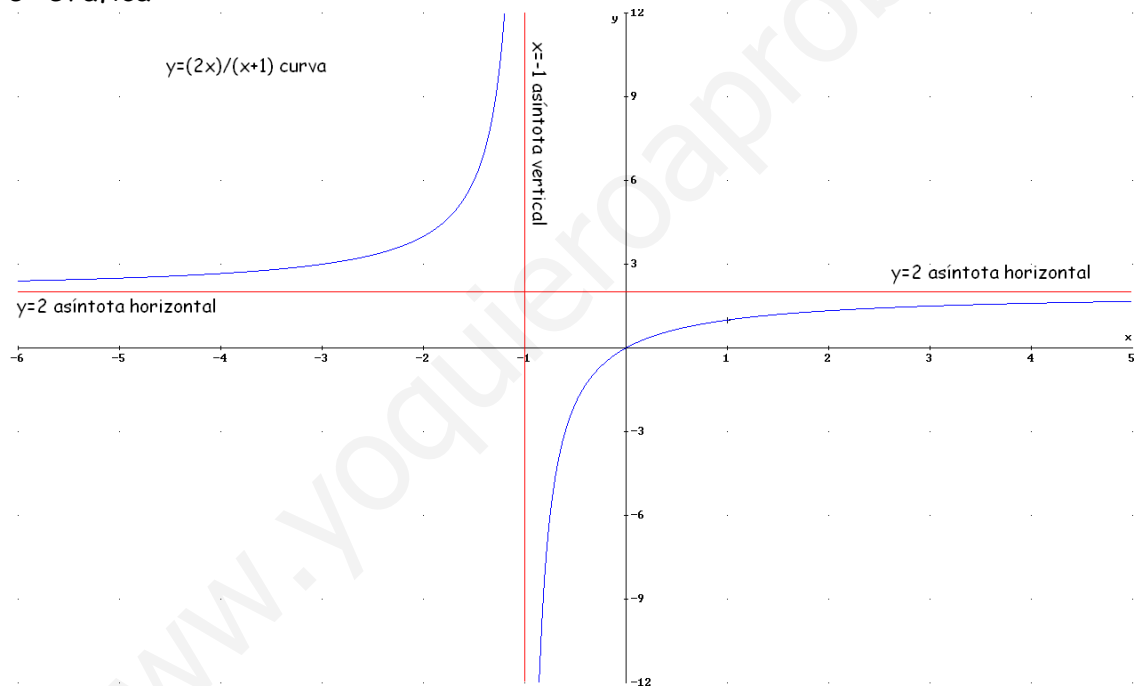
$y'' = 0 \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow$ no hay solución $-4 \neq 0$

No tiene puntos de inflexión

$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y''(-8) > 0$  cóncava

$\forall x \in (-1, +\infty) \Rightarrow y''(8) < 0$  convexa

5º Gráfica:



Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la

función $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

2º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$

para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 + 1)(6x + 1) - (3x^2 + x + 3)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^3 + 6x + x^2 + 1 - 6x^3 - 2x^2 - 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y'(-2) < 0 \quad \text{decreciente}$$

$$\forall x \in (-1, 1) \Rightarrow y'(0) > 0 \quad \text{creciente}$$

$$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0 \quad \text{decreciente}$$

En $x = -1$ hay un mínimo relativo $(-1, 5/2)$

En $x = 1$ hay un Máximo ni mínimo relativo $(1, 7/2)$

3º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 + 1)^2(-2x) - (-x^2 + 1) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)[(x^2 + 1)(-2x) - 4x(-x^2 + 1)]}{(x^2 + 1)^4}$$

factorizar

$$= \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

simplificamos

$$y'' = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa}$$

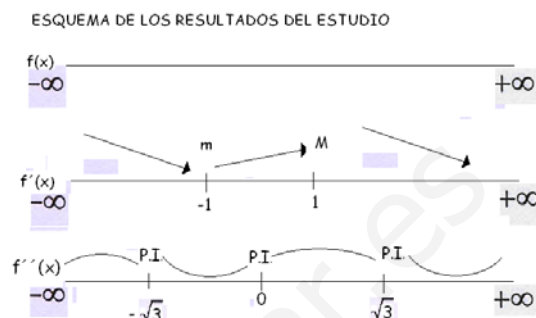
$$\forall x \in (-\sqrt{3}, 0) \Rightarrow y''(-1) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (0, \sqrt{3}) \Rightarrow y''(1) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \quad \text{cóncava}$$

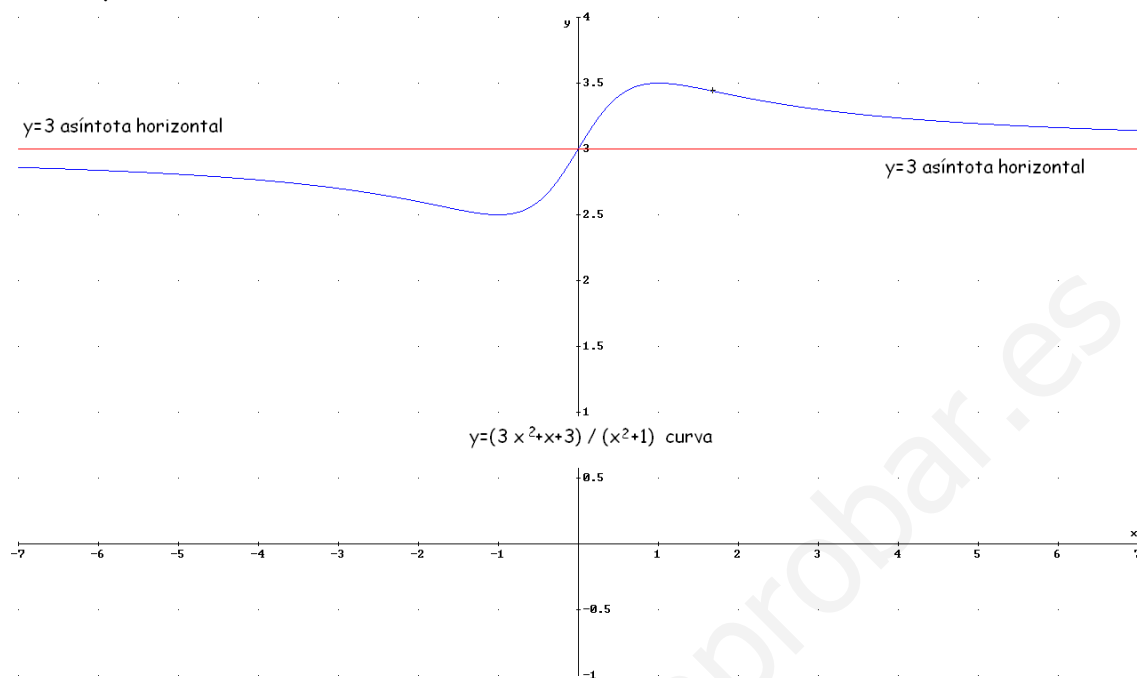
En $(0, 3)$ hay un punto de Inflexión.

En $\left(-\sqrt{3}, \frac{12 - \sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión



En $\left(\sqrt{3}, \frac{12+\sqrt{3}}{4}\right)$ hay un punto de Inflexión

7º Gráfica:



Dada $y = x.e^{2x}$. Dibujar gráfica calculando dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

2° Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x.e^{2x}) = +\infty.e^{+\infty} = +\infty \quad \text{Luego no hay}$$

asíntota horizontal.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x.e^{2x}) = -\infty.e^{-\infty} = -\infty.0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x.e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x}} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2.e^{-2x}} = \frac{1}{-\infty} = -0$$

Asíntota horizontal " $y=0$ " en el $-\infty$; la curva se encuentra por debajo de la asíntota.

