Junio 2014

- CUESTIÓN A1.

  Discutir el siguiente sistema por el método de Gauss, según los valores del parámetro a , siendo a un número real distinto de 0.

  $$\begin{cases} ax + y - 2az = 1 \\ ax - y = 2 \\ ax + y + (a-1)z = 3a - 1 \end{cases}$$

  Resolverlo para $a = 1$.

  selcs Jun 2014 Solución:

  $$\left(\begin{array}{rrrr} a & 1 & -2a & 1 \\ a & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-1 & 3a-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} a & 1 & -2a & 1 \\ 0 & -2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 3a-1 & 3a-2 \end{array}\right)$$

  Ya está triangulada, pasando a sistemas resulta:

  $$\begin{cases} ax + y - 2az = 1 \\ -2y + 2z = 1 \\ (3a-1)z = 3a - 2 \end{cases}$$

  Por tanto para $3a - 1 \neq 0$ se puede despejar la z y sustituyendo obtenemos las demás incógnitas (no hay problema con ax de la primera ecuación pues nos dicen que es distinto de 0)

  Luego para $a \neq \frac{1}{3}$ sistema compatible determinado, solución única.

  Para $a = \frac{1}{3}$ quedaría la última ecuación $0z = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -1$, sin solución. El sistema sería incompatible.

  Para $a = 1$ el sistema queda: $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ sustituyendo en el triangulado: $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -2y + 2z = 1 \\ 2z = 1 \end{cases}$

  de solución sustituyendo hacia arriba: $z = \dfrac{1}{2}$; $\quad -2y + 1 = 1; y = 0; \quad x - 1 = 1; x = 2$

- CUESTIÓN A2. El coste de fabricación de un modelo de teléfono móvil viene dado por la función $C(x) = x^2 + 10x + 325$, donde x representa el número de teléfonos móviles fabricados. Supongamos que se venden todos los teléfonos fabricados y que cada teléfono se vende por 80 euros.

  a) Determinar la función de beneficio (definido como ingreso menos coste) que expresa el beneficio obtenido en función de x .

  b) ¿Cuántos teléfonos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

  c) ¿Para qué valores de x se tienen pérdidas (beneficios negativos)?

  selcs Jun 2014 Solución:

  a) Beneficio: $B(x) = 80x - C(x) = -x^2 + 70x - 325$, la gráfica es una parábola abierta hacia abajo.

  b) Buscamos el máximo de $B(x)$, derivando $B'(x) = -2x + 70; -2x + 70 = 0; \quad x = 35; \quad B(35) = 900$ €

  c) Buscamos $B(x) = 0; \quad -x^2 + 70x - 325 = 0; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = 65 \end{cases}$, se producen pérdidas si fabrican menos de 5 móviles o más de 65.

- CUESTIÓN A3.

  Hallar las siguientes integrales indefinidas:

  a) $\displaystyle\int (x^5 - 2x + 3)dx$ b) $\displaystyle\int (2\ e^x + 5)dx$

  selcs Jun 2014 Solución:

  a) $\displaystyle\int (x^5 - 2x + 3)dx = \frac{x^6}{6} - \frac{2x^2}{2} + 3x = \frac{x^6}{6} - x^2 + 3x + C$

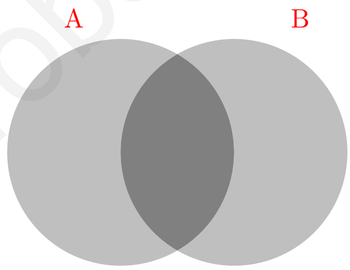
  b) $\displaystyle\int (2\ e^x + 5)dx = 2\ e^x + 5x + C$

- CUESTIÓN A4.

  Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, calcule $P(A)$ y $P(B)$ sabiendo que son independientes y que $P(A^c) = 0'6$ y $P(A \cup B) = 0'7$.

  selcs Jun 2014 Solución:

  $p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - 0'6 = 0'4$

  Como son independientes $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Entonces:
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$
  sustituyendo:
  $0'7 = 0'4 + p(B) - 0'4 \cdot p(B); \quad 0'7 = 0'4 + 0'6 \cdot p(B)$
  $p(B) = \dfrac{0'3}{0'6} = \dfrac{1}{2} = 0'5$

- CUESTIÓN A5.

  El peso (en gramos) de los pollos que llegan a un matadero sigue una distribución normal con desviación típica de 315 g. Sabiendo que una muestra de 64 pollos ha dado un peso medio de 2750 g, hallar un intervalo de confianza para el peso medio con un nivel de confianza del 97 %.

  selcs Jun 2014 Solución:

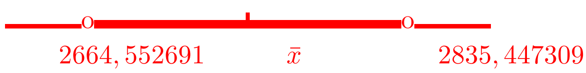
  Los datos son: $\bar{x} = 2750, \sigma = 315, n = ,64$

  Para el nivel de confianza del 97 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,170090378$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

  $$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2750 \pm 2,170090378 \cdot \frac{315}{\sqrt{64}} = 2750 \pm 85,44730862 \begin{cases} 2664,552691 \\ 2835,447309 \end{cases}$$

  El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(2664,552691; 2835,447309)$

  con probabilidad 97 % μ está en: 

- CUESTIÓN B1.

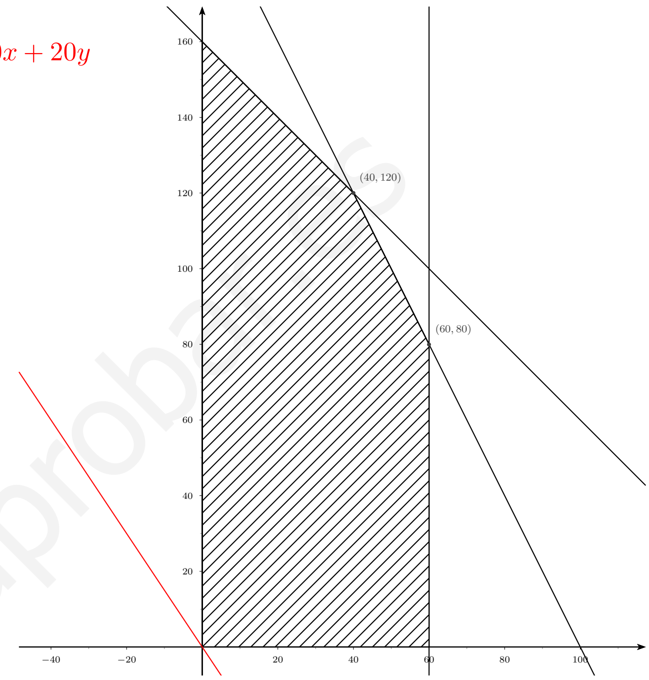
  Una fábrica de tintas dispone de 1000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y el de tinta del cartel requiere 5 kg de A y 5 kg de B. Obtiene un beneficio de 30 euros por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 euros por cada uno de tinta para carteles. Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

selcs Jun 2014 Solución:

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x = n^0$ de botes de tinta para etiqueta,

$y = n^0$ de botes de tinta para cartel. Ganancia: $F(x, y) = 30x + 20y$



color A:

$10x + 5y \leq 1000 \quad (1)$

x	0	100
y	200	0

color B:

$5x + 5y \leq 800 \quad (2)$

x	0	40
y	40	0

color C:

$5x \leq 300;$

$quad x \leq 60$

además: $x \geq 0 \quad y \geq 0$ pues x e y no pueden ser negativas

2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x, y) = 0 \quad 30x + 20y = 0$

x	0	-205
y	0	30

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$$\begin{cases} 10x + 5y = 1000 \\ 5x + 5y = 800 \end{cases} \quad \text{es } (40, 120)$$

Luego para obtener la mayor ganancia el fabricante deberá producir 40 botes de tinta para etiqueta y 120 botes de tinta para cartel.

