UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2020/21.

PREGUNTAS TIPO TEST — Modelo 19.K

Conteste a un máximo de 10 cuestiones

1. Sea el polinomio $p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces

(A) El grado de $p(x)$ es menor que 3.

(B) $p(x) = 0$ tiene dos raíces enteras.

(C) Ninguna de las otras dos.

2. Sean la matriz $B = A^4$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b_{3,1}$ el número de la tercera fila y primera columna de B. Entonces

(A) $b_{3,1}$ es un número par .

(B) $b_{3,1} > 10$.

(C) Ninguna de las otras dos.

3 Sea el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$. Entonces una solución cumple

(A) $xy > z$.

(B) $yz > x$.

(C) Ninguna de las otras dos.

4 Sea el cuadrado $ABCD$ de vértices $A = (1, 2, 1), B = (1, 5, 2), C = (a, b, c)$ y $D = (1, 1, 4)$,. Entonces

(A) $b < c$.

(B) $c < a$.

(C) Ninguna de las otras dos.

5 Sean s la recta que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$ y $B = (2, 0, -2)$, y d la distancia del punto $Q = (0, 3, 4)$ a la recta s. Entonces

(A) $d > 2$.

(B) $d < 1$.

(C) Ninguna de las otras dos.

6 Sea el plano π determinado por los puntos $A = (0,1,1), B = (1,0,2)$ y $C = (1,3,1)$. Entonces

(A) el plano $2x + y + z - 2 = 0$ es perpendicular a π.

(B) el plano $3x + y + 7z - 10 = 0$ es perpendicular a π.

(C) Ninguna de las otras dos.

7 Sean las rectas r determinada por los puntos $A = (-1,0,0)$ y $B = (0,-1,0)$, y s determinada por los puntos $C = (1,1,1)$ y $D = (0,0,1)$. La distancia mínima entre un punto de la recta r y un punto de la recta s es el número real k. Entonces

(A) $k > 2$.

(B $k = 1$.

(C) Ninguna de las otras dos.

8 Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 3x + 2}{x^3 + 3}}$ (raíz cúbica). Entonces

(A) La recta $3y - 1 = 0$ es una recta asíntota de la gráfica de f.

(B) La recta $x - 2y + 1 = 0$ es una recta asíntota de la gráfica de f.

(C) Ninguna de las otras dos.

9 Sea la función $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (logaritmo neperiano). Entonces

(A) $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 1$.

(B) $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 1$.

(C) Ninguna de las otras dos.

10 Sea $k = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$. Entonces.

(A) $k < \dfrac{1}{2}$.

(B) $k > 2$

(C) Ninguna de las otras dos.

11. Sean la función $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$, D su dominio o campo de existencia y $k = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Entonces

(A) $k > 4$.

(B) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) = D$.

(C) Ninguna de las otras dos.

12 De una urna con 8 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas rojas, se extraen dos bolas una tras otra sin introducir la primera. Sea m la probabilidad de extraer dos bolas del mismo color. Entonces

(A) $m < \frac{1}{5}$.

(B) $m > \frac{1}{4}$.

(C) Ninguna de las otras dos.

13. Se considera que la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es 0,1. Sea p la probabilidad de elegir una muestra de 3 tornillos con al menos uno defectuoso. Entonces

(A) $p < 0{,}2$.

(B) $p > 0{,}3$.

(C) Ninguna de las otras dos.

14 De tres arqueros se sabe que uno gana con probabilidad $\frac{k}{2}$, otro con probabilidad $\frac{k}{4}$ y el último con probabilidad $\frac{k}{8}$. Si sólo juegan esos tres arqueros. Entonces

(A) $k > 1$.

(B) $k < 0{,}5$.

(C) Ninguna de las otras dos.

15 Se sabe que la probabilidad de ganar en un juego es 0,3. Se juega 5 veces a ese juego. Sea p es la probabilidad de que se gane sólo3 veces. Entonces

(A) $p > 0{,}2$.

