Funciones logarítmicas

OBJETIVOS

- Cambiar una expresión en forma exponencial a su forma logarítmica y viceversa.
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas utilizando propiedades de los logaritmos.
- Encontrar el valor exacto de expresiones que contienen logaritmos utilizando las leyes de los exponentes y las propiedades de los logaritmos.
- Utilizar las propiedades de transformación de las gráficas para dibujar la gráfica de funciones que contienen logaritmos.
- Resolver problemas aplicados en los cuales el modelo resultante es exponencial o logarítmico.

Definición de logaritmo

Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ son biunívocas o uno a uno y por lo tanto tienen una función inversa. En algunos casos la inversa de una función representada por una ecuación, puede obtenerse intercambiando la variable x por y, luego despejando y. Si se aplica este procedimiento a la función exponencial de base a se tiene

$$y = a^x$$

Al intercambiar las variables obtenemos

$$x = a^y$$

Los métodos algebraicos desarrollados hasta ahora en el curso no permiten despejar y en términos de x. Sin embargo, verbalmente se puede expresar y como

$$y = \text{El exponente de } a \text{ tal que } a^y = x$$

Como se necesita una notación compacta para representar y como el exponente de a tal que $a^y = x$, se introduce la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Si $x > 0$ y a es un número real positivo, $a \neq 1$, entonces

$$y = \log_a x \quad \text{si y solo si} \quad a^y = x$$

La expresión $y = \log_a x$ se lee "y es el logaritmo en base a x".

La definición anterior indica que y es el exponente al cual se debe elevar la base a para obtener el número x. Las ecuaciones

$$y = \log_a x \quad \text{y} \quad a^y = x$$

son dos formas diferentes de expresar lo mismo.

$$y = \log_a x \text{ es la forma logarítmica de } a^y = x$$

$$a^y = x \text{ es la forma exponencial de } y = \log_a x$$

Logaritmo común y logaritmo natural

Los logaritmos más utilizados en matemática son los logaritmos comunes y los logaritmos naturales y son los que vienen incorporados la mayor parte de calculadoras científicas.

La definición siguiente presenta la notación utilizada para ellos.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO COMÚN Y LOGARITMO NATURAL
Si $x > 0$, entonces $$\log_{10} x = \log x$$ Si $x > 0$, entonces $$\log_e x = \ln x$$

Ejemplo 1: Cambiando de forma exponencial a forma logarítmica

Exprese en forma logarítmica la expresión dada en forma exponencial

a. $2^5 = 32$ **b.** $7^{-3} = \dfrac{1}{343}$ **c.** $4^{-2t} = \dfrac{3}{P}$

Solución

Para convertir de forma exponencial a forma logarítmica se utiliza la definición de logaritmo: $a^y = x$ si y solo si $y = \log_a x$, entonces:

a. $2^5 = 32$ se expresa en forma logarítmica como $5 = \log_2 32$

b. $7^{-3} = \dfrac{1}{343}$ se expresa en forma logarítmica como $-3 = \log_7\left(\dfrac{1}{343}\right)$

c. $4^{-2t} = \dfrac{3}{P}$ se expresa en forma logarítmica como $-2t = \log_4\left(\dfrac{3}{P}\right)$

Ejemplo 2: Cambiando de forma logarítmica a forma exponencial

Exprese en forma exponencial la ecuación dada en forma logarítmica

a. $\log_5 125 = 3$ **b.** $-1 = \log_4 \dfrac{1}{4}$ **c.** $\log_2(x+4) = \dfrac{1}{3}$

Solución

Para convertir de forma logarítmica a forma exponencial se utiliza la definición en la forma $y = \log_a x$ si y solo si $a^y = x$, entonces

a. $\log_5 125 = 3$ es la forma logarítmica de $5^3 = 125$

b. $-1 = \log_4 \dfrac{1}{4}$ es la forma logarítmica de $4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

c. $\log_2(x+4) = \dfrac{1}{3}$ es la forma logarítmica de $2^{1/3} = x + 4$

Utilizando la definición de logaritmo y algunas leyes de los exponentes es posible calcular en valor exacto de algunos logaritmos, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3: Evaluando logaritmos

