

1. Para todo par A, B de matrices reales $n \times n$ arbitrarias:

- (A) Se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.
 (B) Se cumple que $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
 (C) Ninguna de las otras dos.

①

$$(a+b)(a-b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - \cancel{AB} + \cancel{BA} - B^2 = A^2 - B^2 \quad \leftarrow \boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

$$\boxed{AB = BA}$$

se cumple la igualdad $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
 siempre que AB sea igual a BA . opc.c)

2. Para toda A matriz real 2×2 arbitraria, se cumple que:

- (A) Si $A^2 = A$, entonces $A^4 = A$.
 (B) Si A simétrica, entonces $A^2 = A$.
 (C) Ninguna de las otras dos.

②

$$A^2 = A \quad \text{opc. a)}$$

$$A^4 = \underbrace{A^2}_{A} \cdot \underbrace{A^2}_{A} = A \cdot A = \underbrace{A^2}_{A} = A \rightarrow \boxed{A^4 = A}$$

• si A es simétrica $\rightarrow A = A^t$

$$A^2 = A \cdot A = A^t \cdot A^t = A^{tt}$$

3. Toda A matriz real arbitraria cumple:

- (A) El rango de A es el número de filas no nulas.
 (B) $\text{rango}(A) = \text{rango}(-A)$.
 (C) Ninguna de las anteriores.

③ TEORIA opc. b)

4. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$:

- (A) Tiene $\text{rango}(A) = 1$ para ciertos valores de α .
 (B) Tiene $\text{rango}(A) = 2$ para todos los valores de α .
 (C) Ninguna de las otras dos.

④ rango?

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}_{2 \times 2} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \underbrace{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}_{\text{identidad trigonométrica} = 1} = 1$$

$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow$ para cualquier valor de α , la identidad será igual a 1. Por tanto, $|A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$

5. Consideremos los planos $\pi: 2x + y + z = 1$, $\pi': x + y - z = 0$.

(A) Su intersección es la recta $3x = 2y = 1$.

(B) Su intersección la recta $r: (-1, 2, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

5

$$\begin{cases} \pi = 2x + y + z = 1 \\ \pi' = x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + 2z = 1 &\rightarrow z = \lambda \rightarrow x = 1 - 2\lambda \\ y = -x + z = -1 + 2\lambda + \lambda = -1 + 3\lambda \end{aligned}$$

$$r = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow P_r = (1, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (-2, 3, 1)$$

Comprobamos si el pto $(-1, 2, 1)$ pertenece a la recta:

$$r = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} -1 &= 1 - 2\lambda \rightarrow \lambda = 1 \\ 2 &= -1 + 3\lambda \rightarrow \lambda = 1 \\ 1 &= \lambda \end{aligned} \rightarrow \text{si pertenece (opc b)}$$

6. Para todo par de vectores ortogonales u, v , si α es el ángulo que forman u y $u - v$, entonces se cumple:

(A) $\cos \alpha = \frac{\|u\|}{\|u\|^2 - \|v\|^2}$

(B) $\cos^2 \alpha = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2 + \|v\|^2}$

(C) Ninguna de las otras dos.

6 $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \alpha$ entre $\vec{u}$ y $\vec{u} - \vec{v}$?

$$\alpha = (\vec{u}, \vec{u} - \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u} - \vec{v}|} = \frac{\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot \sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2}} = \frac{\vec{u}^2}{|\vec{u}| \cdot \sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2}}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2} \quad \text{opc b)}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2} = \sqrt{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

7. La recta en el espacio cuya ecuación es

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

(A) Pasa por el punto $(3, 1, 0)$ y tiene vector director $(-2, 3, -1)$

(B) Pasa por el punto $(-2, 3, -1)$ y tiene vector director $(-3, -1, 1)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

7 $P_r = (-3, -1, 0)$
 $\vec{v}_r = (-2, 3, -1)$

Podemos comprobar si el pto $(3, 1, 0)$ pertenece a la recta:

$$x = -3 - 2\lambda \rightarrow 3 = -3 - 2\lambda \rightarrow \lambda = -3$$

$$y = -1 + 3\lambda \rightarrow 1 = -1 + 3\lambda \rightarrow \lambda = 2/3 \quad \text{No pertenece (opc c)}$$

$$z = -\lambda \rightarrow 0 = -\lambda \rightarrow \lambda = 0$$

8. La distancia del punto $P = (2, 4, 1)$ a la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$ es:

- (A) Menor que 1.
- (B) Mayor que 1.
- (C) Ninguna de las otras dos.

8

$$\begin{aligned}
 P &= (2, 4, 1) \\
 P_r &= (2, 3, -1) \\
 PP_r &= (0, -1, -2) \\
 \vec{v_r} &= (1, 2, 1) \\
 \vec{v_r} \times \vec{PP_r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (5, -2, -1) \\
 d(P, r) &= \frac{|\vec{v_r} \times \vec{PP_r}|}{|\vec{v_r}|} = \frac{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5} = 2.24 \text{ u}
 \end{aligned}$$

opc b)

9. Consideremos la curva definida por $y = f(x)$. Entonces

- (A) Si la pendiente no está definida en algún punto de la curva, no existe la tangente en dicho punto.
- (B) Si la a la curva es horizontal en un punto $(a, f(a))$ y f es derivable en a , entonces $f'(a) = 0$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

9

Teoría $\rightarrow f'(a) = 0 \rightarrow$ recta horizontal

La derivada en un pte igual a cero es una recta horizontal.

opc b)

10. Para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ (donde $a > 0$) y el eje Ox tenga un valor de 36 unidades debe ser:

- (A) $a = 6$
- (B) $a = 3\sqrt{3}$
- (C) Ninguna de las otras dos.

10

$$y = -x^2 + ax \rightarrow \text{área} = 36$$

$$\rightarrow -x^2 + ax = 0 \rightarrow x(-x + a) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} (a > 0)$$

$$A = \int_0^a (-x^2 + ax) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \right]_0^a = \frac{-a^3}{3} + \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{6} \text{ u}^2$$

$$36 = \frac{a^3}{6} \rightarrow a^3 = 36 \cdot 6 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6$$

11. La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (A) Tiene un máximo relativo en $x = 0$.
- (B) Tiene un mínimo relativo en $x = 0$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

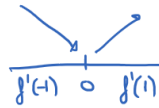
11

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x = e^{-x}$$

$$\rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \rightarrow e^x \cdot e^x = 1$$

$$\rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow \ln e^{2x} = \ln 1 \rightarrow \boxed{x=0}$$



$x=0$ es un mínimo.

12. El valor de la integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2022} \cdot \sin\left(\frac{x^3}{\cos x}\right) dx$

- (A) Menor que 1
- (B) Múltiplo de π
- (C) Ninguna de las otras dos.

12

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{x^{2022}}_{\text{par}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{x^3}{\cos x}\right)}_{\text{impar}} dx = \text{impar}$$

Teoría: una función impar en un intervalo definido simétrico ($a=-b$), su integral = 0 < menor que 1.

13. Se tiene un conjunto de bolas azules y bolas rojas en una bolsa. En total hay 25 bolas. Se saca una de ellas al azar y se sabe que probabilidad de que sea roja es p , mientras que la probabilidad de que sea azul es $4p$. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

- (A) Menos de 21 y más de 15.
- (B) Entre 5 y 10.
- (C) Ninguna de las dos.

13

$$p = \text{Prob. roja} \rightarrow p = \frac{x}{25} \rightarrow x = 25p$$

$$4p = \text{Prob. azul} \rightarrow 4p = \frac{y}{25} \rightarrow y = 100p$$

$$x + y = 25 \rightarrow 25p + 100p = 25 \rightarrow p = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \text{si } y = 100p \rightarrow \boxed{y=20}$$

14. Se lanza una moneda truca. La probabilidad de que en dos lanzamientos se obtengan dos caras es 0,16. ¿Cuál la probabilidad p de obtener dos cruces?

- (A) $0,8 < p < 0,9$.
- (B) $0,3 < p < 0,4$.
- (C) Ninguna de otras dos.

14) C = Caza + = cruz (en una moneda están al 50%.)

$$P(C \cap C) = P(C) \cdot P(C) = 0'16 \rightarrow P(C)^2 = 0'16 \rightarrow P(C) = 0'4$$

$$P(+)=1-P(C)=1-0'4=0'6$$

$$P(+ \cap +) = P(+).P(+)=0'6 \cdot 0'6 = \boxed{0'36}$$

15. ¿Cuáles de las siguientes probabilidades pueden representar a dos eventos disjuntos A y B de un determinado espacio muestral?

(A) $p(A) = 0,2$ y $p(B) = 0,67$.

(B) $p(A) = 0,5$ y $p(B) = 0,75$.

(C) Ninguna de las dos.

15) Disjuncto = incompatible $\rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0$$

$$a) = 0'2 + 0'67 = 0'87 \rightarrow \text{sol. válida} \checkmark$$

$$b) = 0'5 + 0'75 = 1'25 \rightarrow \text{No es posible una prob} > 1$$

PROBLEMAS MATES II_2022

OPCIÓN 1

PROBLEMA 1.

Sea la matriz $C = A^2 - 4A - 6B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudie el rango de C en función del valor del número real a.

$$C = \overline{A^2 - 4A - 6B}$$

$$\bullet 4A = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}$$

$$\bullet 6B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a & 0 & 2a^2 - 4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2 - 4a & 0 & 2a^2 - 4a \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - 4A) - 6B = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a & 0 & 2a^2 - 4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2 - 4a & 0 & 2a^2 - 4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \end{pmatrix} = C$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -9 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 & 0 \end{vmatrix} = -9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6) - [-9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6)] = 0$$

(no existen valores de a)

• $rg=3 \rightarrow |C|_{3 \times 3} \neq 0 \rightarrow$ para todos los valores de a, $\nexists rg=3$

• $\begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}_{2 \times 2} \neq 0 \rightarrow rg=2 \rightarrow (2a^2-4a-6)(-9)=0 \rightarrow -18a^2+36a+54 \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$

$\rightarrow$ cuando $a \neq 3$ o $a \neq -1 \rightarrow rg(c)=2$

$\rightarrow$ cuando $a=3$ o $a=-1 \rightarrow rg(c)=1$

$\rightarrow$ para ningún valor $\exists rg(c)=3$.

PROBLEMA 2.

Estudia y representa la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

• Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{-2, 2\}$

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \rightarrow \text{Anulan el denominador}$$

• Asintotas

A.V $\rightarrow \exists$ A.V en $x=2$ y $x=-2$

A.H $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\textcircled{1}}}{x^{\textcircled{2}}-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\text{ind}} \xrightarrow{D^o > N^o} \boxed{0}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$

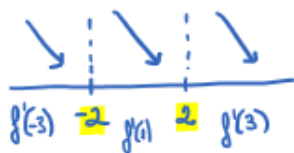
$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \end{array} \right\} \exists \text{ A.H en } \underline{y=0}$

