Selectividad Matemáticas CCSS (Murcia)

Año 2012

Septiembre 2012

- CUESTIÓN A1.

  Un cliente ha comprado en un supermercado botellas de agua de medio litro, 2 litros y 5 litros, cuyos precios respectivos son 0,5 euros, 1 euro y 3 euros. En total ha comprado 24 botellas, que corresponden a una cantidad de 36 litros, y que le han costado 22 euros. Determinar cuántas botellas de cada tipo ha comprado.

  selcs Sep 2012 Solución:

  x: número de botellas de 1/2 litro

  y: número de botellas de 2 litros

  z: número de botellas de 5 litros

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ x/2+2y+5z=36 \\ x/2+y+3z=22 \end{array}\right.$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1/2 & 2 & 5 & 36 \\ 1/2 & 1 & 3 & 22 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a \cdot 2 + 1^a.(-1) \\ 3^a \cdot 2 + 1^a.(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & 9 & 48 \\ 0 & 1 & 5 & 20 \end{pmatrix} 3^a \cdot (-3) + 2^a \cdot 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & 9 & 48 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

  queda $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ 3y+9z=48 \\ 6z=12 \end{array}\right.$ sustituyendo hacia arriba resulta: $z=2, y=10, x=12$

- CUESTIÓN A2.

  Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{4-x^2}$

  a) Hallar su dominio.

  b) Determinar las asíntotas.

  c) Hallar su función derivada $f'(x)$.

  selcs Sep 2012 Solución:

  a) El denominador se anula para $x=\pm 2$, luego el dominio es $R-\{-2,2\}$

b) Asíntotas verticales, la función se irá a infinito en los puntos en que se anule el denominador:

Asíntotas verticales

- $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{(4)\cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{(4)\cdot 0^+} = +\infty$$

- $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{0^+\cdot 4} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2+1}{(2-x)(2+x)} = \frac{9}{0^-\cdot 4} = -\infty$$

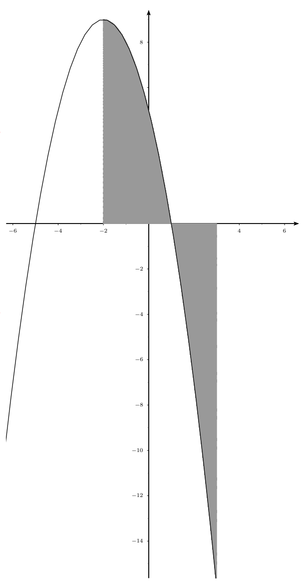
Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{4-x^2} = -2; \quad y = -2$

c) $f'(x) = \dfrac{18x}{(4-x^2)^2}$

- CUESTIÓN A3.

Calcular el area del recinto limitado por la parabola de ecuación $y = -x^2 - 4x + 5$, el eje OX, y las rectas $x = -2$ y $x = 3$ y hacer una representación gráfica aproximada de dicha area.

selcs Sep 2012 Solución:



$-x^2 - 4x + 5 = 0$, tiene soluciones reales $x = -5, x = 1$, por tanto el área viene dada por las integrales:

$$S_1 = \int_{-2}^{1} (-x^2 - 4x + 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 + 5\,x \right]_{-2}^{1} = 18$$

$$S_2 : \int_{1}^{3} (-x^2 - 4x + 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 + 5\,x \right]_{1}^{3} = -\frac{44}{3}, \text{ luego}$$

$$S_2 = \frac{44}{3}$$

Por tanto el área total es $S = \dfrac{98}{3}$ u^2

- CUESTIÓN A4.

Según una encuesta de opinión, el 30 % de una determinada población aprueba la gestión del político A, mientras que el 70 % restante la desaprueba. En cambio, el político B es aprobado por la mitad y no por la otra mitad. Un 25 % de la población no aprueba a ninguno de los dos. Si se elige un individuo de la población al azar:

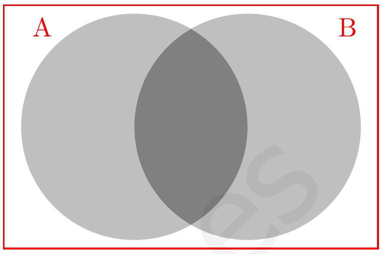
a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe a alguno de los dos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe a los dos políticos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe a alguno de los dos?