*A.O. : $y = m x + n$

Sólo podrá existir en el $+\infty$

A) Cuando $x \rightarrow +\infty$

1° Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x.e^{2x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = e^{+\infty} = +\infty$$

Por lo tanto no existe una asíntota oblicua en el $+\infty$. : curvatura

3° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = e^{2x} + x.2.e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 0 = 1 + 2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

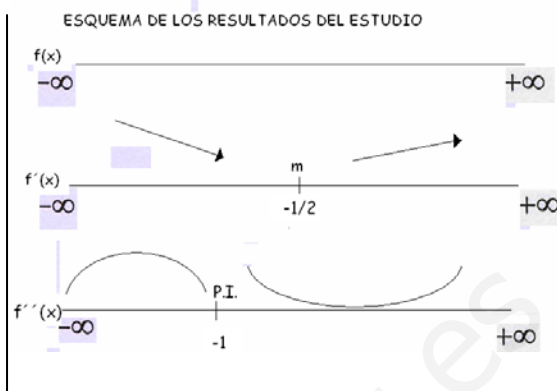
$$\forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \quad y'(-4) < 0 \quad \text{decreciente}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow y'(4) > 0 \quad \text{creciente}$$

$$x = -\frac{1}{2} ; f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2e} \approx -0.1839 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e}\right)$$

En $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e}\right)$ existe un mínimo relativo.

4° Curvatura, puntos de inflexión.



$$y' = 2e^{2x} + (1+2x)2e^{2x} = e^{2x}(4+4x) = 4e^{2x}(x+1)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 4e^{2x}(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

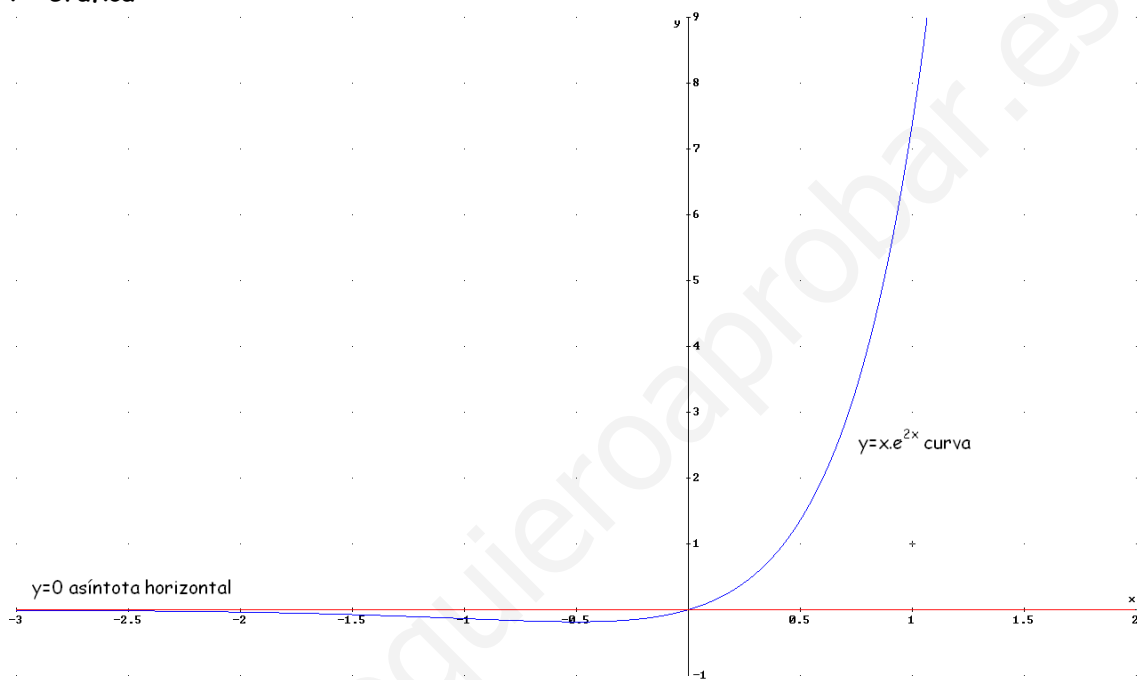
$$\forall x \in (-\infty, -1) \quad y''(-4) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow y'(4) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$x = -1 \quad ; \quad f(-1) = -1.e^{-2} = \frac{-1}{e^2} \approx -0,1353.. \quad \left(-1, \frac{-1}{e^2}\right)$$

Punto de inflexión. $\left(-1, \frac{-1}{e^2}\right)$

7º Gráfica:



Dada la función $f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

Asíntotas y esboza la gráfica.

1° Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si:

$$(1+x^2)^2 = 0 \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \text{ no existe}$$

2° Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{2(1+x^2)2x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $+\infty$. La curva está por debajo de la asíntota.

$$B) \text{ Se calcula el } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \stackrel{\substack{\text{cambiamos} \\ x \text{ por } -x}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{(1+x^2)^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2(1+x^2)2x} = \frac{4}{+\infty} = +0$$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $-\infty$. La curva está por encima de la asíntota.

3° Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y'=0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(1+x^2)^2 \cdot (-4) - (-4x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \stackrel{\text{factorizamos}}{=} \frac{(1+x^2)[-4-4x^2+16x^2]}{(1+x^2)^4} \stackrel{\text{simplificamos}}{=} \frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$$

$$y'=0 \Rightarrow 12x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad y'(-4) > 0 \quad \text{creciente} \quad \rightarrow \quad \forall x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad y'(0) < 0 \quad \text{decreciente} \quad \rightarrow$$

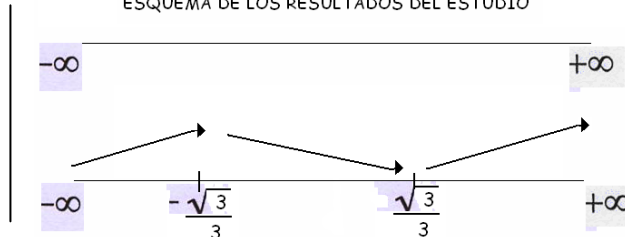
$$\forall x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \quad y'(10) > 0 \quad \text{creciente} \quad \rightarrow$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} ; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \text{En } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ existe un Máximo relativo.}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} ; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{-4\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{-3\sqrt{3}}{4}. \quad \text{En } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ existe un mínimo relativo.}$$

$$\text{Máximos y mínimos globales} \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \\ \text{si } x = \frac{\sqrt{3}}{3} ; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{4} \\ \text{si } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} ; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ \text{si } x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \end{cases}$$

