Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia)

Año 2005

Septiembre 2005

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Tres jugadores convienen que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con veinte euros. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

  selcs Sept 2005 Solución:

  Sea:

  x dinero inicial de J_1

  y dinero inicial de J_2

  z dinero inicial de J_3

  Primera partida (pierde J_1): $\left\{\begin{array}{ll} J_1: & x-y-z \\ J_2: & 2y \\ J_3: & 2z \end{array}\right.$

  Segunda partida (pierde J_2): $\left\{\begin{array}{ll} J_1: & 2(x-y-z)=2x-2y-2z \\ J_2: & 2y-(x-y-z)-2z=3y-x-z \\ J_3: & 4z \end{array}\right.$

  Tercera partida (pierde J_3): $\left\{\begin{array}{ll} J_1: & 2(2x-2y-2z)=4x-4y-4z \\ J_2: & 2(3y-x-z)=6y-2x-2z \\ J_3: & 4z-(2x-2y-2z)-(3y-x-z)=7z-x-y \end{array}\right.$

  Al final los tres jugadores tienen 20 €

  $$\left\{\begin{array}{l} 4x-4y-4z=20 \\ 6y-2x-2z=20 \\ 7z-x-y=20 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x-y-z=5, \\ -x+3y-z=10, \\ -x-y+7z=20 \end{array}\right.$$

  Tiene como matriz asociada:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -1 & 7 & 20 \end{array}$$

  Que triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 8 & 80 \end{array}$$

que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z = 10, \quad y = \frac{35}{2}, \quad x = \frac{65}{2}$.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

Una fábrica de tableros de madera pintados produce dos tipos de tableros: tableros normales (una mano de imprimación más otra mano de pintura) y tableros extras (una mano de imprimación y tres manos de pintura). Disponen de imprimación para 10000 m^2 , pintura para 20000 m^2 y tableros sin pintar en cantidad ilimitada. Sus ganancias netas son: 3 euros por el m^2 m de tablero normal y 5 euros por el m^2 de tablero extra.

(a) ¿Qué cantidad de tablero de cada tipo les conviene fabricar para que las ganancias sean máximas?

(b) ¿Y si ganara 1 euro por el m^2 de tablero normal y 4 euros por el m^2 de tablero extra?

selcs Sept 2005 Solución:

$x =$ número de miles de m^2 de tableros normales
$y =$ número de miles de m^2 de tableros extras
Precio total: $f(x, y) = 3000x + 8000y$ € buscamos el máximo

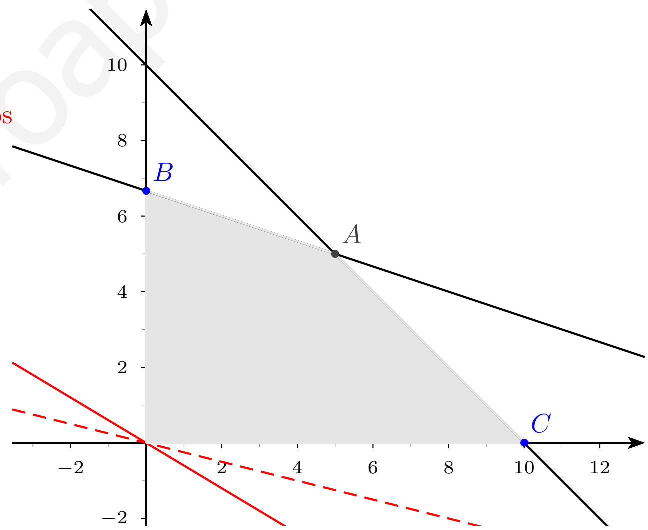
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$

Representamos:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 10 & 0 \end{array} \\ x + 3y \leq 20 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 20 \\ \hline y & 6'66 & 0 \end{array} \end{cases}$$

Ahora la función igualada a 0:

$$f(x, y) = 3000x + 5000y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -5 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$



a) Para maximizar la ganancia tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A.

Hallemos sus coordenadas:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 20 \end{cases} \quad A = (5, 5)$$

$C(5, 5)$, o sea 5000 normales y 5000 extra. El beneficio sería: $f(5, 5) = 3000 \cdot 5 + 5000 \cdot 5 = 40000$ € .

b) Ahora la nueva función de beneficio sería: $f^*(x, y) = x + 4000y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -8 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$

Y el máximo se alcanza en el punto $B(0, 6'6667)$

$f^*(0, 6'6667) = 0 + 4000 \cdot 6'6667 = 26667$ € .

