EXAMEN TEST MATES II_2022

1. Para todo par A, B de matrices reales n x n arbitrarias:

(A) Se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

(B) Se cumple que $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

1

$(a+b)(a-b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(A+B)(A-B) = A^2 - \cancel{AB} + \cancel{BA} - B^2 = A^2 - B^2 \leftarrow \boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

$\boxed{AB = BA}$

Se cumple la igualdad $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ siempre que AB sea igual a BA. opc.c)

2. Para toda A matriz real 2 x 2 arbitraria, se cumple que:

(A) Si $A^2 = A$, entonces $A^4 = A$.

(B) Si A simétrica, entonces $A^2 = A$.

(C) Ninguna de las otras dos.

2 $A^2 = A$ opc. a)

- $A^4 = \underbrace{A^2}_{A} \cdot \underbrace{A^2}_{A} = A \cdot A = \underbrace{A^2}_{A} = A \rightarrow \boxed{A^4 = A}$

- si A es simétrica $\rightarrow A = A^t$

  $A^2 = A \cdot A = A^t \cdot A^t = A^{2t}$

3. Toda A matriz real arbitraria cumple:

(A) El rango de A es el número de filas no nulas.

(B) rango(A) = rango(−A).

(C) Ninguna de las anteriores.

3 TEORIA opc. b)

4. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in R$:

(A) Tiene rango(A) = 1 para ciertos valores de α.

(B) Tiene rango(A) = 2 para todos los valores de α.

(C) Ninguna de las otras dos.

4 rango?

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}_{\underbrace{2\times 2}_{rg\,max}} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \underbrace{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}_{\text{identidad trigonométrica } = 1} = 0$

$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow$ para cualquier valor de α, la identidad será igual a 1. Por tanto, $|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$

5. Consideremos los planos $\pi : 2x + y + z = 1$, $\pi' : x + y - z = 0$.

(A) Su intersección es la recta $3x = 2y = 1$.

(B) Su intersección la recta $r : (-1, 2, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

5

$$\begin{cases} \pi = 2x + y + z = 1 \\ \pi' = x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\times \quad / + 2z = 1 \longrightarrow z = \lambda \rightarrow x = 1 - 2\lambda$$

$$y = -x + z = -1 + 2\lambda + \lambda = -1 + 3\lambda$$

$$r = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} P_r = (1, -1, 0) \\ \vec{v_r} = (-2, 3, 1) \end{array}$$

Comprobamos si el pto $(-1, 2, 1)$ pertenece a la recta:

$$r = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} -1 = 1 - 2\lambda \longrightarrow \lambda = 1 \\ 2 = -1 + 3\lambda \longrightarrow \lambda = 1 \end{array} \longrightarrow \text{si pertenece} \quad \text{opc b)}$$

6. Para todo par de vectores ortogonales u, v, si α es el ángulo que forman u y u − v, entonces se cumple:

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2}$

(B) $\cos^2\alpha = \dfrac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$

(C) Ninguna de las otras dos.

6 $\vec{u} \perp \vec{v}$ ¿α entre $\vec{u}$ y $\vec{u} - \vec{v}$?

$$\alpha = (u, u - v)$$

- $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \cancel{\vec{u}\vec{v}}^{\,0(\perp)} = |\vec{u}|^2$
- $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2} = \sqrt{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - \cancel{2\vec{u}\vec{v}}^{\,0(\perp)}}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u} - \vec{v}|} = \frac{\vec{u}^2 - \cancel{\vec{u}\vec{v}}^{\,0(\perp)}}{u \cdot \sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2}} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2} \qquad \text{opc b)}$$

7. La recta en el espacio cuya ecuación es $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}$

(A) Pasa por el punto (3, 1,0) y tiene vector director (−2, 3, -1)

(B) Pasa por el punto (−2, 3, −1) y tiene vector director (−3, −1, 1).

(C) Ninguna de las otras dos.