selcs Sep 2012 Solución:

Llamamos A al suceso "aprobar A"; $p(A) = 0'3$
Llamamos B al suceso "aprobar B"; $p(B) = 0'5$
Por tanto no aprobar ambos: $p(A^c \cap B^c) = 0'25$



a) Aprobar alguno $A \cup B$ es lo contrario de no aprobar ambos luego $p(A \cup B) = 1 - p(A^c \cap B^c) = 1 - 0'25 = 0'75$

b) Aprobar ambos $A \cap B$, lo obtenemos a partir de la unión: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B); \quad 0'75 = 0'3 + 0'5 - p(A \cap B); \quad p(A \cap B) = 0'05$

c) No aprobar alguno $A^c \cup B^c$ es lo contrario de que aprueben los dos $p(A^c \cup B^c) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0'05 = 0'95$

- CUESTIÓN A5.

Se supone que el número de horas semanales dedicadas al estudio por los estudiantes de una universidad sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 6. Para estimar la media de horas semanales de estudio se quiere utilizar una muestra de tamaño n . Calcular el valor mínimo de n para que con un nivel de confianza del 99 %, el error en la estimación sea menor de 1 hora.

selcs Sep 2012 Solución:

Los datos son: $\sigma = 6$, error $= 1$, nivel de significación $= 0'01$.

Para el nivel de significación $= 0'01$ corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$

Entonces el error viene dado por:

$$\text{error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'58 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$2'58 \cdot \frac{6}{1} \leq \sqrt{n}; \quad n \geq 239'6$$

- CUESTIÓN B1.

Un ayuntamiento desea ajardinar dos tipos de parcelas, tipo A y tipo B, y dispone de 6000 euros para ello. El coste de la parcela A es de 100 euros y el de la B de 150 euros. Se considera conveniente ajardinar al menos tantas parcelas de tipo B como las del tipo A y, en todo caso, no ajardinar más de 30 parcelas de tipo B. ¿Cuántas parcelas de cada tipo tendrá que ajardinar para maximizar el número total de parcelas ajardinadas?, ¿agotará el presupuesto disponible?

selcs Sep 2012 Solución:

Sean:
$x =$ número de parcelas A
$y =$ número de parcelas B
Total de parcelas: $f(x, y) = x + y$

$$\left.\begin{array}{l} 100x + 150y \leq 6000 \\ x \leq y \\ y \leq 30 \end{array}\right\}$$

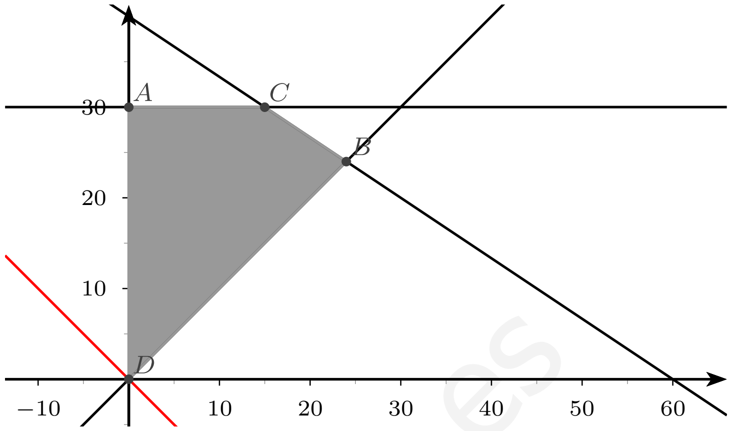
Representamos:

$100x + 150y = 6000$
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 60 \\ \hline y & 40 & 0 \end{array}$$

$x = y$
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 30 \\ \hline y & 0 & 30 \end{array}$$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = x + y = 0$
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & -30 \\ \hline y & 0 & 30 \end{array}$$



Para maximizar el coste tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto B que sería la más lejana: sustituyamos los valores correspondientes a ese punto:

$B(24, 24)$; $\quad f(24, 24) = 24 + 24 = 48$ parcelas, es el mayor número de parcelas.

El coste sería $100 \cdot 24 + 150 \cdot 24 = 6000$ € ., que sí agota el presupuesto disponible.

- CUESTIÓN B2.