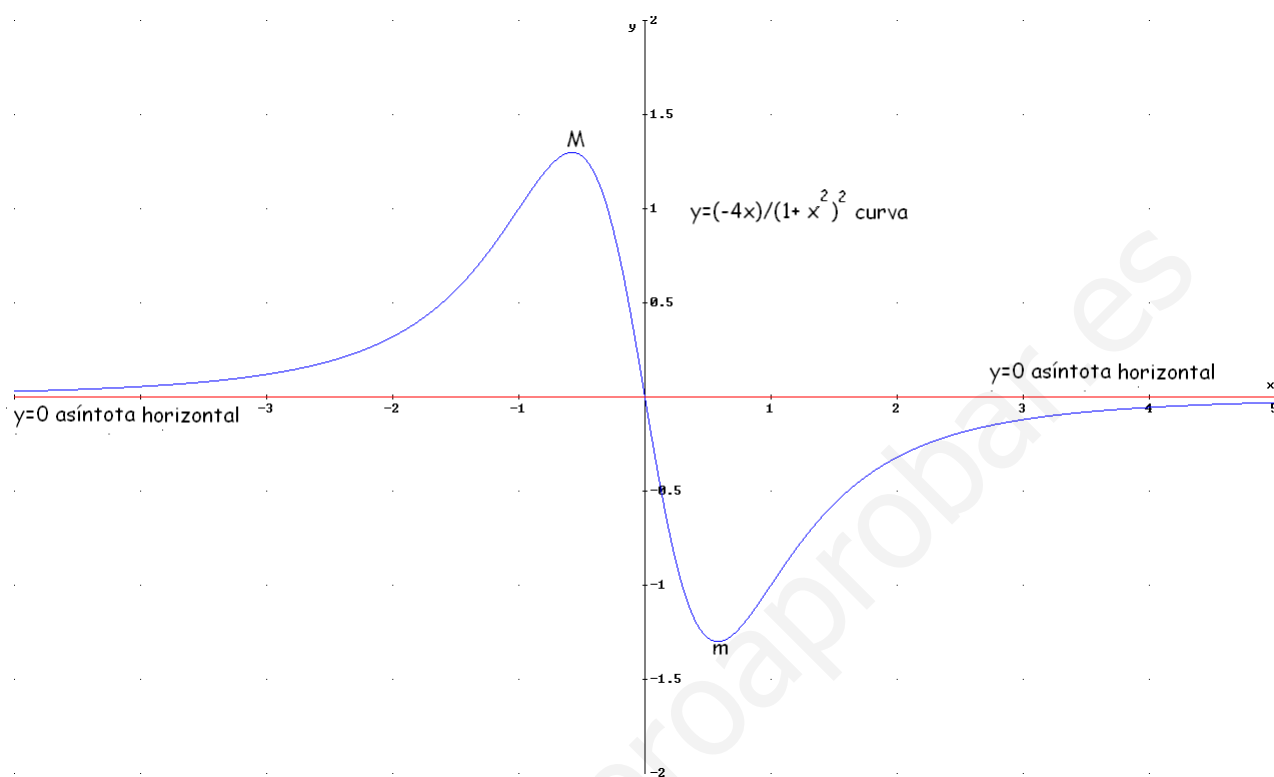
ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



La función tiene un máximo absoluto en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ que es $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

La función tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ que es $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

4º Gráfica:



Dada la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. Calcular sus máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

Asíntotas y esboza la gráfica. (Ejercicio de selectividad y dan como dato los valores de x dónde la función tiene puntos de inflexión) Curvatura estudiada aunque no se pide.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si:

$$(x^2 + x + 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \text{ no existe} \end{cases}$$

2º Asíntotas:

*A.V. : No tiene, la función existe $\forall x \in \mathbb{R}$

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2(x^2+x+1)(2x+1)} = \frac{2}{+\infty} = +0$$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $+\infty$. La curva está por encima de la asíntota.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \stackrel{\text{cambiamos } x \text{ por } -x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2(x^2-x+1)(2x-1)} = \frac{-2}{+\infty} = -0$$

Luego " $y=0$ " asíntota horizontal en el $-\infty$. La curva está por debajo de la asíntota.

3º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2+x+1)^2 \cdot (2) - (2x+1) \cdot 2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4} \stackrel{\text{factorizamos}}{=} \frac{(x^2+x+1)[2(x^2+x+1) - 2(4x^2+4x+1)]}{(x^2+x+1)^4} \stackrel{\text{simplificamos}}{=}$$

$$\frac{2x^2+2x+2-8x^2-8x-2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{-6x^2-6x}{(x^2+x+1)^3}$$

$$y' = 0 \quad -6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow -6x(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1) \quad y'(-4) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

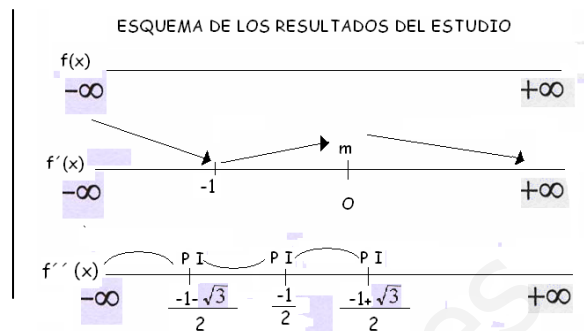
$$\forall x \in (-1, 0) \quad y'(-0.5) > 0 \quad \text{creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad y'(10) < 0 \quad \text{decreciente} \rightarrow$$

$$x = 0 \quad ; f(0) = \frac{1}{(1)^2} = 1. \text{ En } (0, 1) \text{ existe un Máximo relativo relativo.}$$

$$x = -1 \quad ; f(-1) = \frac{-1}{(1-1+1)^2} = -1. \quad \text{En } (-1, -1) \text{ existe un mínimo relativo relativo.}$$

4º Curvatura, puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{(x^2 + x + 1)^3(-12x - 6) - (-6x^2 - 6x)3(x^2 + x + 1)^2(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^6} \quad \text{factorizamos}$$

$$\frac{(x^2 + x + 1)^2(2x + 1)[(x^2 + x + 1)(-6) - (-6x^2 - 6x)3]}{(x^2 + x + 1)^6} \quad \text{simplificamos}$$

$$\frac{(2x + 1)(-6x^2 - 6x - 6 + 18x^2 + 18x)}{(x^2 + x + 1)^4} = \frac{(2x + 1)(12x^2 + 12x - 6)}{(x^2 + x + 1)^4}$$

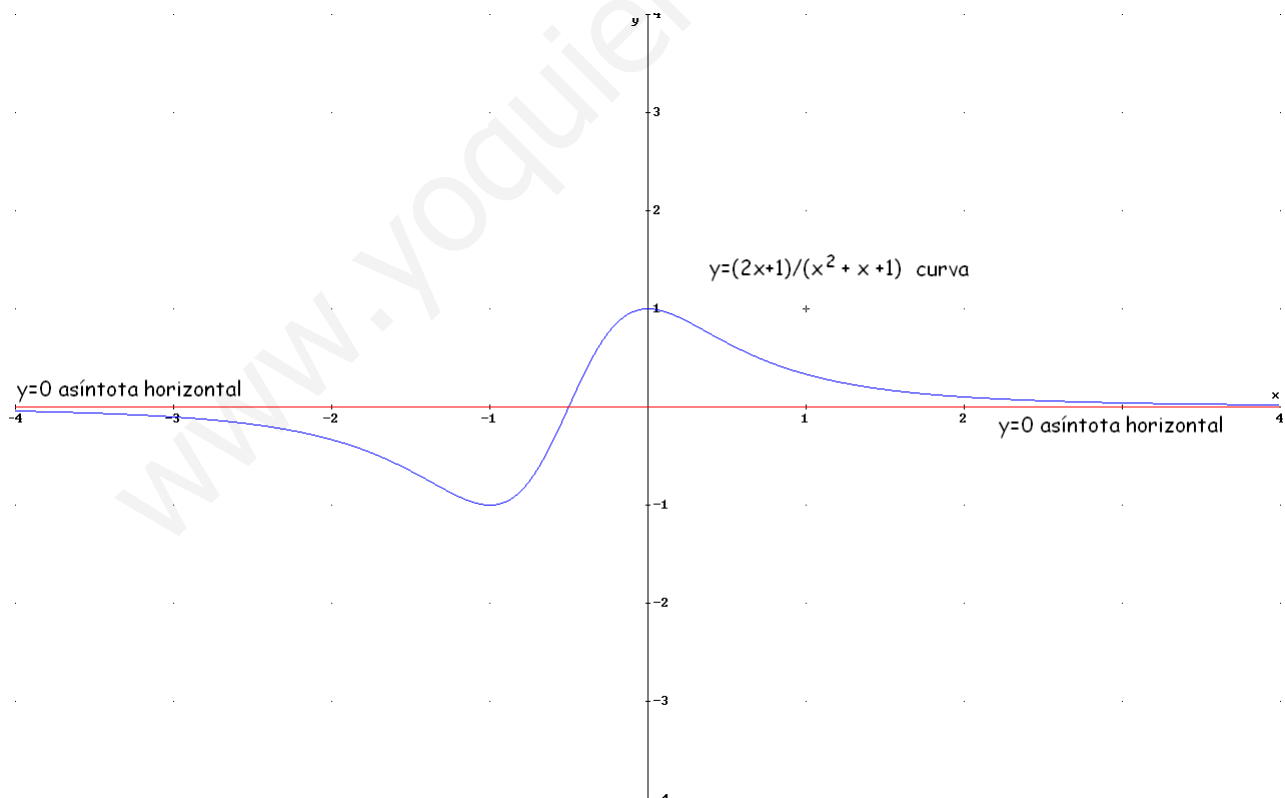
$$y'' = 0 \Rightarrow (2x + 1)(12x^2 + 12x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ 12x^2 + 12x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall x \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \quad y''(-4) < 0 \quad \text{convexa} \quad \forall x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad y''(-1) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \quad y''(0) < 0 \quad \text{convexa} \quad \forall x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty\right) \quad y''(0) < 0 \quad \text{cóncava}$$