7 $P_r = (-3, -1, 0)$

$\vec{v_r} = (-2, 3, -1)$

Podemos comprobar si el pto $(\underbrace{3}_{x}, 1, 0)$ pertenece a la recta:

$$\begin{array}{ll} x = -3 - 2\lambda & \rightarrow 3 = -3 - 2\lambda \rightarrow \lambda = -3 \\ y = -1 + 3\lambda & \rightarrow 1 = -1 + 3\lambda \rightarrow \lambda = 2/3 \\ z = -\lambda & \rightarrow 0 = -\lambda \rightarrow \lambda = 0 \end{array} \qquad \text{No pertenece} \quad \text{opc c)}$$

8. La distancia del punto P = (2,4, 1) a la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$ es:

(A) Menor que 1.
(B) Mayor que 1.
(C) Ninguna de las otras dos.

8

$P=(2,4,1)$
$P_r=(2,3,-1)$
$\overrightarrow{PP_r}=(0,-1,-2)$
$\vec{v_r}=(1,2,1)$

$\rightarrow d(P,r) = \frac{|\vec{v_r} \times \overrightarrow{PP_r}|}{|\vec{v_r}|} = \frac{\sqrt{5^2+2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \boxed{2'24\ u}$

opc b)

$\vec{v_r} \times \overrightarrow{PP_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (5,-2,-1)$

9. Consideremos la curva definida por y = f(x). Entonces

(A) Si la pendiente no está definida en algún punto de la curva, no existe la tangente en dicho punto.
(B) Si la a la curva es horizontal en un punto (a, f(a)) y f es derivable en a, entonces f'(a) = O.
(C) Ninguna de las otras dos.

9 Teoría $\rightarrow f'(a) = 0 \rightarrow$ recta horizontal

La derivada en un pto igual a cero es una recta horizontal.

opc b)

10. Para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ (donde a > O) y el eje Ox tenga un valor de 36 unidades debe ser:

(A) a= 6
(B) a= $3\sqrt{3}$
(C) Ninguna de las otras dos.

10 $y = -x^2 + ax \rightarrow$ área = 36

$\rightarrow -x^2 + ax = 0 \rightarrow x(-x+a) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = a \quad (a>0) \end{cases}$

$A = \int_0^a -x^2 + ax\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\Big]_0^a = \frac{-a^3}{3} + \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{6}\ u^2$

$36 = \frac{a^3}{6} \rightarrow a^3 = 36 \cdot 6 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6$

11. La función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(A) Tiene un máximo relativo en x= O.
(B) Tiene un mínimo relativo en x= O.
(C) Ninguna de las otras dos.

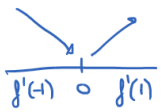
11

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 2 \cdot 0 \rightarrow e^x = e^{-x}$$

$$\rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \rightarrow e^x \cdot e^x = 1$$

$$\rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow \cancel{\ln e}^{2x} = \cancel{\ln 1}^{0} \rightarrow \boxed{x = 0}$$



x=0 es un mínimo.

12. El valor de la integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2022} \cdot sen\left(\frac{x^3}{\cos x}\right) dx$

(A) Menor que 1
(B) Múltiplo de π
(C) Ninguna de las otras dos.

12

$$\int_{\underset{=a}{-\pi/2}}^{\overset{=b}{\pi/2}} \underbrace{x^{2022}}_{par} \cdot \underbrace{sen\left(\frac{x^3}{\cos x}\right)}_{impar} dx = impar$$

Teoría: una función impar en un intervalo definido simétrico (a=-b), su integral = 0 < menor que 1.

13. Se tiene un conjunto de bolas azules y bolas rojas en una bolsa. En total hay 25 bolas. Se saca una de ellas al azar y se sabe que probabilidad de que sea roja es p, mientras que la probabilidad de que sea azul es 4p. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

(A) Menos de 21 y más de 15.
(B) Entre 5 y 10.
(C) Ninguna de las dos.