Una empresa estima que el beneficio que obtiene por cada unidad de producto que vende depende del precio de venta según la función: $B(x) = -3x^2 + 12x - 9$, siendo $B(x)$ el beneficio y x el precio por unidad de producto, ambos expresados en euros.

a) ¿Entre que precios la función $B(x)$ es creciente?

b) ¿En que precio se alcanza el beneficio máximo?

c) ¿En que precio el beneficio es 3?

selcs Sep 2012 Solución:

a) Derivamos: $S'(x) = -6x + 12$

Anulamos la derivada: $-6x + 12 = 0$; $\quad x = 2$

x		2	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

Será creciente entre 0 y 2.

b) El beneficio máximo corresponderá con $x = 2$

c) $B(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 3; x = 2$, precisamente donde alcanza el máximo, en $x = 2$

- CUESTIÓN B3.

Calcular el área comprendida entre la parabola de ecuación $y = x^2 - 3x + 2$, el eje OX, la recta x $x = 0$ y la recta $x = 2$, y hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

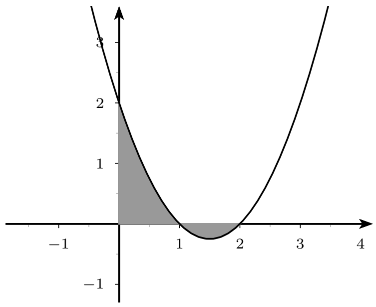
selcs Sep 2012 Solución:

$x^2 - 3x + 2 = 0$, tiene soluciones reales $x = 1, x = 2$, por tanto el área viene dada por las integrales:

$S_1 = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{5}{6}$

$S_2 : \displaystyle\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = -\frac{1}{6}$, luego $S_2 = \dfrac{1}{6}$

Por tanto el área total es $S = \dfrac{6}{6} = 1$ u^2



- CUESTIÓN B4.

El 60 % de los dependientes de un centro comercial tienen 35 años o más, y de ellos el 75 % tienen contrato indefinido. Por otra parte, de los dependientes con menos de 35 años el 30 % tienen contrato indefinido.

a) Seleccionado un dependiente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga contrato indefinido?

b) Elegido al azar un dependiente que tiene contrato indefinido, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 35 años?

selcs Sep 2012 Solución:

Llamamos I al suceso "tener contrato indefinido".

Llamamos A_1 al suceso "tener más de 35 años o más "; $p(A_1) = 0'6; \quad p(I/A_1) = 0'75$

Llamamos A_2 al suceso "tener menos de 35 años"; $p(A_2) = 0'4; \quad p(P/A) = 0'30$

$\{A_1, A_2\}$ forman sistema completo de sucesos.

a) Teorema de la probabilidad total

$p(I^c) = p(I^c/A_1) \cdot p(A_1) + p(I^c/A_2) \cdot p(A_2) = 0'25 \cdot 0'6 + 0'7 \cdot 0'4 = 0'43$

b) Teorema de Bayes

$$p(A_2/I) = \frac{p(I/A_2) \cdot p(A_2)}{p(I/A_1) \cdot p(A_1) + p(I/A_2) \cdot p(A_2)} = \frac{0'3 \cdot 0'4}{0'75 \cdot 0'6 + 0'3 \cdot 0'4} = \frac{0'12}{0'57} = 0'2105$$

- CUESTIÓN B5.

Se sabe que en una población el nivel de colesterol en la sangre se distribuye normalmente con una media de 160 u. y una desviación típica de 20 u. Si una muestra de 120 individuos de esa población que siguen una determinada dieta, supuestamente adecuada para bajar el nivel de colesterol, tiene una media de 158 u. ¿Se puede afirmar que el nivel medio de colesterol de los que siguen la dieta es menor que el nivel medio de la población en general, para un nivel de significación de 0,01?

selcs Sep 2012 Solución:

Como es para disminuir el colesterol, el test adecuado sería el unilateral izquierdo;

Contrastamos $H_0 : \mu = 160$ frente a $H_1 : \mu < 160$,
En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'01$ corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 160 - 2'33 \dfrac{20}{\sqrt{120}} = 155'74$.
que da el intervalo $(155'74, \infty)$.
Como $\bar{x} = 158$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que la media del nivel de colesterol siga igual $\mu = 160$, cabe pensar que la dieta no ha sido efectiva.