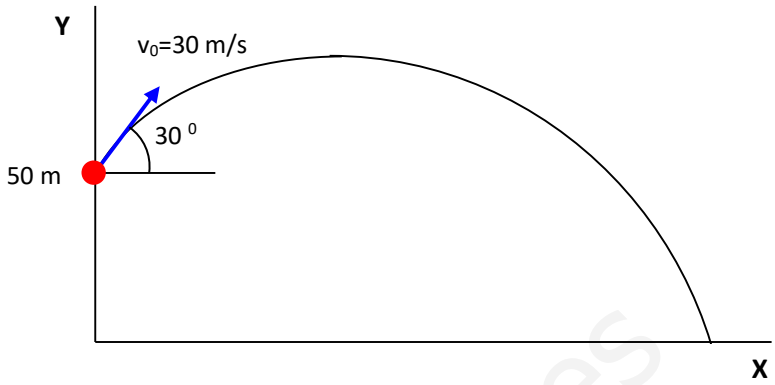
Desde lo alto de un acantilado de 50 m de altura se lanza un objeto con una velocidad de 30 m/s y con un ángulo 30º. Determinar: a) Altura máxima. b) Alcance máximo. c) Ecuación de la trayectoria. d) Vector de posición. e) Vector velocidad. f) Velocidad de impacto. g) Ángulo de impacto:



a) Altura máxima:

Pida lo que se pida calcular lo primero es calcular v_{0x} y v_{0y}

$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 30 \cos 30 = 26$ m/s

$v_{0y} = v_0$ sen $\alpha = 30$ sen30 = 15 m/s

Para altura máxima tenemos que $V_y = 0$

$v_y = v_{0y} + gt \rightarrow 0 = 15 - 10t \rightarrow t = 1{,}5$ s

por tanto de $y = y_0 + v_{0y} t + 1/2\, g\, t^2 \rightarrow y = 50 + 15*1{,}5 + ½\,(-10)*1{,}5^2 =$ **61,25 m altura máxima.**

Pero más sencillo aplicando $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a(y - y_0) \rightarrow 0^2 = 15^2 + 2(-10)(y - 50) \rightarrow 0 = 225 - 20y + 1000 \rightarrow y =$ ..,25 m

b) Alcance máximo:

El alcance máximo significa que y = 0 (salvo que el cuerpo vaya o deba caer a una altura determina)

por tanto de $y = y_0 + v_{0y} t + 1/2\, g\, t^2 \rightarrow 0 = 50 + 15t + ½\,(-10)t^2 \rightarrow 5t^2 - 15t - 50 = 0 \rightarrow t = 5$ s

de $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 0 + 26*5 =$ **130 m alcance máximo**

c) Ecuación de la trayectoria :

la ecuación de la trayectoria es obtener la ecuación y = f(x) correspondiente. Nos indica el valor de y para cada x

De $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 26t \rightarrow t = x/26$ que sustituimos en $y = y_0 + v_{0y}t + ½\, gt^2 \rightarrow y = 50 + 15*x/26 - 5(x/26)^2$

$y = 50 + 0{,}577x - x^2/135$ es la ecuación de la trayectoria.

d) Vector de posición:

El vector de posición es **r** = x**i** + y**j** donde **r**, **i** y **j** son vectores

→ **r** = $(x_0 + v_{0x}t)$**i** + $(y_0 + v_{0y}t + ½\, gt^2)$**j** → **r = 26ti + (50 + 15t -5t^2)j** Nos indica la posición para cada valor de t

e) Vector velocidad:

Es el vector **v=** v_x**i** + v_y**j** **v**, **i** y **j** son vectores.

v = v_{0x}**i** + $(v_{0y} + gt)$**j** → **V = 26i + (15 -10t)j** Nos indica la velocidad vectorial para cada t.

f) Velocidad de impacto.