Puntos de inflexión en $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ y en $x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

4º Gráfica:



Estudio completo de $y = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$

1º Dominio de f(x): $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función no existe si

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \text{ no tiene solución}$$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(0,0)$

$$0 = 2x^2, x=0; \quad (0,0)$$

Corte con OY: $(0,?)$

$$f(0) = 0 \quad ; \quad (0,0)$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 + 4} = \frac{2x^2}{x^2 + 4} = f(x) \text{ es una función par.}$$

4º Asíntotas:

***A.V. :** No tiene la función siempre existe

***A.H. :**

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \text{ Luego "y=2" será una asíntota horizontal.}$$

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$	$y_1 - 2$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2 + 4} = 1,99920032$	$1,99992003 - 2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{2(100)^2}{(100)^2 + 4} = 1,99920032$	$1,99992003 - 2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

A.O. : No tiene porque tiene asíntota horizontal

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 + 4)(4x) - (2x) \cdot 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4x^3 + 16x - 4x^3}{(x^2 + 4)^2} = \frac{+16x}{(x^2 + 4)^2}$$

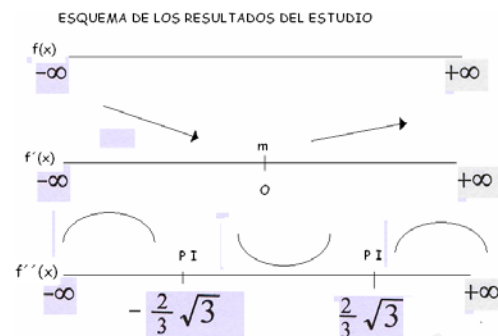
$$y' = 0 \Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-4) < 0 \quad \text{decreciente}$$

$$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(4) > 0 \quad \text{creciente}$$

En (0,0) existe un mínimo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{(x^2 + 4)^2 \cdot (16) - (16x) \cdot 2 \cdot 2x(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} \underset{\text{factorizar}}{=} \frac{(x^2 + 4)(16x^2 + 64 - 64x^2)}{(x^2 + 4)^4} = \frac{-48x^2 + 64}{(x^2 + 4)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -48x^2 + 64 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \begin{cases} x = \frac{-2}{3}\sqrt{3} \\ x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

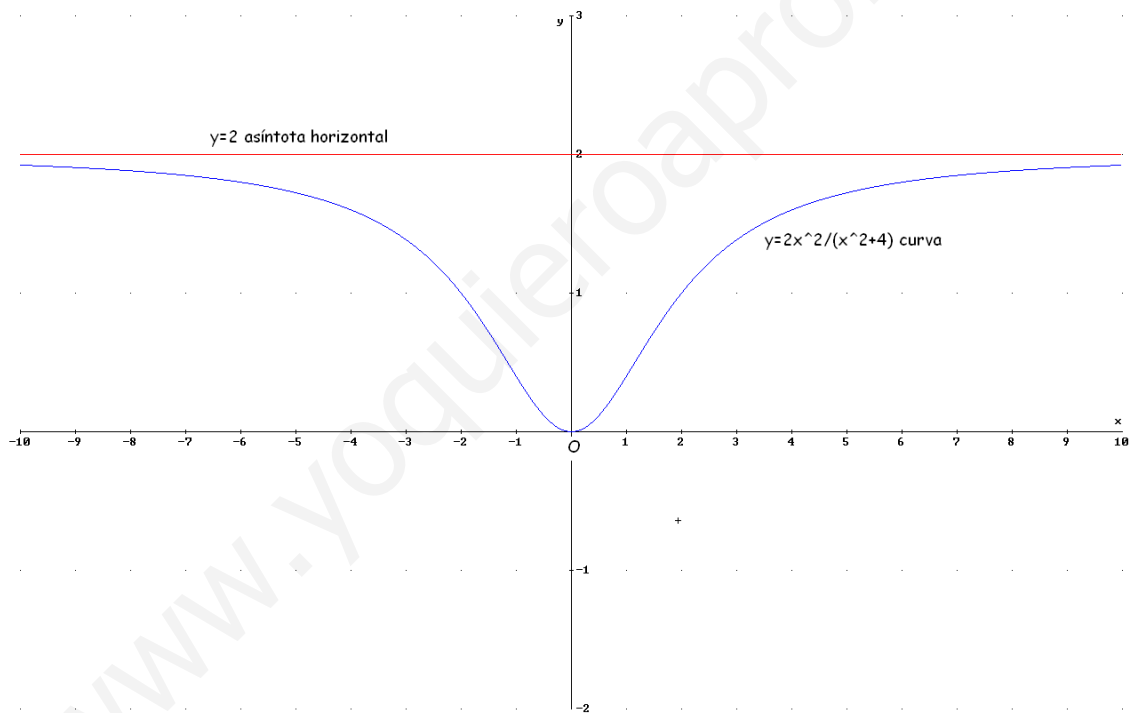
$$\forall x \in \left(-\infty, \frac{-2}{3}\sqrt{3}\right) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in \left(\frac{-2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \Rightarrow y''(0) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, +\infty\right) \Rightarrow y''(8) < 0 \quad \text{convexa}$$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{-2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

7º Gráfica:



Estudio completo de $y = \frac{1-x}{x^2}$

1º Dominio de $f(x)$:

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{0\}$$

La función no existe si

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(1,0)$

$$0 = 1 - x, x = 1; (1,0)$$

Corte con OY: $(0,?)$

No corta al OY en $x=0$ no existe.

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{1-(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+x}{x^2} \Rightarrow \text{No hay simetría}$$

4º Asíntotas:

*A.V. : $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{0\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=0$?

¿A.V. en $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Este límite nos sirve para determinar que $x=0$ es ASÍNTOTA VERTICAL

*A.H. :

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = -0$$

Luego " $y=0$ " será una ASÍNTOTA HORIZONTAL.

B) Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

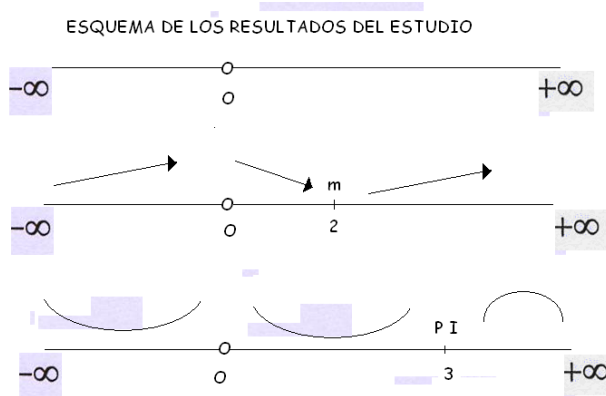
	$y = \frac{1-x}{x^2}$	$y_1 - 0$	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
$x=100$	$y = \frac{-99}{(100)^2} = -0,0099$	$-0,0099 - 0 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y = \frac{101}{(-100)^2} = 0,0101$	$0,0101 - 0 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

A.O. : No tiene porque tiene asíntota horizontal

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{x^2 \cdot (-1) - (1-x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} = \frac{x^2 - 2x}{x^4} \underset{\text{simplificamos}}{=} \frac{x-2}{x^3}$$



$$y' = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow y'(1) < 0 \text{ decreciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(4) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

En $(2, \frac{-1}{4})$ existe un mínimo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{x^3 \cdot 1 - (x-2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{(x^2)(x-3x+6)}{x^6} = \frac{-2x+6}{x^4}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

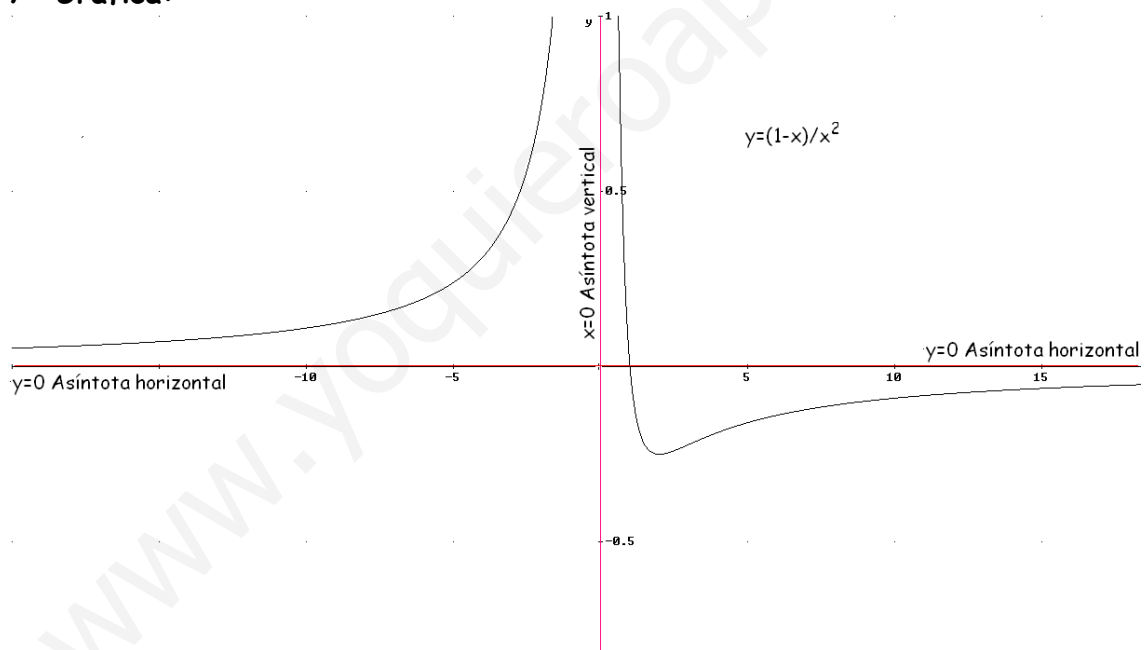
$$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y''(-8) > 0 \text{ cóncava}$$

$$\forall x \in (0, 3) \Rightarrow y''(1) > 0 \text{ cóncava}$$

$$\forall x \in (3, +\infty) \Rightarrow y''(8) < 0 \text{ convexa}$$

En $(3, -2/9)$ hay un punto de inflexión.

7º Gráfica:



Estudio completo de $y = \sqrt[3]{x^2}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\neq, 0)$

$0 = \sqrt[3]{x^2}, x=0; (0,0)$

Corte con OY: $(0,?)$

$f(0) = 0; (0,0)$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V. :** $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Luego no tiene asíntota vertical

***AH. :** Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ polinomio} \\ Q(x) \text{ polinomio} \end{array} \right.$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O.:** $y = mx + n$

1º Se calcula "m":

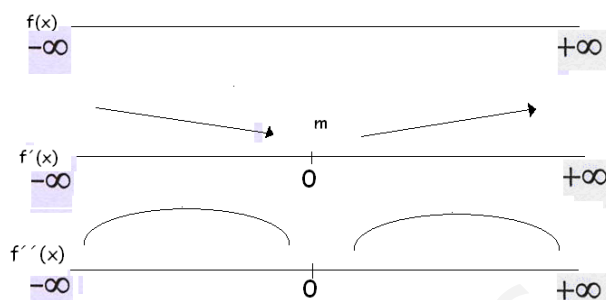
$$- \text{ A) } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{\frac{\infty}{\infty}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

$$- \text{ B) } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{\frac{\infty}{-\infty}} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{\frac{\infty}{-\infty}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-1}{+\infty} = -0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2)^2}} = \frac{2x}{3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$y' = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y' .

Pero y' deja de existir si $\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ y puede haber un cambio de monotonía.

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y'(-15) < 0$ decreciente

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0$ creciente

En (0,0) existe un mínimo relativo (En este caso es un punto anguloso, $y'(0)$ no existe).

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = \frac{-2}{9 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$y'' = 0 \Rightarrow -2 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y'' .

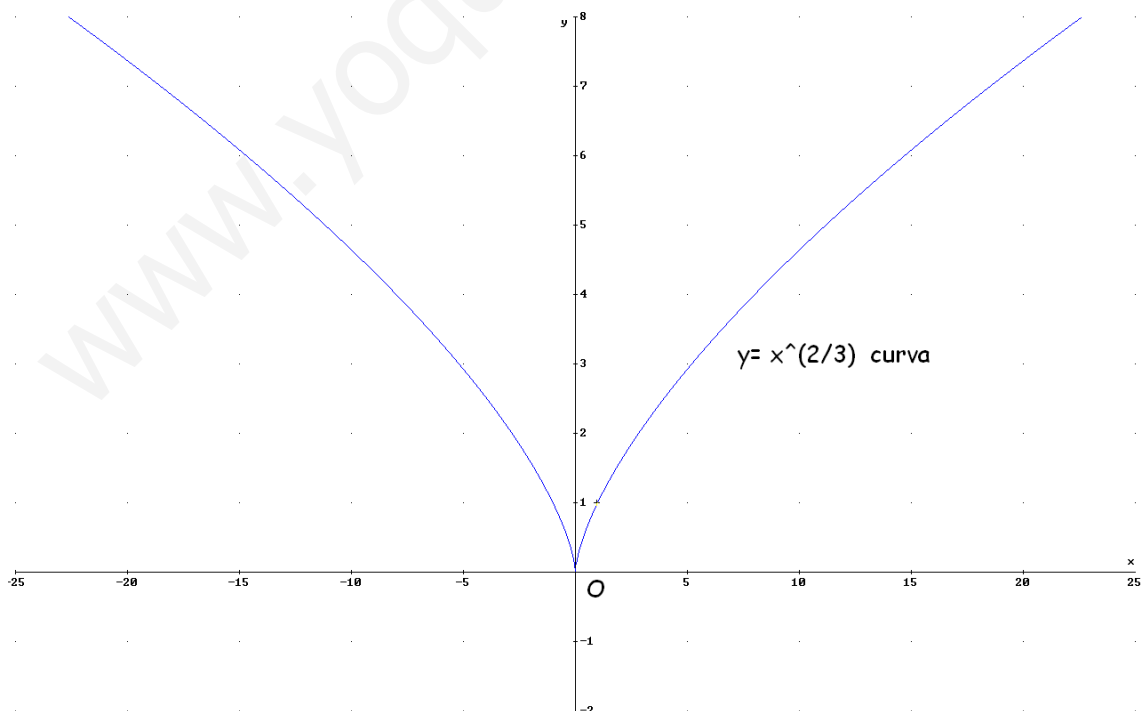
Pero y'' deja de existir si $x \cdot \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ y podría haber un cambio de curvatura, cosa imposible en este por tener en $x=0$ un mínimo relativo

$\forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow y''(-8) < 0$ convexa

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow y''(1) < 0$ convexa

No hay puntos de inflexión.