(B) $p < 0{,}3$

(C) Ninguna de las otras dos.

Conteste a los problemas de única Opción en hojas separadas.

Opción 1

1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = A^{-1} - A$. Estudie el rango de la matriz B.

2 Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano $x + 2y + 2z - 4 = 0$ con los ejes coordenados.

Opción 2

3 Determine $\int x^2 \ln x^2 dx$. (logaritmo neperiano)

4 En una urna hay 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 2 bolas verdes y en otra urna hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras y 4 bolas verdes. Se han extraído dos bolas simultáncamente de una misma urna sin que se sepa de qué urna, y resulta que son blancas. Determine la probabilidad de que esas dos bolas salieran de la primera urna.

1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$

$\rightarrow B = A^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

¿Rango de B?

$|B|_{3\times3} = 0$

$|B|_{2\times2} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rango}(B) = 2}$

$A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A^t}{|A|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2

$\pi = x + 2y + 2z - 4 = 0$

$x \to y=0 \quad z=0 \longrightarrow x-4=0 \longrightarrow x=4 \longrightarrow A=(4,0,0)$

$y \to x=0 \quad z=0 \longrightarrow 2y-4=0 \longrightarrow y=2 \longrightarrow B=(0,2,0)$

$z \to x=0 \quad y=0 \longrightarrow 2z-4=0 \longrightarrow z=2 \longrightarrow C=(0,0,2)$

Volumen tetraedro $\to \dfrac{|\vec{OA} \times \vec{OB} \times \vec{OC}|}{6}$

$$\begin{cases} \vec{OA} = A - \overset{\text{origen}(0,0,0)}{O} = (4,0,0) \\ \vec{OB} = B - O = (0,2,0) \\ \vec{OC} = C - O = (0,0,2) \end{cases}$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} \times \vec{OC} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 \quad \to \quad Vol = \frac{16}{6} = \boxed{\frac{8}{3}} \approx 2'6 \ u^3$$

3 $\displaystyle\int x^2 \cdot \ln x^2 \, dx \quad \to \quad u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x^2) \longrightarrow du = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \\ dv = x^2 \longrightarrow v = \displaystyle\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right\}$$

$$= \ln(x^2) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2}{x} \, dx$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{3}\int x^2\,dx = \frac{2}{3}\frac{x^3}{3} = \frac{2x^3}{9} + C$$

$$\underline{\underline{SOL}} \rightarrow \frac{x^3 \ln x^2}{3} - \frac{2x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x^2 - \frac{2}{3}\right) + C$$

4

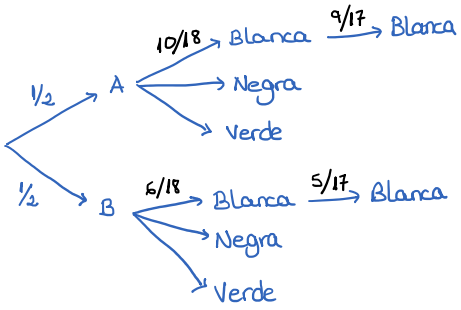
En una $\overbrace{\text{urna}}^{A}$ hay 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 2 bolas verdes y en otra $\overbrace{\text{urna}}^{B}$ hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras y 4 bolas verdes. Se han extraído dos bolas Simultáneamente de una misma urna sin que se sepa de cuál, y resulta que son blancas. Determine la probabilidad de que esas dos bolas salieran de la primera urna.

urna A = 10 B + 6 N + 2V = 18 Bolas

urna B = 6B + 8N + 4V = 18 Bolas

Se extraen 2 bolas blancas de una misma urna desconocida

¿ P(1ª urna) ?



Teorema Bayes.

$$P(A) = \frac{\left(\frac{9}{17}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{9}{17}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{17}\cdot\frac{6}{18}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{5/34}{5/34 + 5/102} = \frac{5/34}{10/51} = \boxed{\frac{3}{4}} = 0'75 \rightsquigarrow 75\%$$