Cuando toca el suelo y = 0 (en nuestro caso)

Por tanto de $y = y_0 + v_{0y} t + 1/2\, g\, t^2$ $0 = 50 + 15t - 5\, t^2$ t = 5 s (que ya sabíamos al calcular el alcance máximo)

Y las velocidades serán

$v_x = v_{0x} = 26$ m/s

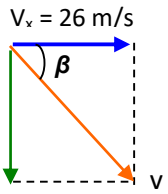
$v_y = v_{0y} + gt \rightarrow v_y = 15 - 10*5 = -35$ m/s El signo menos indica que apunta hacia abajo.

www.yoquieroaprobar.es

Por tanto:

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v^2 = 26^2 + (-35)^2 \rightarrow$ **v = -43,6 m/s**

V_y = -35m/s



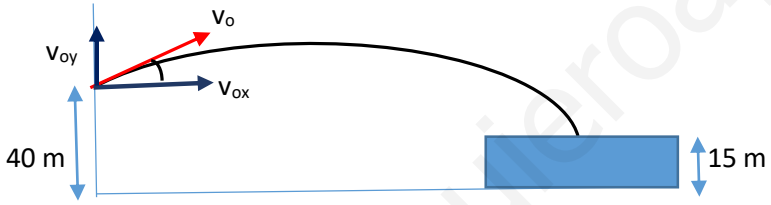
Aplicamos el signo menos porque está bajando. Sabemos que está bajando porque el punto de impacto está por debajo de la altura máxima (puede darse el caso de que el impacto ocurra mientras asciende).
La velocidad de impacto es mayor que la de salida ya que tiene que bajar los 50 m iniciales (cuando esté a 50m de altura bajando será -30 m/s)

g) Ángulo de impacto:

Es el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo. Observando la figura del apartado anterior tenemos que:

tg $\beta = v_y/v_x = (-35)/26 \rightarrow \beta = -53{,}4^o$ *(el signo negativo indica la dirección del ángulo tal como está calculado)*

Desde una altura de 40 m se lanza una flecha con un ángulo de 30 º y una velocidad de 50 m/s. Si se sabe que va a caer sobre una plataforma situada a 15 m. Determinar:
a) Tiempo que tarda en llegar. b) Altura máxima. c) alcance. d) Altura a los 3s. e) Velocidad en el eje Y a los 3s. f) Velocidad de impacto. g) ecuación de la trayectoria. h) ¿A qué altura está cuando ha recorrido 250m en X.



Primero calculamos v_{0x} y v_{oy}

v_{ox} = 50cos30 = 43,3 m/s
v_{oy} = 50sen30 = 25 m/s

Usaremos g = -10 m/s²

a) Para cuando llegue al suelo estará a 15m $\rightarrow$ $y = y_0 + v_{0y}\,t + 1/2\,g\,t^2 \rightarrow 15 = 40 + 25t - 5t^2 \rightarrow$ **t = 5,85 s**

b) Altura máxima $\rightarrow$ $v_{oy} = 0 \rightarrow$ $v_y = v_{0y} + gt \rightarrow 0 = 25 - 10t \rightarrow t = 2{,}5$ s

por tanto de $y = y_0 + v_{0y}\,t + 1/2\,g\,t^2 \rightarrow y = 40 + 25\cdot 2{,}5 + ½\,(-10)\cdot 2{,}5^2 =$ **71,25 m altura máxima.**

Pero más sencillo aplicando $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a(y - y_0) \rightarrow 0^2 = 25^2 + 2(-10)(y - 40) \rightarrow 0 = 625 - 20y + 800 \rightarrow y = 71{,}25$ m

c) El alcance máximo significa que y = 15m
por tanto de $y = y_0 + v_{0y}\,t + 1/2\,g\,t^2 \rightarrow 15 = 40 + 25t + ½\,(-10)t^2 \rightarrow 5t^2 - 25t - 25 = 0 \rightarrow t = 5{,}85$ s (ya calculado)
de $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 0 + 43{,}3\cdot 5{,}85 =$ **253,3 m alcance máximo**

d) de $y = y_0 + v_{0y}\,t + 1/2\,g\,t^2 \rightarrow y = 40 + 25\cdot 3 + ½\,(-10)\cdot 3^2 =$ **70 m altura** (ya está bajando pues a pasado más de los 2,5 s de la altura máxima.