Utilice la definición de logaritmo para calcular el valor exacto del logaritmo

a. $\log_{10} 1{,}000$ **b.** $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$ **c.** $\log_{0.3}\frac{100}{9}$

Solución

a. $\log_{10} 1{,}000 = x$ si y solo si $10^x = 1{,}000$

Ahora se utilizan las leyes de los exponentes y se igualan las potencias de la misma base para despejar x

$$10^x = 1{,}000$$

$$10^x = 10^3$$

$$x = 3$$

De donde $\log_{10} 1{,}000 = 3$

b. Procediendo como en el inciso anterior

$$\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = x \quad \text{si y solo si} \quad 2^x = \frac{1}{32}$$

$$2^x = \frac{1}{32}$$

$$2^x = \frac{1}{2^5}$$

$$2^x = 2^{-5}$$

$$x = -5$$

De donde se tiene que $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = -5$

c. $\log_{0.3}\frac{100}{9} = x$ si y solo si $(0.3)^x = \frac{100}{9}$

$$(0.3)^x = \frac{100}{9}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^x = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^x = \left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$$

$$x = -2$$

De donde se tiene que $\log_{0.3}\frac{100}{9} = -2$

Utilizando la definición de logaritmo también es posible resolver algunas ecuaciones que exponenciales y logarítmicas, como se ilustra en el ejemplo siguiente

Ejemplo 4: Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Utilice la definición de logaritmo para resolver las ecuaciones

a. $\log(x+4) = 2$ **b.** $\ln x^2 = -4$ **c.** $100 = 10e^{-2x}$

Solución

a. Al utilizar la definición $y = \log_a x$ si y solo si $a^y = x$, se tiene

$$2 = \log(x+4) \text{ si y solo si } 10^2 = x+4$$

Despejando x

$$100 = x + 4$$

$$x = 100 - 4 = 96$$

De donde la solución de la ecuación $\log(x+4) = 2$ es $x = 96$

b. Al utilizar la definición $y = \log_a x$ si y solo si $a^y = x$, se tiene

$$-4 = \ln x^2 \text{ si y solo si } e^{-4} = x^2$$

Al despejar x se tiene

$$e^{-4} = x^2$$

$$\frac{1}{e^4} = x^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{e^4}} = \sqrt{x^2}$$

$$x = \pm\frac{1}{e^2}$$

De donde las soluciones de la ecuación $\ln x^2 = -4$ son $x = \frac{1}{e^2}$ y $x = -\frac{1}{e^2}$

c. Dividiendo ambos lados entre 10

$$100 = 10e^{-2x}$$

$$10 = e^{-2x}$$

Al utilizar la definición $a^y = x$ si y solo si $y = \log_a x$, se tiene

$$-2x = \ln 10$$

$$x = \frac{\ln 10}{-2}$$

$$x \approx -1.15129$$

Función logarítmica

Usando el concepto de logaritmo puede definirse la **función logarítmica**

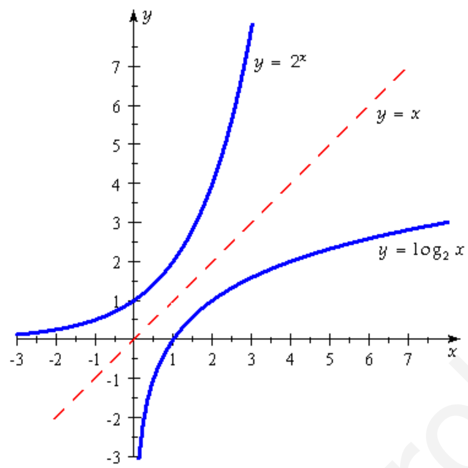
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función logarítmica de base a se define como