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, se pide:

(a) Hallar el dominio y las asíntotas

(b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

(c) Hacer una representación gráfica aproximada.

selcs Sept 2005 Solución:

a) Dominio y regionamiento: Hallamos las raíces de numerador y denominador:

Anulamos el denominador:

$x^2 - 1 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{array}$

A partir de las raíces de numerador y denominador hallamos los cambios de signo de la función.

Luego delimitan región de cambio de signo de $y: \quad x = 0, x = \pm 1$

x		-1		0		1	
y	-	|	+	|	-	|	+

$y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Además: Dominio $= R - \{-1, 1\}$

b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x = 0$, resulta $y = 0$

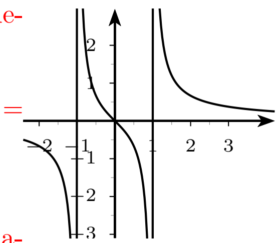
con $OX: y = 0$, resulta el mismo, el origen

c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 1$

Asíntota horizontal $y = n: \quad n = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0; \quad y = 0$



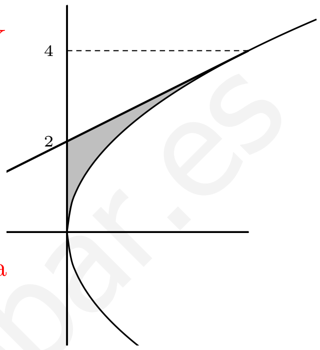
d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$ Anulamos: $-x^2 - 1 = 0$ no tiene solución, luego la derivada es siempre positiva y por tanto la función es siempre decreciente

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

Hallar el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y^2 = 4x$, el eje de ordenadas y la recta $x - 2y + 4 = 0$.

selcs Sept 2005 Solución:

En este caso nos interesa integrar con respecto al eje de ordenadas, intercambian sus papeles x e y:
la recta es: $x = 2y - 4$
los puntos de corte con la parábola son:
$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y^2}{4} \\ x = 2y - 4 \end{array} \right.$ $y^2 = 4(2y-4)$, $y^2 - 8y + 16 = 0$, $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$ doble, luego la recta es tangente a la parábola en el punto $(4,4)$

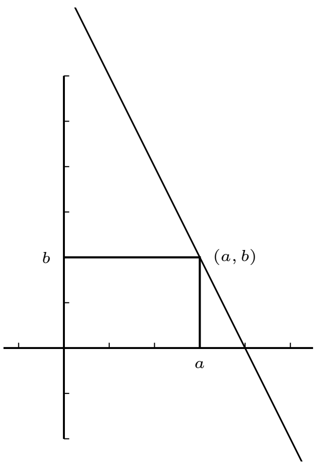


Por tanto el área viene dada por el área de la parábola con el eje OY entre 0 y 4 menos el área del triángulo:
$S = \displaystyle\int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$
Área del triángulo : $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$
Área buscada: $\dfrac{16}{3} - 4 = \dfrac{4}{3}\ u^2$
Otra forma de hacerlo integrando con respecto al eje OX es (recta $y = \dfrac{x}{2} + 2$, parábola $y = \pm\sqrt{4x}$)
Área $= \displaystyle\int_0^4$ recta - parábola $= \displaystyle\int_0^4 (\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{4x})dx =$
$\left[\dfrac{x^2}{4} + 2x - 2\dfrac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \left[\dfrac{x^2}{4} + 2x - 2\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^4 = 4 + 8 - \dfrac{32}{3} = \dfrac{4}{3}\ u^2$

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

  Dentro del triángulo limitado por los ejes OX, OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$. Determinar el punto (a,b) al que corresponde un área máxima.

  selcs Sept 2005 Solución:



Área del rectángulo $S = a \cdot b$ máximo.
Como el punto (a,b) está en la recta cumple la ecuación:
$2a + b = 8$, despejando $b = 8 - 2a$
Sustituyendo $S(a) = a \cdot (8-2a) = 8a - 2a^2$ ha de ser máximo.
Derivando y anulando la derivada:

$S'(a) = 8 - 4a = 0, \quad a = 2$

a		2	
S'	$+$		$-$
S	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

Resulta $b = 8 - 2 \cdot 2 = 4$. El punto es $(2,4)$

- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

  Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

  (a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de abscisas?

  (b) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(2,0)$.