e) de $v_y = v_{0y} + gt \rightarrow v_y = 25 - 10\cdot 3 \rightarrow$ **v_y = -5m/s** negativa significa que está bajando (como ya afirmamos en el apartado anterior.

www.yoquieroaprobar.es

f) Para la velocidad de impacto:

$v_x = v_{0x} = 43{,}3$ m/s usamos el tiempo del impacto

$v_y = v_{0y} + gt \rightarrow v_y = 25 - 10 \cdot 5{,}85 = -33{,}5$ m/s El signo menos indica que apunta hacia abajo

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v^2 = 43{,}3^2 + (-33{,}5)^2 \rightarrow$ **v = -54,75 m/s** usamos la respuesta negativa puesto que está bajando.

g) la ecuación de la trayectoria es obtener la ecuación y = f(x) correspondiente. Nos indica el valor de y para cada x

De $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 43{,}3t \rightarrow t = x/43{,}3$ que sustituimos en $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} gt^2 \rightarrow y = 40 + 25 \cdot x/43{,}3 - 5(x/43{,}3)^2$

$y = 40 + 0{,}577x - x^2/375$ es la ecuación de la trayectoria.

h) Usando la ecuación de la trayectoria : $y = 40 + 0{,}577x - x^2/375 \rightarrow y = 40 + 0{,}577 \cdot 250 - 250^2/375 =$ **17,6 m** está 2,6 m (17,6 – 15) por encima del lugar de impacto.

Muchas veces en la cancha del instituto pegan un patadón a la pelota que hace que salte la valla y se vaya a la Avda. Lora y Tamayo.

Si un alumno le da una patada al balón comunicándole una velocidad de 24 m/s con un ángulo de 55° y a una distancia de 53m de la valla de la cancha, la cual tiene una altura de 7 m, calcular si la pelota pasa sobre la valla o choca contra ella.

SOLUCIÓN:

En primer lugar, como siempre, lo primero es descomponemos velocidad inicial v_0 en sus dos componentes.

La componente X de la velocidad será:

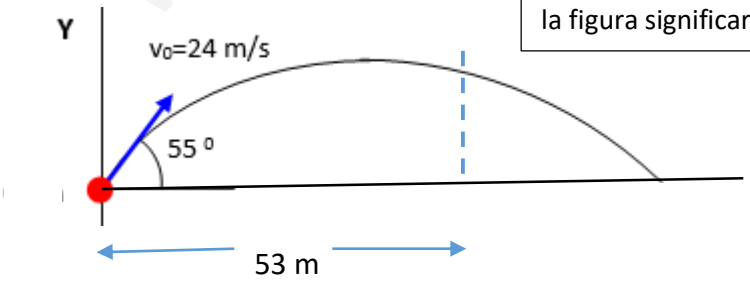
$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta = 24 \cdot \cos 55^\circ = 13{,}77\ m/s$$

La componente Y de la velocidad inicial será:

$$v_{0y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta = 24 \cdot \operatorname{sen} 55^\circ = 19{,}66\ m/s$$

Lo que vamos a hacer es ver el tiempo que se tarda en recorrer los 53 m, en horizontal, que le separan de la valla. Y luego con ese tiempo ver la altura que ha alcanzado: si es mayor de 7 m → salta a la avenida, si es menor chocará contra la valla.

La trayectoria no se sabe aún como es, en el caso de la figura significaría que choca contra la valla.