El beneficio máximo será entonces: $F(40, 120) = 30 \cdot 40 + 20 \cdot 140 = 3600$ euros.

- CUESTIÓN B2.

La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 + 4x + a$, siendo a un número real. Calcular a para que el área encerrada por la gráfica, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 57 .

selcs Jun 2014 Solución:

Como la función es positiva en la zona de integración el área viene dada directamente por la integral:

$$S = \int_0^3 (x^2 + 4x + a)dx =$$

Hallamos la primitiva

$$\int (x^2 + 4x + a)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + ax = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + ax + C$$

$$S = \int_0^3 (x^2 + 4x + a)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + ax\right]_0^3 = \frac{27}{3} + 18 + 3a - 0 = 27 + 3a = 57; \quad 3a = 30; \quad a = 10$$

- CUESTIÓN B3.

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+2}$ b) $g(x) = \ln(x^2 - 5x)$

selcs Jun 2014 Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (x+2) - e^{2x}}{(x+2)^2}$

b) $g'(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x}$

- CUESTIÓN B4.

En una población el 60 % de los individuos toma diariamente leche y el 40 % toma diariamente yogur. Además, el 30 % de los individuos toma leche y yogur diariamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo tome a diario leche pero no yogur?

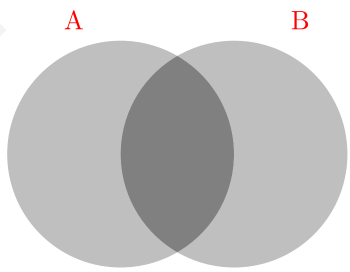
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome a diario leche o yogur?

c) Si un individuo toma diariamente leche, ¿qué probabilidad hay de que también tome a diario yogur?

selcs Jun 2014 Solución:

A = suceso tomar leche B = suceso tomar yogur

Piden a) $p(A \cap B^c)$; b) Entendemos que es la unión no exclusiva $p(A \cup B)$; c) $p(B/A)$



b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'6 + 0'4 - 0'3 = 0'7$

c) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'3}{0'6} = 0'5$

a) Como $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ disjunta, sustituyendo: $p(A) = p(A \cap B^c) + p(A \cap B); 0'6 = p(A \cap B^c) + 0'3;\quad p(A \cap B^c) = 0'3$

- CUESTIÓN B5.

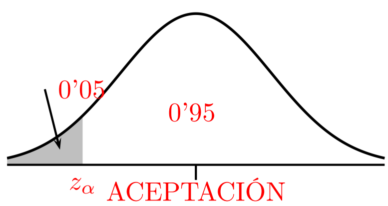
El tiempo de espera para recibir un tratamiento médico es, en promedio, de 30 días. Después de tomar medidas para intentar reducirlo, para una muestra de 80 pacientes el tiempo medio de espera es de 27 días. Suponiendo que el tiempo de espera sigue una distribución normal con una desviación típica igual a 8, plantear un test para contrastar que las medidas no han mejorado la situación frente a que sí lo han hecho. ¿Cuál es la conclusión a la que se llega con un nivel de significación del 5 %?

selcs Jun 2014 Solución:

Como debemos suponer que la campaña es para disminuir el tiempo de espera, el test más adecuado sería el unilateral izquierdo;

Contrastamos $H_0 : \mu = 30$ frente a $H_1 : \mu < 30$,

En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_\alpha = 1'65$.



El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 1'65 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 30 - 1'65 \dfrac{8}{\sqrt{80}} = 28'52$.

que da el intervalo $(28'52, \infty)$.

Como $\bar{x} = 27$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que la media tiempo de espera siga igual $\mu = 30$, cabe pensar que las medidas han sido efectivas.