$$f(x) = \log_a x$$

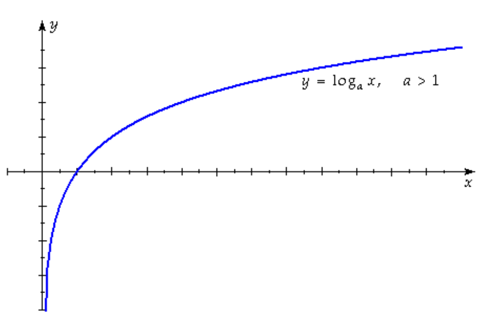
donde a es una constante positiva, $a \neq 1$ y x es un número real positivo.

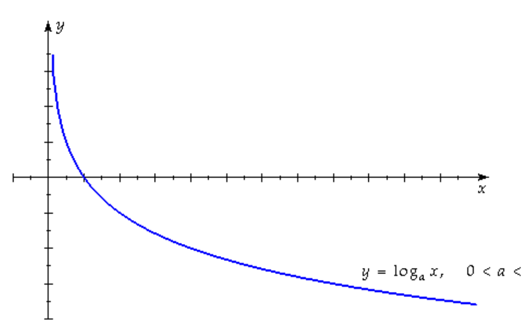
La función logarítmica $f(x) = \log_a x$ es la inversa de la función exponencial $g(x) = a^x$, por lo tanto la gráfica de la función logarítmica se puede obtener por la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ sobre la recta $y = x$. La figura siguiente muestra las gráficas de la función exponencial $y = 2^x$ y la de su inversa $y = \log_2 x$



PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN $f(x) = \log_a x$
Para todo número real positivo a, $a \neq 1$, la función definida por $f(x) = \log_a x$ tiene las siguientes propiedades:
1. El dominio de f está formado por todos los reales positivos.
2. El rango o contradominio de f es el conjunto de todos los números reales.
3. La gráfica de f intercepta al eje x en el punto $(1,0)$.
4. El eje y es una asíntota horizontal de la gráfica de f.
5. f es una función uno a uno o biunívoca.
6. f es una función creciente en todo su dominio si $a > 1$.
7. f es una función decreciente en todo su dominio si $0 < a < 1$.
8. Como la función logarítmica y la función exponencial son inversas $$\log_a(a^x) = x \quad \text{y} \quad a^{\log_a x} = x$$

La figura siguiente muestra la gráfica de una función logarítmica creciente y una decreciente





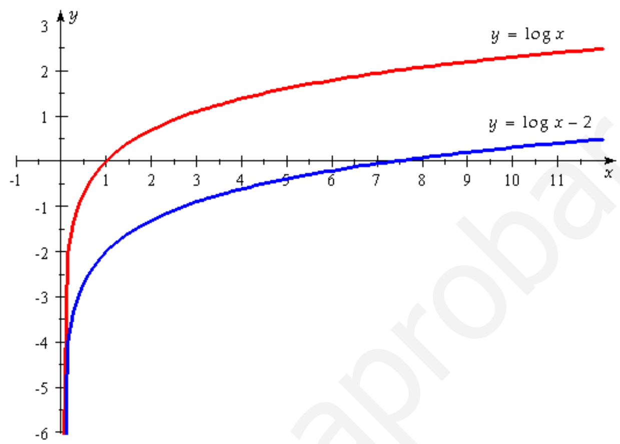
Ejemplo 5: Gráficas de funciones de forma logarítmica