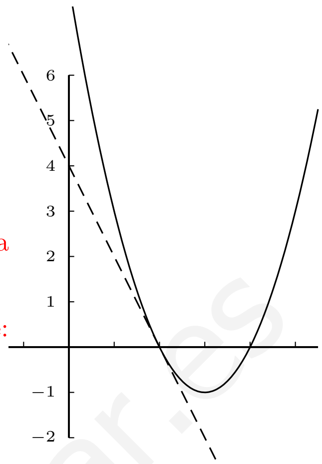
selcs Sept 2005 Solución:

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con OY : $x = 0$, resulta $y = 8$

con OX : $y = 0$, resulta $x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$
El mínimo lo hallamos derivando y anulando la derivada:
$f'(x) = 2x - 6 \quad x = 3 \quad y = f(3) = -1$. El punto es $(3, -1)$

a) Precisamente en el mínimo que al ser cero la derivada dice que la recta tangente es horizontal

b) La recta tangente en el punto x_0 es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde:
$y_0 = f(x_0) = f(2) = 0$
$m = f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$ $\quad$ Queda $y - 0 = -2(x - 2)$
Por tanto la recta tangente en el punto $x = 2$ es $y = -2x + 4$



- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

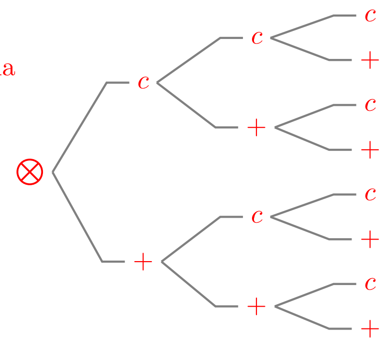
  Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire, de manera que si las tres monedas aparecen de igual modo (tres caras o tres cruces) el jugador gana y en caso contrario se vuelve a tirar.

  (a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?

  (b) ¿Cuál es la probabilidad de perder las dos primeras tiradas y ganar la tercera?

selcs Sept 2005 Solución:

a) Ganar en la primera tirada triple se corresponde con la primera rama , tres caras, o la última, tres cruces, sumando sus probabilidades:
$p($ ganar $) = 0'5^3 + 0'5^3 = 0'25$
b) Perder la primera tirada tiene como probabilidad por lo tanto
$p($ perder $) = 0'75$
Esta probabilidad es independiente de la triple tirada, luego:
$p($ perder $1^a \cap$ perder $2^a \cap$ ganar $3^a) = 0'75 \cdot 0'75 \cdot 0'25 = 0'14$



- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

  En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0'95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber peligro es 0'03. Hallar:

  (a) Probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya habido peligro.

  (b) Probabilidad de que haya un peligro y la alarma no funcione.

selcs Sept 2005 Solución:

Llamamos A al suceso "funcionar la alarma".

Llamamos P al suceso "producirse peligro "; $p(P) = 0'1$; ; además nos dicen que $\quad p(A/P) = 0'95$

Llamamos N al suceso "no producirse peligro "; resulta $p(N) = 0'9$; además nos dicen que $p(A/N) = 0'03$

$\{P, N\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

a) Nos piden $p(N/A) = \dfrac{p(A/N)\cdot p(N)}{p(A/N)\cdot p(N) + p(A/P)\cdot p(P)} = \dfrac{0'03\cdot 0'9}{0'03\cdot 0'9 + 0'95\cdot 0'1} = \dfrac{0'027}{0'027 + 0'095} =$ 0,2213

b) Entiendo que piden la intersección $p(P\cap A^c = p(P).p(A^c/P) = 0'1\cdot 0'05 = 0'005$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  Se desea estudiar el gasto anual de fotocopias (en euros) de los estudiantes de bachillerato en Murcia. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 estudiantes, resultando los valores siguientes:

  100, 150, 90, 70, 75, 105, 200, 120, 80

  Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12.

  Determinar un intervalo de confianza del 95 % para la media del gasto anual en fotocopias por estudiante.

  selcs Sept 2005 Solución:

  Antes que nada calculamos la media de la muestra: $\bar{x} = \dfrac{100 + 150 + 90 + 70 + 75 + 105 + 200 + 120 + 80}{9} =$ 110

  Los datos son: $\bar{x} = 110, \sigma = 12, n = 9$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 110\pm 1'96\cdot\dfrac{12}{\sqrt{9}} = 110\pm 7'89 \begin{cases} 117'89 \\ 102'11 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(102'11, 117'89)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

  El peso de los niños varones a las diez semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 gramos. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 gramos?

  selcs Sept 2005 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 87$ gr ;

  El error $= z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 15 gr

  El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  Sustituyendo: $1'96\cdot\dfrac{87}{\sqrt{n}} \leq 15;$ $\quad 1'96\cdot\dfrac{87}{15} \leq \sqrt{n};$ $\quad (11'368)^2 \leq n;$ $\quad 129'23 \leq n$

  La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 130 para que el nivel de confianza sea del 95 %