$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow 53 = 0 + 13{,}77 \cdot t \rightarrow t = \frac{53}{13{,}77} = 3{,}85\ seg$$

www.yoquieroaprobar.es

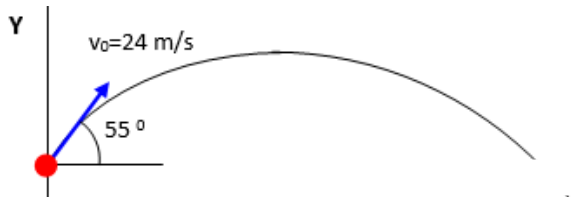
Veamos ahora la altura alcanzada:

$$y_{muro} = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y_{muro} = 0 + 19{,}66 \cdot 3{,}85 + \frac{1}{2} \cdot (-9{,}81) \cdot 3{,}85^2 = \boxed{\textbf{2,99 m}}$$

Tranquilos, no llegó ni a la mitad de la valla.

Un alumno le da una patada, a ras del suelo, a un balón comunicándole una velocidad de 24 m/s con un ángulo de 55°. Determinar: a) Altura máxima que alcanza. b) Alcance máximo. c) Ecuación de la trayectoria. d) Vector de posición. e) Vector velocidad. f) velocidad de impacto. g) ángulo de impacto.



En este ejercicio se emplea g = -9,81 m/s^2 para comparar resultados con el ejercicio anterior (el del patadón y la valla), que también usó ese valor.

Lo primero siempre es obtener las componentes v_{0x} y v_{oy}

La componente X de la velocidad será:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta = 24 \cdot \cos 55° = 13{,}77\ m/s$$

La componente Y de la velocidad inicial será:

$$v_{0y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta = 24 \cdot \operatorname{sen} 55° = 19{,}66\ m/s$$

a) Altura máxima:

Para altura máxima tenemos que $V_y = 0$

$v_y = v_{0y} + gt \rightarrow 0 = 19{,}66 - 9{,}81t \rightarrow t = 2{,}004$ s

por tanto de $y = y_0 + v_{0y}\, t + 1/2\, g\, t^2 \rightarrow y = 0 + 19{,}66 \cdot 2{,}004 - ½\,(-9{,}81) \cdot 2{,}004^2 =$ **19,7 m altura máxima.**

Pero también se puede aplicar $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a(y - y_0) \rightarrow 0^2 = 19{,}66^2 + 2(-9{,}81)(y - 0) \rightarrow y = 19{,}7$ m

b) Alcance máximo:

El alcance máximo significa que y = 0 (salvo que el cuerpo vaya o deba caer a una altura determina)

por tanto de $y = y_0 + v_{0y}\, t + 1/2\, g\, t^2 \rightarrow 0 = 0 + 19{,}66t + ½\,(-9{,}81)t^2 \rightarrow 4{,}905t^2 - 19{,}66t = 0 \rightarrow t = 4{,}008$ s

de $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 0 + 13{,}77 \cdot 4{,}008 =$ **55,2 m alcance máximo**

Un detalle. Ver que el tiempo del alcance máximo es el doble que el de la altura máxima, ya que es un tiro simétrico, sale de la misma altura (cero metros) a la que luego llega (cero).

c) Ecuación de la trayectoria :

la ecuación de la trayectoria es obtener la ecuación y = f(x) correspondiente. Nos indica el valor de y para cada x

De $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 0 + 13{,}77t \rightarrow t = x/13{,}77$ que sustituimos en $y = y_0 + v_{0y}t + ½\, gt^2 \rightarrow$

$y = 0 + 19{,}66 \cdot x/13{,}77 + ½\,(-9{,}81)(x/13{,}77)^2$ (uso el valor de 9,81 para hacer una comparación con el ejercicio del patadón y la valla. $\rightarrow$

$$\mathbf{y = 1{,}428x - x^2/38{,}66}$$ es la ecuación de la trayectoria.

Comprobemos (con el ejercicio original del patadón) la altura a la que estaría el balón cuando recorrió los 53m que le separaban de la valla:

www.yoquieroaprobar.es

Aplicamos $y = 1{,}428x - x^2/38{,}66$ → $y = 1{,}428\cdot 53 - 53^2/38{,}66 = 75{,}68 - 72{,}66 = 3$ m → 2,99m habíamos calculado. Y por cierto, estaba bajando, ya que el alcance máximo era de 55,2 y ya había recorrido 53 m.