Utilice transformaciones para dibujar la gráfica de las funciones

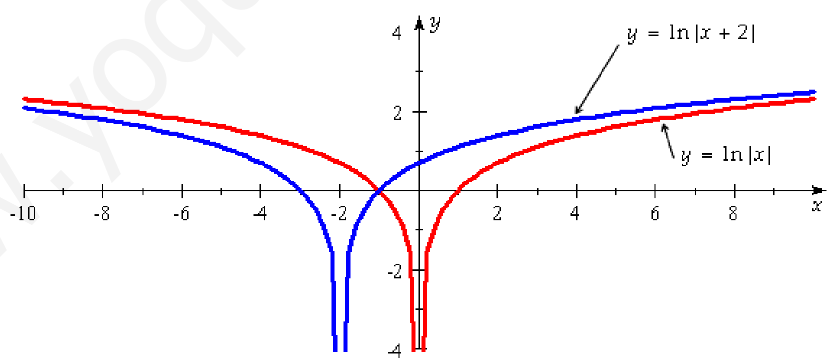
a. $f(x) = \log x - 2$ **b.** $f(x) = \ln|x + 2|$

Solución

a. La gráfica de la función $f(x) = \log x - 2$ es la misma que la gráfica de la función $y = \log x$, desplazada dos unidades hacia abajo. La figura siguiente muestra en color rojo la gráfica de $y = \log x$, y en color azul la de la función $f(x) = \log x - 2$



b. La gráfica de la función $g(x) = \ln|x|$, mostrada en color rojo, se obtiene a partir de la gráfica de $y = \ln x$. El valor absoluto en el argumento de la función hace que la gráfica sea simétrica con respecto al eje *y*, ya que $g(x) = g(-x)$. La gráfica de la función $f(x) = \ln|x + 2|$, es la misma que la de $g(x) = \ln|x|$ desplazada dos unidades hacia la izquierda y se muestra en color azul en la figura.



Para finalizar ésta sección se presenta un ejemplo sobre aplicaciones de las funciones logarítmicas.

Ejemplo 6: Una aplicación en Astronomía

Los astrónomos utilizan el Término *distancia módulo* para referirse a la distancia entre una estrella y la tierra. La fórmula es

$$M = 5\log r - 5$$

Donde M es la distancia módulo y r es la distancia entre una estrella y la tiera expresada en Pársec.

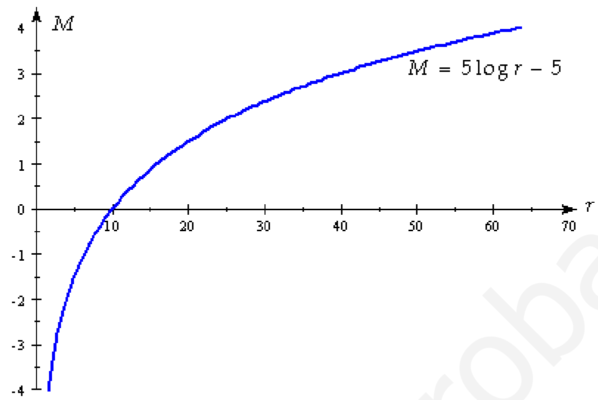
(Un Pársec es aproximadamente igual a 3.3 años luz o 3.42×10^{13} kilómetros).

a. Utilice un programa de cómputo para dibujar la representación gráfica de M en términos de r.

b. Calcule la distancia en Parsecs de una estrella que está a una distancia módulo de 10.

Solución

a. Utilizando el programa Scientific Notebook para dibujar la gráfica se obtiene la figura siguiente



b. Sustituyendo $M = 10$ en la ecuación $M = 5\log r - 5$ se puede utilizar la definición de logaritmo para despejar r

$$10 = 5\log r - 5$$

$$15 = 5\log r$$

$$3 = \log r$$

Como $3 = \log r$ si y solo si $10^3 = r$, se tiene que $r = 1000$ Parsecs

Ejercicios de la sección 5.4

En los ejercicios 1 a 10 cambie la ecuación dada en forma logarítmica a forma exponencial

1. $\log_2 32 = 5$
2. $\log_5 125 = 3$
3. $\log 1000 = 3$
4. $\ln A = -1$
5. $\log_3 \dfrac{1}{27} = -3$
6. $-1 = \log_7 \dfrac{1}{7}$
7. $\log_3 1 = 0$
8. $\log_b r = t$
9. $\log_b (s + t) = r$
10. $\ln(1 + x) = -2$

En los ejercicios 11 a 20 Cambie la ecuación dada en forma exponencial a su correspondiente forma logarítmica

11. $2^4 = 16$
12. $3^5 = 243$
13. $10^4 = 10{,}000$
14. $7^{-4} = \dfrac{1}{2401}$
15. $e^0 = 1$
16. $\dfrac{1}{1000} = 10^{-3}$
17. $\dfrac{1}{b} = e^{-4}$
18. $b^k = j$
19. $P = 10^{mk}$

20. $ae^{-k} = C$

En los ejercicios 21 a 27 utilice la definición de logaritmo para calcular el logaritmo indicado si usar calculadora,

21. $\log_3 243$

22. $\log_{1/2} 16$

23. $\log 0.01$

24. $\log_{3/2} \dfrac{27}{8}$

25. $\log_{0.3} \dfrac{100}{9}$

26. $\log_b 1$

27. $\log_b b$

En los ejercicios 28 a 35 resuelva la ecuación propuesta usando la definición de logaritmo

28. $\log_2(x+5) = \log_2(6-2x)$

29. $\ln(5x) = \ln(x-5)$

30. $\log_3 x^2 = \log_3(x+6)$

31. $\log(12-x) = \log x^2$

32. $\ln x^2 = \ln(x+6)$

33. $\log_2(x+4) = 3$

34. $\log_3 x = -\dfrac{2}{3}$

35. $\log_5 x^2 = 3$

36. $e^{\ln x} = 6$

37. $e^{\ln x^2} = 16$

38. $e^{-2\ln x} = \dfrac{1}{9}$

39. $10^{x\ln 2} = 32$

40. $4^{-x\ln 3} = 27$

En los ejercicios 41 a 50 dibuje la representación gráfica de la función.

41. $f(x) = \log_3 x$

42. $f(x) = \log_{1/2} x$

43. $f(x) = -3\ln x$

44. $f(x) = \log_2 x^2$

45. $f(x) = |\ln x|$

46. $f(x) = \log(x+1) - 3$

47. $f(x) = -\ln(x-3)$

48. $f(x) = -\ln|x|$

49. $f(x) = 3 - \ln x$

50. $-|\log_2 x| + 2$

51. El tiempo T en años, que durarán los recursos energéticos de cierto país pueden ser estimados mediante el modelo

$$T(r) = \frac{1}{r}\ln(99.5r + 1)$$

En donde r% es la tasa a la cual se consumen los recursos expresada en forma decimal Dibuje la representación gráfica del modelo para $0 \le r \le 1$. Utilice la gráfica para estimar el porcentaje al que se deben consumir los recursos para que tarden 50 años.

52. La función siguiente, puede ser utilizada para estimar la esperanza de vida de los guatemaltecos nacidos entre el año 1980 y el año 2010, con $x = 0$ correspondiendo al año 1970.

$$E(x) = 38.727 + 8.767\ln x$$

a. Dibujar la representación gráfica de la función.

b. Construir una tabla de valores calculando la esperanza de vida con el modelo para $0 \le x \le 30$.

c. Utilizar el modelo para estimar la esperanza de vida de los guatemaltecos nacidos en el año 2010.

53. Los salarios de los profesores del colegio de educación media El Castillo, son ajustados cada año para compensar los efectos de la inflación. Los propietarios del colegio utilizan el siguiente modelo para calcular el salario S de un profesor

$$S(x) = 1{,}000\ln(x+1) + 2{,}600$$

Donde S está en quetzales y x es el número de años que el trabajador lleva en el colegio.

a. Utilice una calculadora para construir una tabla de salarios para $0 \le x \le 10$.

b. Dibuje la representación gráfica de la función.

c. Calcule el salario de un profesor que tiene 20 años de servicio en el colegio.

d. Utilice la gráfica para estimar el número de años que tiene de servicio un profesor que tiene un salario de Q5,310.