7º Gráfica:



Estudio completo de $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\pm 2, 0)$

$$0 = \sqrt[3]{x^2 - 4}, \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \Rightarrow (2, 0) \\ x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \end{cases}$$

Corte con OY: $(0, \pm 2)$

$$f(0) = \sqrt[3]{-4} \quad ; \quad (0, \sqrt[3]{-4})$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 - 4} = \sqrt[3]{x^2 - 4} = f(x)$$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V. :** $D[f(x)] = \mathbb{R}$

Luego no tiene asíntota vertical

***A.H. :** Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\begin{cases} P(x) & \text{polinomio} \\ Q(x) & \text{polinomio} \end{cases}$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{Luego no hay asíntota horizontal.}$$

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O.:** $y = m x + n$

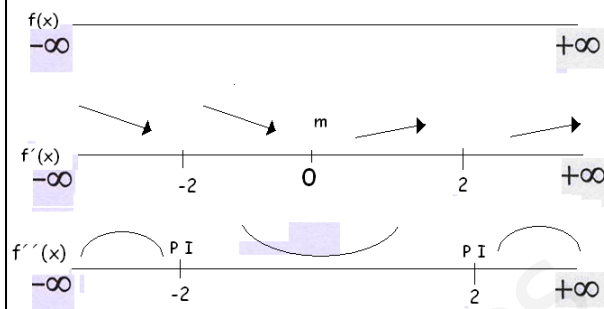
1º Se calcula "m":

$$- \text{ A) } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

$$- \text{ B) } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{-\infty} = -0$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



+ ∞ ←

No hay asíntota oblicua pero la curvatura será

5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía $y' = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \text{si } x = 0$$

Pero y' deja de existir si $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = -2$ y puede haber un cambio de monotonía.

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y'(-15) < 0 \quad \text{decreciente} \quad \swarrow$$

$$\forall x \in (-2, 0) \Rightarrow y'(-1) < 0 \quad \text{decreciente} \quad \swarrow$$

$$\forall x \in (0, 2) \Rightarrow y'(1) > 0 \quad \text{creciente} \quad \searrow$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0 \quad \text{creciente} \quad \searrow$$

En $(0, \sqrt[3]{-4})$ existe un mínimo relativo (En este caso es un punto anguloso, $y'(0)$ no existe).

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2} - x \cdot \frac{2(x^2 - 4)2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}}}{\sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^6} - 4x^2(x^2 - 4)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot (x^2 - 4)^2 - 4x^2(x^2 - 4)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4)^8}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x^2 - 4)(3x^2 - 12 - 4x^2)}{(x^2 - 4)^2 \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} =$$

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{[-12 - x^2]}{(x^2 - 4) \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y'' \neq 0 \quad -x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = -12 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \quad \text{luego nunca se anula la derivada } y''.$$

Pero y'' deja de existir si $(x^2 - 4) \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ y podría haber un cambio de curvatura.

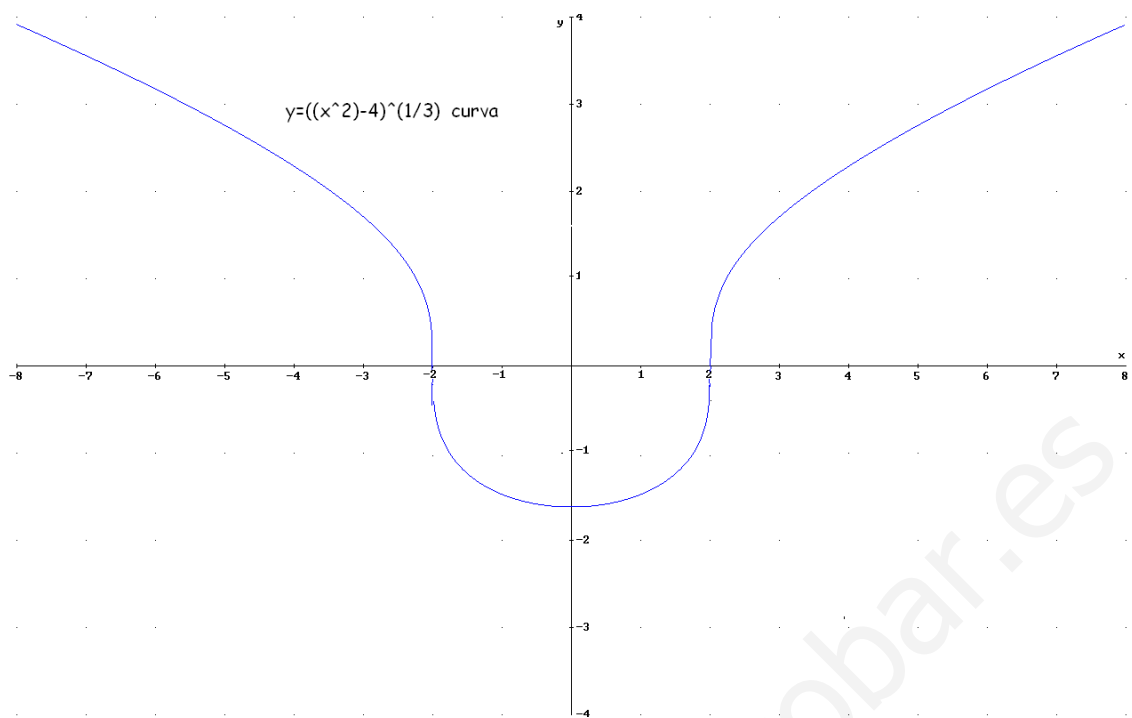
$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa} \quad \text{⌒}$$

$$\forall x \in (-2, 2) \Rightarrow y''(0) < 0 \quad \text{cóncava} \quad \text{⌒}$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y''(8) < 0 \quad \text{convexa} \quad \text{⌒}$$

Puntos de inflexión en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

7º Gráfica:



Estudio completo de $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R}$

La función existe si $x^2 - 4 > 0$

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow x^2 - 4 > 0$$

$$\forall x \in (-2, 2) \Rightarrow x^2 - 4 < 0$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow x^2 - 4 > 0$$

Luego existe $\forall x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - (2, 2)$$

2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\pm 2, 0)$

$$0 = \sqrt{x^2 - 4}, \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \Rightarrow (2, 0) \\ x = -2 \Rightarrow (-2, 0) \end{cases}$$

Corte con OY: $(0, ?)$

$$f(0) = \sqrt{-4} \quad \text{no existe, no corta el OY.}$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$$

Es una función par.

Simétrica respecto del eje OY.

4º Asíntotas:

***A.V. :** Existe $\forall x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, dónde toma valores reales.

Luego no tiene asíntota vertical

***A.H. :** Por no ser una función del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\begin{cases} P(x) & \text{polinomio} \\ Q(x) & \text{polinomio} \end{cases}$ hay que

calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{Luego no hay asíntota horizontal.}$$

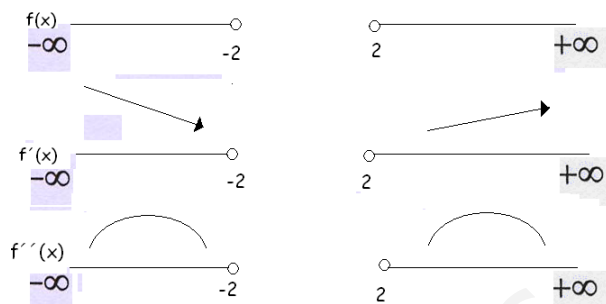
B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty \quad \text{Luego no hay asíntota horizontal.}$$

***A.O**

A) cuando $x \rightarrow +\infty$.