La ecuación de la trayectoria nos da el valor de y (altura) para cada valor de x (alcance).

d) Vector de posición:

El vector de posición es $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

→ $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ → $\vec{r} = (x_0 + v_{0x}t)\vec{\imath} + (y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} gt^2)\vec{\jmath}$ → $\vec{r} = \mathbf{13{,}77t\vec{\imath} + (19{,}66 - 4{,}905t^2)\vec{\jmath}}$

Nos indica la posición (x,y) para cada valor de t

e) Vector velocidad:

Es el vector $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$ Como $v = v_{oy}$ y $v_y = v_{0y} + gt$ → $\vec{v} = v_{0x}\vec{\imath} + (v_{0y} + gt)\vec{\jmath}$

y sustituyendo valores → $\vec{V} = \mathbf{13{,}77\vec{\imath} + (19{,}66 - 9{,}81t)\vec{\jmath}}$ Nos indica la velocidad vectorial para cada t.

Y para calcular la V en cada momento aplicaremos: $v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$

f) Velocidad de impacto.

Cuando toca el suelo y = 0 (en nuestro caso)

Por tanto de $y = y_0 + v_{0y}t + 1/2\, g\, t^2$ $0 = 0 + 19{,}66t - 4{,}905t^2$ → t = 4s (que ya sabíamos al calcular el alcance máximo)

Y las velocidades serán

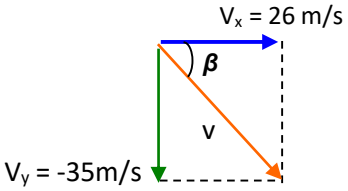
$v_x = v_{0x} = 13{,}77$ m/s

$v_y = v_{0y} + gt$ → $v_y = 19{,}66 - 9{,}81\cdot 4 = -19{,}6$ m/s El signo menos indica que está bajando.

Por tanto:

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ → $v^2 = 13{,}77^2 + (-19{,}6)^2$ → **v = -23,95 m/s**

la raíz cuadrada tiene solución +/- y en nuestro caso es la negativa puesto que está bajando. Su valor es casi el de partid porque ya casi está al final del trayecto



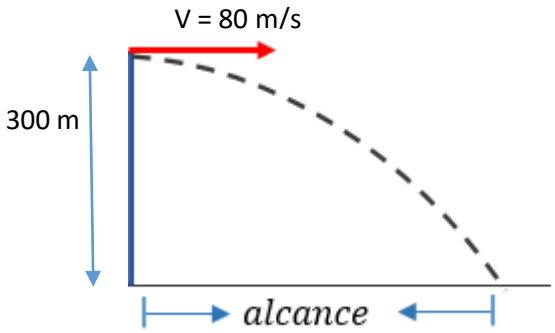
g) Ángulo de impacto:

Es el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo. Observando la figura del apartado anterior tenemos que:

tg $\beta = v_y/v_x = (-19{,}6)/13{,}77$ → $\boldsymbol{\beta = -54{,}99^o}$ *el signo negativo indica la dirección del ángulo tal como está calculado, y el valor es casi los 55º iniciales ya que está casi al final del trayecto (que es simétrico)*

Un avión en vuelo horizontal a una altura de 300 m y con una velocidad de 80 m/s, deja caer un paquete sobre una isla. Determinar: a) Altura máxima que alcanza. b) Alcance máximo. c) Ecuación de la trayectoria. d) Vector de posición. e) Vector velocidad. f) velocidad de impacto. g) ángulo de impacto. ***Emplearemos g = 10 m/s²***

www.yoquieroaprobar.es



Siempre lo primero es obtener las componentes v_{0x} y v_{oy} pero en este caso es muy fácil:
$v_{0x} = 80$ m/s El tiro es horizontal, es decir en la dirección de X
$v_{oy} = 0$ Inicialmente no tiene componente en Y, la irá adquiriendo a medida que se desplaza.

a) Altura máxima que alcanza.

Directamente 300 m, que es la altura desde la que suelta el paquete.

Ahora, el resto, es aplicar la misma técnica que para el tiro parabólico

b) Alcance máximo.

El alcance máximo significa que y = 0 (salvo que el cuerpo vaya o deba sobre una altura determina)

por tanto de $y = y_0 + v_{0y}\, t + 1/2\, g\, t^2 \rightarrow 0 = 300 + 0 + ½\,(-10)t^2 \rightarrow t = 7{,}75$ s

de $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 0 + 80 \cdot 7{,}75 =$ **620 m alcance máximo**

Un detalle muy importante.

En muchos ejercicios el enunciado puede ser: *Un avión en vuelo horizontal a una altura de 300 m y con una velocidad de 80 m/s, debe hacer que un paquete de alimentos caiga sobre un determinado punto de una isla. ¿A qué distancia antes hay que soltar el paquete para que caiga en ese punto?*

Pues bien, ese punto es el que acabamos de calcular, los 620m, ya que ese alcance debe coincidir con el punto de la isla.

c) Ecuación de la trayectoria.

la ecuación de la trayectoria es obtener la ecuación y = f(x) correspondiente. Nos indica el valor de y para cada x

De $x = x_0 + v_{0x}t \rightarrow x = 0 + 80t \rightarrow t = x/80$ que sustituimos en $y = y_0 + v_{0y}t + ½\, gt^2 \rightarrow$

$y = 300 + 0 + ½\,(-10)(x/80)^2 \rightarrow$ **$y = 300 - x^2/1280$** es la ecuación de la trayectoria.

d) Vector de posición:

El vector de posición es $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$\rightarrow \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \rightarrow \vec{r} = (x_0 + v_{0x}t)\vec{\imath} + (y_0 + v_{0y}t + ½\, gt^2)\vec{\jmath} \rightarrow$ **$\vec{r} = 80t\vec{\imath} + (300 - 5t^2)\vec{\jmath}$**

Nos indica la posición (x,y) para cada valor de t

e) Vector velocidad:

Es el vector $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$ Como $v = v_{oy}$ y $v_y = v_{0y} + gt \rightarrow \vec{v} = v_{0x}\vec{\imath} + (v_{0y} + gt)\vec{\jmath}$

y sustituyendo valores $\rightarrow$ **$\vec{V} = 80\vec{\imath} + (300 - 10t)\vec{\jmath}$** Nos indica la velocidad vectorial para cada t.

Y para calcular la V en cada momento aplicaremos: $v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$

www.yoquieroaprobar.es

f) Velocidad de impacto.

Cuando toca el suelo y = 0 (en nuestro caso)

Por tanto de $y = y_0 + v_{0y}\, t + 1/2\, g\, t^2$ $0 = 300 + 0 - 5t^2$ → t = 7,75 s (que ya sabíamos al calcular el alcance máximo)

Y las velocidades serán

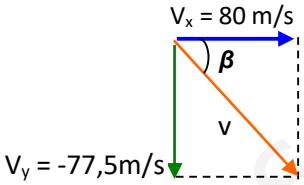
$v_x = v_{0x} = 80$ m/s

$v_y = v_{0y} + gt$ → $v_y = 0 - 10 \cdot 7{,}75 = -77{,}5$ m/s El signo menos indica que está bajando.

Por tanto:

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ → $v^2 = 80 + (-77{,}5)^2$ → **v = -111,4 m/s**

la raíz cuadrada tiene solución +/- y en nuestro caso es la negativa puesto que está bajando. Su valor es casi el de partid porque ya casi está al final del trayecto



g) Ángulo de impacto:

Es el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en el momento de llegar al suelo. Observando la figura del apartado anterior tenemos que:

tg $\beta = v_y/v_x = (-77{,}5)/80$ → ***β = -44,1º*** *el signo negativo indica la dirección del ángulo tal como está calculado.*

www.yoquieroaprobar.es