13

p = Prob. roja $\rightarrow p = \frac{x}{25} \rightarrow x = 25p$

4p = Prob. azul $\rightarrow 4p = \frac{y}{25} \rightarrow y = 100p$

$x + y = 25 \rightarrow 25p + 100p = 25 \rightarrow p = \frac{1}{5}$

$\rightarrow$ si $y = 100p \rightarrow \boxed{y = 20}$

14. Se lanza una moneda trucada. La probabilidad de que en dos lanzamientos se obtengan dos caras es 0,16. ¿Cuál la probabilidad p de obtener dos cruces?

(A) 0,8 < p < 0,9.
(B) 0,3 < p < 0,4.
(C) Ninguna de otras dos.

(14) C = Cara + = cruz (en una moneda están al 50%)

$P(C \cap C) = P(C) \cdot P(C) = 0'16 \longrightarrow P(C)^2 = 0'16 \rightarrow P(C) = 0'4$

$P(+) = 1 - P(C) = 1 - 0'4 = 0'6$

$P(+ \cap +) = P(+) \cdot P(+) = 0'6 \cdot 0'6 = \boxed{0'36}$

15. ¿Cuáles de las siguientes probabilidades pueden representar a dos eventos disjuntos A y B de un determinado espacio muestral?

(A) p(A) = 0,2 y p(B) = 0,67.
(B) p(A) = 0,5 y p(B) = 0,75.
(C) Ninguna de las dos.

(15) Disjunto = incompatible $\longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \cancel{P(A \cap B)}^{\,0}$

a) $= 0'2 + 0'67 = 0'87 \rightarrow$ SOL. VÁLIDA ✓

b) $= 0'5 + 0'75 = 1'25 \longrightarrow$ No es posible una prob > 1

PROBLEMAS MATES II_2022

OPCIÓN 1

PROBLEMA 1.

Sea la matriz **C= A² – 4A – 6B**, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudie el **rango de C** en función del valor del número real **a**.

$C = A^2 - 4A - 6B$

- $4A = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}$

- $6B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$

$A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix}$

$(A^2-4A) - 6B = \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{pmatrix} = C$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \\ 2a^2-4a-6 & 0 \end{matrix} = -9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6) - [-9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6)] = 0$$

(no existen valores de a)

- $rg=3 \rightarrow |C|_{3x3} \neq 0 \rightarrow$ para todos los valores de a, $\nexists$ $rg=3$

- $\begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}_{2x2} \neq 0 \rightarrow rg=2 \rightarrow (2a^2-4a-6)(-9)=0 \rightarrow -18a^2+36a+54 \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$

  $\rightarrow$ cuando $a \neq 3$ ó $a \neq -1 \rightarrow rg(C)=2$

  $\rightarrow$ cuando $a=3$ ó $a=-1 \rightarrow rg(C)=1$

  $\rightarrow$ para ningún valor $\exists$ $rg(C)=3$.

PROBLEMA 2.
Estudia y representa la función f(x).

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

- Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{-2, 2\}$

  $x^2-4=0 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \rightarrow$ Anulan el denominador

- Asíntotas

  A.V $\rightarrow$ $\exists$ A.V en $x=2$ y $x=-2$

  A.H $\rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^1}{x^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{ind} \xrightarrow{D^o > N^o} = \boxed{0}$