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



1º Se calcula "m" :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ \infty}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = x + n \rightarrow n = y - x$

2º Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) = \lim_{\infty - \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego " $y=x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \sqrt{x^2 - 4}$	$Y=x$	$Y_1 - Y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \sqrt{100^2 - 4} = 99,979998$	$y_2 = 100$	$99,979998 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)

B) cuando $x \rightarrow -\infty$.

1º Se calcula "m" :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{\substack{\infty \\ -\infty}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{-x} = \lim_{\substack{\infty \\ -\infty}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = -x + n \rightarrow n = y + x$

2º Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4} + x) = \lim_{\infty + \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} + x)(\sqrt{x^2 - 4} - x)}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{+\infty} = -0$$

Luego " $y=-x$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \sqrt{x^2 - 4}$	$Y=-x$	$Y_1 - Y_2$	situación
$x=-100$	$y_1 = \sqrt{(-100)^2 - 9} = 99,979998$	$y_2 = +100$	$99,979998 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$

5º Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía $y' = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

$y' = 0 \Rightarrow$ si $x = 0 \notin$ Dominio de $f(x)$

Pero y' deja de existir si $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = -2$ y no puede haber un cambio de monotonía, porque no existe a la derecha de $x = -2$, ni a la izquierda de $x = 2$.

$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y'(-15) < 0$ decreciente

$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(15) > 0$ creciente

No hay ni máximos ni mínimos. Relativos.

6º Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2 - 4} - x \cdot \frac{.2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 4}}}{\sqrt{(x^2 - 4)^2}} = \frac{x^2 - 4 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y'' \neq 0 \Rightarrow -4 \neq 0$ luego nunca se anula la derivada y'' .

Pero y'' deja de existir si $(x^2 - 4)\sqrt{(x^2 - 4)} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ pero en estos puntos

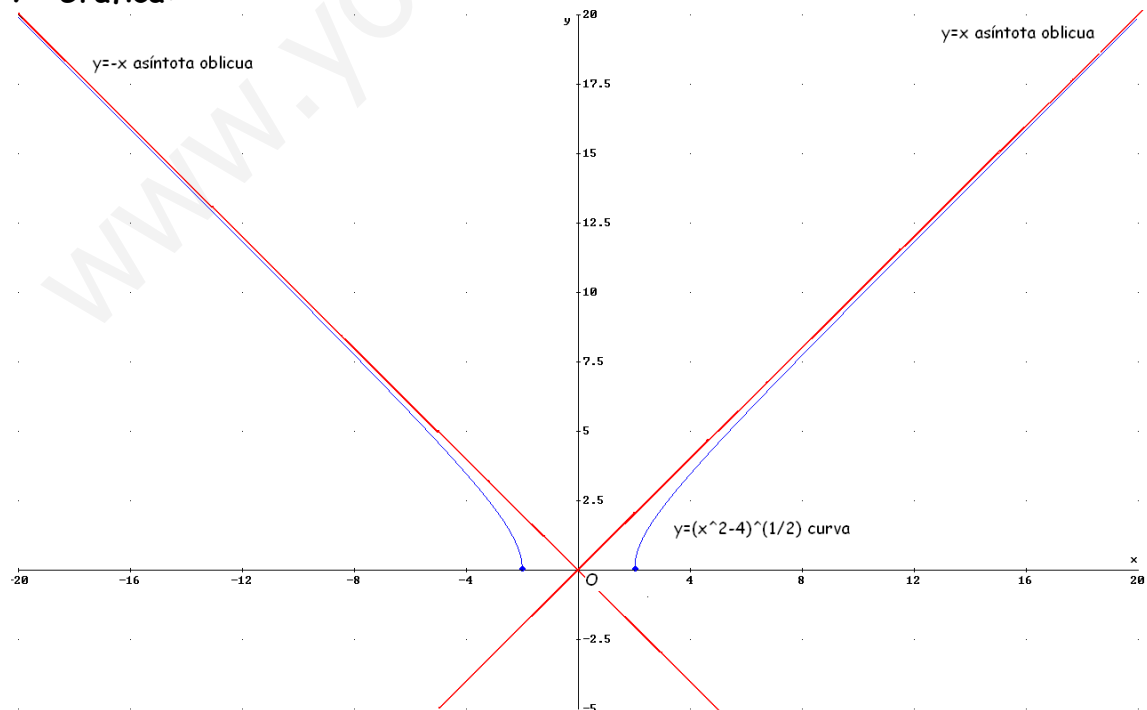
no puede haber un cambio de curvatura porque no existe a la derecha de $x = -2$, ni a la izquierda de $x = 2$.

$\forall x \in (-\infty, -2) \Rightarrow y''(-8) < 0$ convexa

$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y''(8) < 0$ convexa

Puntos de inflexión no tiene.

7º Gráfica:



www.yoquieroaprobar.es

Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

1º Dominio de $f(x)$: $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{2\}$

La función no existe si

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

2ª Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\quad, 0)$

$0=1$, imposible no corta al OX

Corte con OY: $(0, \quad)$

$$f(0) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} ; (0, 1/4)$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x-2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases} \text{ No hay simetrías.}$$

4º Asíntotas:

***A.V. :** $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{2\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x=2$?

¿ A.V. en $x=2$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty \Rightarrow y = 2, \text{ asíntota vertical}$$

***A.H. :**

A) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{+\infty} = +0 \text{ Luego "y=+0" será una asíntota horizontal, y la curva está}$$

por encima de la asíntota.

B) Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{+\infty} = +0 \text{ Luego "y=+0" será una asíntota horizontal, y la curva está}$$

por encima de la asíntota.

A.O. : No tiene porque tiene asíntotas horizontales

5º Monotonía, Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{0 - (1) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-2(x-2)}{(x-2)^4} \stackrel{\text{simplificamos}}{=} \frac{-2}{(x-2)^3}$$

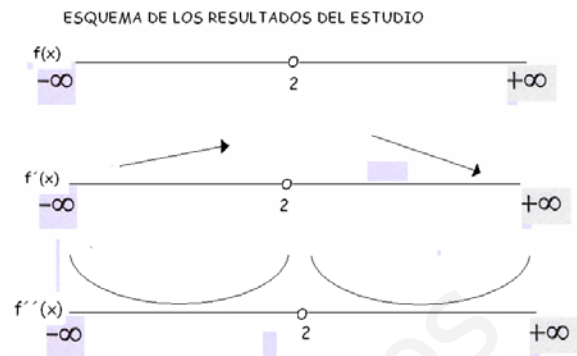
$$y' = 0 \Rightarrow -2 = 0 \Rightarrow \text{imposible } -2 \neq 0$$

$$\forall x \in (-\infty, 2) \Rightarrow y'(0) > 0 \text{ creciente} \rightarrow$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y'(4) < 0 \text{ decreciente} \rightarrow$$

No existe ni Máximo ni mínimo relativo.