A.O $\rightarrow \nexists$

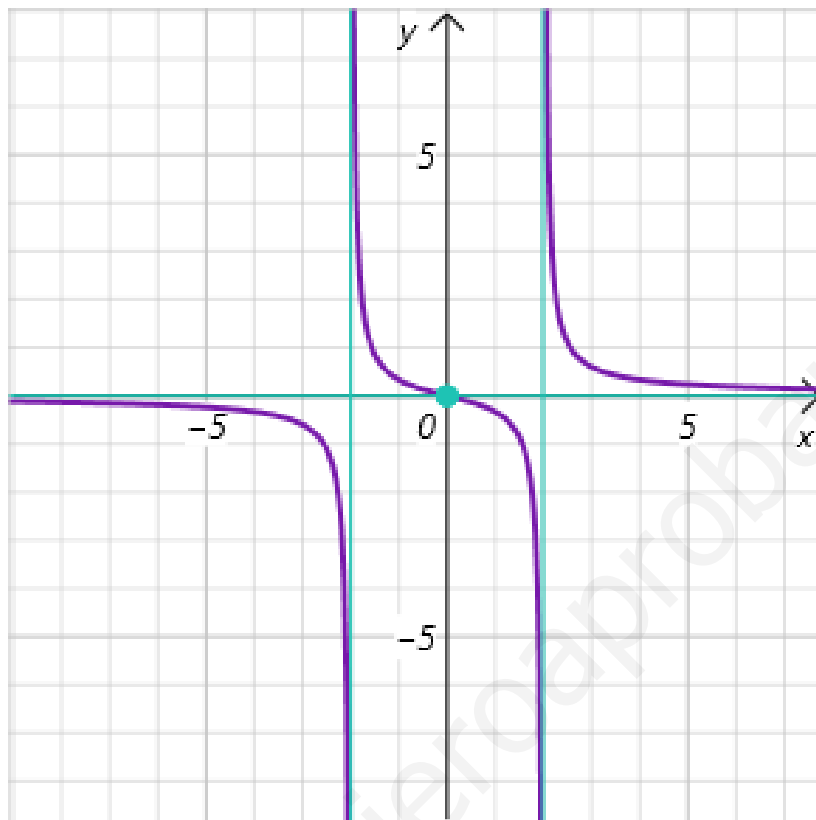
• Monotonía $\rightarrow f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} \rightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow -x^2=4 \rightarrow x^2=-4 \nexists \text{ Ptas relativas}$$

No hay máx ni mín. Estudiamos crecimiento con pto NO DOM.



Decreciente en todos sus $\mathbb{D}_d$ de dominio
 $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$



OPCIÓN 2

PROBLEMA 3.

Halla las integrales indefinidas siguientes:

a) (1 punto)

$$\int x e^{x^2} dx$$

b) (1,5 puntos)

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$1) \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$2) \int \sqrt{1-x^2} dx = \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \text{sen } t \rightarrow dx = \text{cos } t \\ \hookrightarrow t = \text{arcsen } x \end{array} \right\}$$

$$= \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} \cdot \text{cos } t dt = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} \cdot \text{cos } t dt$$

$\downarrow$
 $\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t = 1 \rightarrow \text{cos } t = \sqrt{1-\text{sen}^2 t}$

$$= \int \text{cos}^2 t dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\text{cos } 2t}{2} dt =$$

$\hookrightarrow \text{cos}^2 t = \frac{1+\text{cos } 2t}{2}$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2t}_{\substack{\text{sen } 2t = 2 \text{ sen } t \cdot \text{cos } t}} = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 \text{ sen } t \cdot \text{cos } t = \frac{t}{2} + \frac{\text{sen } t \cdot \text{cos } t}{2}$$

$\xrightarrow{\text{sen } 2t = 2 \text{ sen } t \cdot \text{cos } t}$

$$\underline{t = \arcsen x} \rightarrow = \frac{\arcsen x}{2} + \frac{x \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}}{2} + C$$

PROBLEMA 4.

Se elige un número entero al azar entre el 0 y el 9999 (ambos inclusive) ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor de 4444 y múltiplo de 5?

• método 1

→ múltiplo de 5 desde el 4444 al 10000:

$$\rightarrow \frac{4444}{5} < K < \frac{10000}{5}$$

$$\rightarrow 888'8 < K < 2000$$

el + peque
múltiplo de 5

el + grande
múltiplo de 5

$$\rightarrow \underline{2000} - \underline{890} = \boxed{1110} \text{ múltiplos de 5}$$

$$\bullet P = \frac{\text{Fav.}}{\text{Tot}} = \frac{1110}{10000} = \boxed{0'1111}$$

• método 2

$$\rightarrow P(\text{mayor que 4444}) = \frac{5555}{10000}$$

$P(4444 \cap \text{múltiplos de 5})$

$$\rightarrow P(\text{múltiplo de 5}) = \frac{2}{10}$$

$$P = \frac{5555}{10000} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{0'1111}$$

↳ de cada 10 números
tenemos 2 múltiplos de 5