  $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$

  $\exists$ A.H en $y=0$

  A.O $\rightarrow \nexists$

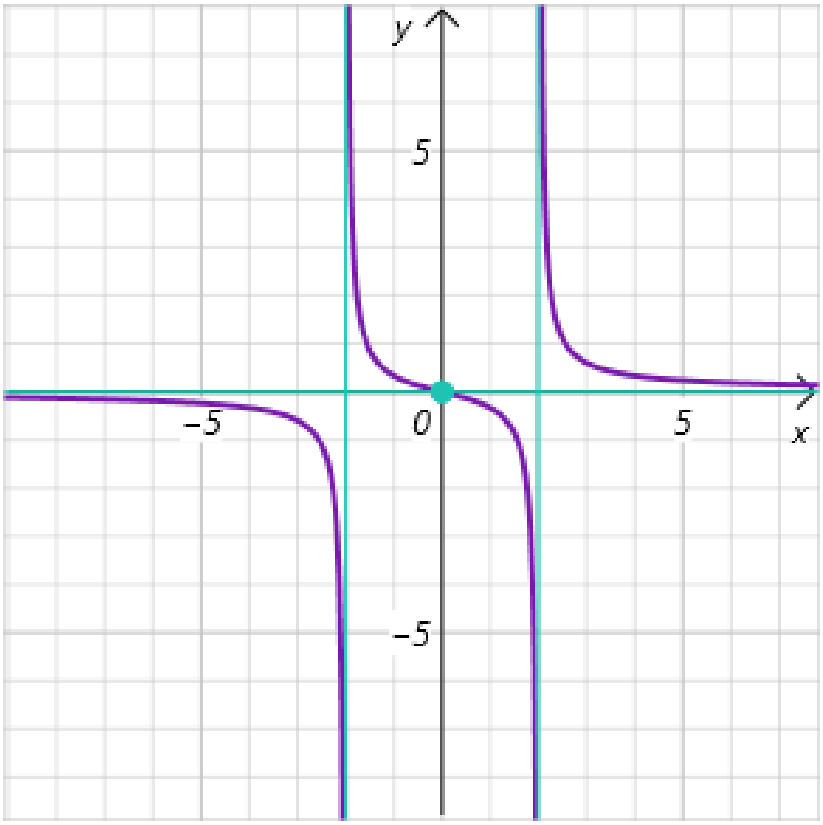
- Monotonía $\rightarrow f'(x)=0$

  $f(x) = \frac{x}{x^2-4} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} \rightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow -x^2=4 \rightarrow x^2=-4$ $\nexists$ Ptos relativos

No hay máx ni mín. Estudiamos crecimiento con ptos NO DOM.

Decreciente en todos sus $\mathbb{R}$ de dominio

$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$



OPCIÓN 2

PROBLEMA 3.

Halla las integrales indefinidas siguientes:

a) (1 punto)

$$\int xe^{x^2}\,dx$$

b) (1,5 puntos)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

1) $\int x\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2}+C$

2) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \longrightarrow \left\{ x=\operatorname{sen}t \longrightarrow dx=\cos t \right\}$

$\hookrightarrow t=\operatorname{arcsen}x$

$= \int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t}\cdot\cos t\,dt = \int\overbrace{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t}}^{\cos t}\cdot\cos t\cdot dt$

$\operatorname{sen}^2t+\cos^2t=1 \rightarrow \cos t=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t}$

$= \int\cos^2t\,dt = \int\frac{1}{2}dt+\int\frac{\cos 2t}{2}dt =$

$\hookrightarrow \cos^2t=\frac{1+\cos 2t}{2}$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{sen} 2t} = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{sen} t\cdot\cos t = \frac{t}{2} + \frac{\overbrace{\operatorname{sen} t}^{x}\cdot\overbrace{\cos t}^{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}}{2}$$

↳ $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\cdot\cos t$

$$\xrightarrow{t=\operatorname{arcsen} x} = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{2} + C$$

PROBLEMA 4.

Se elige un número entero al azar entre el 0 y el 9999 (ambos inclusive) ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor de 4444 y múltiplo de 5?

• método 1

→ múltiplo de 5 desde el 4444 al 10000 :

→ $\frac{4444}{5} < k < \frac{10000}{5}$

→ $888'8 < k < 2000$

el + peque múltiplo de 5 — el + grande múltiplo de 5

→ $2000 - 890 = \boxed{1110}$ múltiplos de 5

• $P = \frac{\text{Fav.}}{\text{Tot}} = \frac{1110}{10000} = \boxed{0'1111}$

• método 2

→ $P(\text{mayor que } 4444) = \frac{5555}{10000}$

→ $P(\text{múltiplo de } 5) = \frac{2}{10}$

↳ de cada 10 números tenemos 2 múltiplos de 5

$P(M4444 \overset{\times}{\cap} \text{Multes})$

$P = \frac{5555}{10000}\cdot\frac{2}{10} = \boxed{0'1111}$