6º Curvatura, puntos de inflexión.



$$y'' = \frac{0 - (-2) \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{-6(x-2)^2}{(x-2)^6} \underset{\text{factorizar}}{=} \frac{-6(x-2)^2}{(x-2)^6} \underset{\text{simplificamos}}{=} \frac{-6}{(x-2)^4}$$

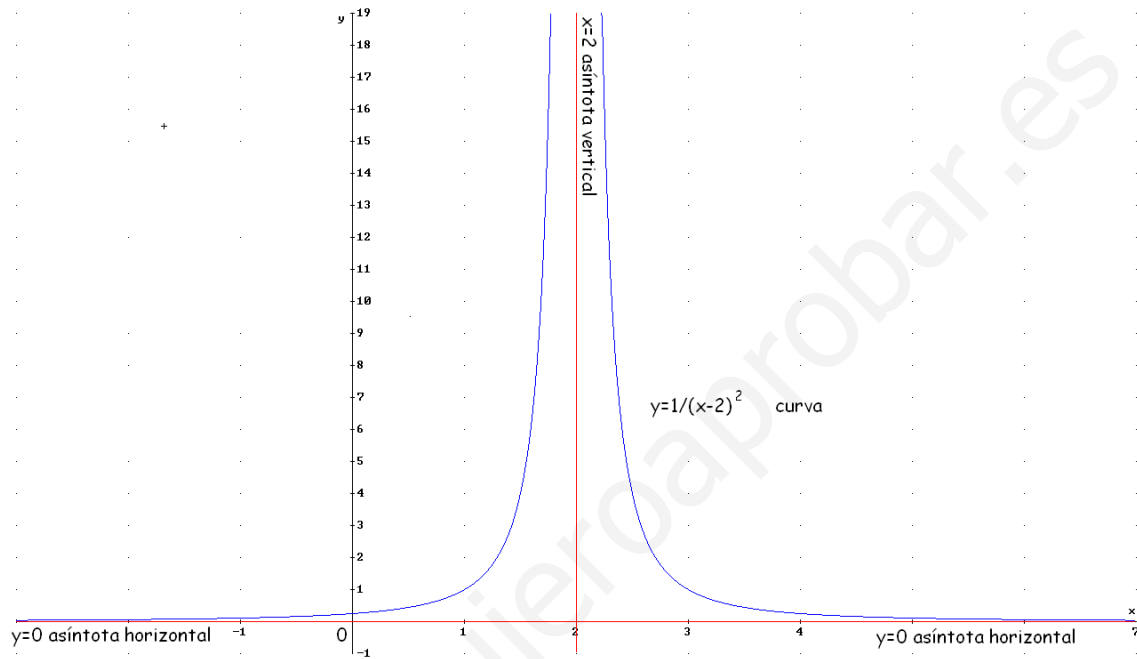
$$y'' = 0 \Rightarrow -6 = 0 \Rightarrow \text{no hay solución } -6 \neq 0$$

No tiene puntos de inflexión

$$\forall x \in (-\infty, 2) \Rightarrow y''(-8) > 0 \quad \text{c\u00f3ncava}$$

$$\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \quad \text{c\u00f3ncava}$$

7º Gr\u00e1fica:



Estudio completo de $y = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$.

1º Dominio de $f(x)$:

$$D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

La función no existe si

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$$

2º Cortes con los ejes:

Corte con OX: $(\cdot, 0)$

$$0 = 2x^3, x=0; (0, 0)$$

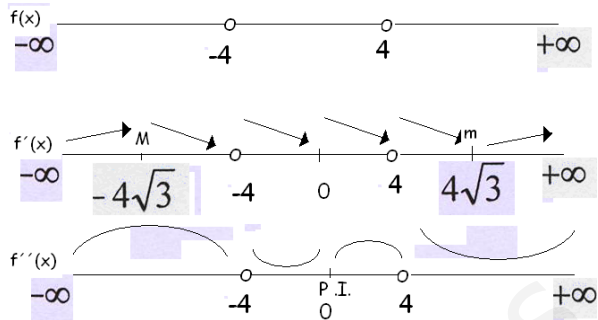
Corte con OY: $(0, ?)$

$$f(0) = 0; (0, 0)$$

3º Simetrías:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 16} = \frac{-2x^3}{x^2 - 16} = -f(x) \text{ es una función impar. Simétrica respecto del } (0, 0).$$

ESQUEMA DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO



4º Asíntotas:

*A.V.: $D[f(x)] = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: $x = -4$? O $x = 4$?

$$\text{A) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{-128}{0} \text{ hay que hacer límites laterales } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{-128}{+0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{-128}{-0} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} \text{ No existe}$$

$x = -4$ ASÍNTOTA VERTICAL

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{128}{0} \text{ hay que hacer límites laterales } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{128}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^3}{x^2 - 16} = \frac{128}{+0} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3}{x^2 - 16} \text{ No existe}$$

$x = 4$ ASÍNTOTA VERTICAL

*A.H.:

Se calcula el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 16} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ Luego no hay asíntota horizontal.}$$

*A.O.: $y = mx + n$

1º Se calcula "m":

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2 - 16}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^3 - 16x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^3 - 16x} \right) = 2$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = 2x + n \rightarrow n = y - 2x$

2° Se calcula el "n":

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 16} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 32x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{32x}{x^2 - 16} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{32x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{32}{x} = \frac{32}{+\infty} = 0$$

Luego "y= 2x" será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$	$Y=2x$	$Y_1 - Y_2$	situación
$x=100$	$y_1 = \frac{2(100)^3}{(100)^2 - 16} = 200,1602564$	$y_2 = 200$	$200,1602564 - 200 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
$x=-100$	$y_1 = \frac{2(-100)^3}{(100)^2 - 16} = -200,1602564$	$y_2 = -200$	$-200,1602564 + 200 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

5° Monotonía. Máximos y mínimos relativos:

Calculamos $y' = 0$ para estudiar el cambio de monotonía

$$y' = \frac{(x^2 - 16)6x^2 - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{6x^4 - 96x^2 - 4x^4}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^4 - 96x^2}{(x^2 - 16)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^4 - 96x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x^2 - 48) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4\sqrt{3} \\ x = -4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\infty, -4\sqrt{3}) &\Rightarrow y'(-15) > 0 && \text{creciente} \rightarrow \\ \forall x \in (-4\sqrt{3}, -4) &\Rightarrow y'(-5) < 0 && \text{decreciente} \rightarrow \\ \forall x \in (-4, 0) &\Rightarrow y'(-1) < 0 && \text{decreciente} \rightarrow \\ \forall x \in (0, 4) &\Rightarrow y'(1) < 0 && \text{decreciente} \rightarrow \\ \forall x \in (4, 4\sqrt{3}) &\Rightarrow y'(5) < 0 && \text{decreciente} \rightarrow \\ \forall x \in (4\sqrt{3}, +\infty) &\Rightarrow y'(15) > 0 && \text{creciente} \rightarrow \end{aligned}$$

En $(-4\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ existe un máximo relativo.

En $(4\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ existe un mínimo relativo.

6° Curvatura, puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{(x^2 - 16)^2 (8x^3 - 192x) - (2x^4 - 96x^2) \cdot 2 \cdot 2x(x^2 - 16)}{(x^2 - 16)^4} = \frac{(x^2 - 16)^2 (8x^5 - 128x^3 - 192x^3 + 3072x - 8x^5 + 384x^3)}{(x^2 - 16)^4} = \frac{64x^3 + 3072x}{(x^2 - 16)^3} = \frac{x(64x^2 + 3072)}{(x^2 - 16)^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(64x^2 + 3072) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 64x^2 + 3072 = 0 \text{ no hay solución} \end{cases}$$

$$\forall x \in (-\infty, -4) \Rightarrow y''(-8) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (-4, 0) \Rightarrow y''(-1) > 0 \quad \text{cóncava}$$

$$\forall x \in (0, 4) \Rightarrow y''(1) < 0 \quad \text{convexa}$$

$$\forall x \in (4, +\infty) \Rightarrow y''(8) > 0 \quad \text{cóncava}$$

En (0,0) hay un punto de inflexión.

7º Gráfica:

