5 SECUENCIAS NUMÉRICAS

1 SUCESIONES

Página 73

1 Añade los tres términos siguientes en cada una de estas sucesiones:

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

a) 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45

b) 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384

d) 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12

e) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 8, 10

2 Describe el criterio con el que se ha formado cada una de las seis sucesiones del ejercicio anterior.

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 10 y sumando 5 a cada termino para obtener el siguiente.

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 80 y restando 10 a cada término para obtener el siguiente.

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 3 y multiplicando por 2 cada término para obtener el siguiente.

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 1 y alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener el siguiente.

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

Los dos primeros términos son 2 y 5 y, a partir de ahí, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

El primer término de la sucesión es 4 y se construye alternando la suma de 2 y la resta de 1 a cada término para obtener el siguiente.

3 Forma seis sucesiones que empiecen por 6 y que se construyan con los mismos criterios que las del ejercicio 1.

a) 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, …

b) 6, –4, –14, –24, –34, –44, …

c) 6, 12, 24, 48, 96, 192, …

d) 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, …

e) 6, 5, 11, 16, 27, 43, …

f) 6, 8, 7, 9, 8, 10, 9, …

4 **Añade a esta sucesión los cuatro términos siguientes, y describe el criterio con el que se ha formado:**

10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, …

Los cuatro términos siguientes $\rightarrow$ 22, 23, 25, 26

El primer término de la sucesión es el 10 y se ha formado alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener así el siguiente.

Página 74

5 **Asocia cada sucesión con su término general, y exprésalo como en el ejemplo:**

- **k) 4, 9, 14, 19, 24, … → $k_n = 5n - 1$**

a) 7, 8, 9, 10, 11, …
b) –2, –1, 0, 1, 2, …
c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; …
d) 0, 2, 4, 6, 8, …
e) 3, 6, 9, 12, …
f) 4, 7, 10, 13, …
g) 0, 3, 8, 15, 24, …

$n^2 - 1$
$n : 2$
$3n + 1$
$n - 3$
$2(n - 1)$
$3n$
$n + 6$

a) 7, 8, 9, 10, 11, … → $a_n = n + 6$
b) –2, –1, 0, 1, 2, … → $b_n = n - 3$
c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; … → $c_n = n : 2$
d) 0, 2, 4, 6, 8, … → $d_n = 2(n - 1)$
e) 3, 6, 9, 12, … → $e_n = 3n$
f) 4, 7, 10, 13, … → $f_n = 3n + 1$
g) 0, 3, 8, 15, 24, … → $g_n = n^2 - 1$

6 **Halla el término general de cada una de las sucesiones siguientes:**

a) 2, 3, 4, 5, 6, …
b) 0, 1, 2, 3, 4, …
c) 4, 8, 12, 16, 20, …
d) 4, 7, 10, 13, 16, …
e) 10, 20, 30, 40, 50, …
f) 12, 22, 32, 42, 52, …
g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, …
h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, …

a) 2, 3, 4, 5, 6, … → $a_n = n + 1$
b) 0, 1, 2, 3, 4, … → $b_n = n - 1$
c) 4, 8, 12, 16, 20, … → $c_n = 4n$
d) 4, 7, 10, 13, 16, … → $d_n = 3n + 1$
e) 10, 20, 30, 40, 50, … → $e_n = 10n$
f) 12, 22, 32, 42, 52, … → $f_n = 10n + 2$
g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, … → $g_n = 10^n$
h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, … → $h_n = 10^n + n$

Página 75

7 **Para construir estas sucesiones, se han utilizado, no consecutivamente, los criterios que ves debajo:**

a) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, …

c) 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, …

d) 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; …

e) 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, …

— Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, …

— Sumar los dos términos anteriores.

— Sumar los tres términos anteriores.

— Restar los dos términos anteriores.

— Promediar los dos términos anteriores.

Identifica cuál corresponde a cada una y continúalas hasta el término s_{10}.

a) Sumar los dos términos anteriores → 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123

b) Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, … → 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46

c) Restar los dos términos anteriores → 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, –54, 88, –142

d) Promediar los dos términos anteriores → 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; 4,625; 4,6875; 4,65625

e) Sumar los tres términos anteriores → 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, 115, 212, 390

8 **Asocia cada sucesión con una de las igualdades que ves a la derecha, y describe verbalmente el criterio con el que se han construido:**

a) 40, 39, 37, 34, 30, …

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, …

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, …

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1} \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1} \\ a_{n+1} = a_n - n \end{array}}$$

a) 40, 39, 37, 34, 30, … → $a_{n+1} = a_n - n$

a_{n+1} es el término anterior menos la posición que ocupa este último.

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, … → $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$

a_{n+2} es el doble del término que ocupa dos lugares menos más el término anterior.

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, … → $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$

a_{n+2} es el término que ocupa dos lugares menos, menos el término anterior.

9 **Observa esta sucesión y calcula los tres términos siguientes:**

$$1 \xrightarrow{+2\cdot 1} 3 \xrightarrow{+2\cdot 2} 7 \xrightarrow{+2\cdot 3} 13 \xrightarrow{+2\cdot 4} 21 \quad \dots$$

Escribe una igualdad que exprese la relación entre dos términos consecutivos, a_n y a_{n+1}.

Los tres términos siguientes son 31, 43, 57.

La relación entre dos términos consecutivos es $a_{n+1} = a_n + 2n$.

2 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Página 77

1 **Escribe los diez primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y cuya diferencia es 7. Calcula su suma.**

$a_1 = 8$ $\qquad d = 7$

8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(8+71) \cdot 10}{2} = 395$$

2 **En una progresión aritmética, $a_1 = 10$ y $a_{12} = 54$. Halla:**

a) La suma de los doce primeros términos, S_{12}.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

a) $S_{12} = \dfrac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \dfrac{(10+54) \cdot 12}{2} = 384$

b) $a_{12} = a_1 + (12-1)d \to 54 = 10 + 11d \to d = \dfrac{(54-10) \cdot 12}{11} = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)d \to a_n = 10 + (n-1)4 \to a_n = 6 + 4n$

3 **El término general de una progresión aritmética es $a_n = 10 + 2{,}5n$. Halla a_1, a_{50} y S_{50} (la suma de los 50 primeros términos).**

$d = 2{,}5$

$a_1 = 12{,}5$

$a_{50} = 12{,}5 + 2{,}5 \cdot 50 = 135$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(12{,}5+135) \cdot 50}{2} = 3687{,}5$$

4 **En una progresión aritmética, $a_1 = 84$ y $a_2 = 79$.**

a) Halla d y escribe los ocho primeros términos.

b) Halla el término general.

c) Obtén a_{20} y S_{20}.

a) $d = a_2 - a_1 = 79 - 84 = -5$

Los ocho primeros términos son $\to$ 84, 79, 74, 69, 64, 59, 54, 49

b) $a_n = a_1 + (n-1)d \to a_n = 84 - 5 \cdot (n-1) = 89 - 5n$

c) $a_{20} = 89 - 5 \cdot 20 = -11$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(84-11) \cdot 20}{2} = 730$$

3 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Página 79

1 Halla los seis primeros términos de las progresiones geométricas definidas así:

a) Primer término: 5 000; razón: 1,2

b) Primer término: 8; razón: 2,5

c) Primer término: 1 000 000; razón: 0,2

d) Primer término: 1; razón: 10

a) 5 000; 6 000; 7 200; 8 640; 10 368; 12 441,6

b) 8; 20; 50; 125; 312,5; 781,25

c) 1 000 000, 200 000, 40 000, 8 000, 1 600, 320

d) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000

2 Considera la progresión 1, 2, 4, 8, 16, …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) ¿Cuál es la razón?

c) ¿Qué lugar ocupa el término $2^7 = 128$?

d) Expresa con una potencia de base 2 el término a_{10} de la progresión.

a) Los cuatro términos siguientes son 32, 64, 128, 256.

b) La razón de esta progresión es $r = 2$.

c) $2^7 = 128$ ocupa la posición 8.

d) $a_{10} = 2^9 = 512$

3 Escribe los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ **b) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$**

c) $c_n = 5 \cdot 10^{n-1}$ **d) $d_n = 5 \cdot (-0,1)^{n-1}$**

a) 5, 10, 20, 40 b) 2, 6, 18, 54

c) 5, 50, 500, 5 000 d) 5; –0,5; 0,05; –0,005

4 Asocia en tu cuaderno cada progresión geométrica con su término general:

a) 3, 6, 12, 24, …

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; …

c) 3, 30, 300, 3 000, …

d) 2, 6, 18, 54, …

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$

$a_n = 3 \cdot 0,1^{n-1}$

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

a) 3, 6, 12, 24, … $\to$ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; … $\to$ $a_n = 3 \cdot 0,1^{n-1}$

c) 3, 30, 300, 3 000, … $\to$ $a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$

d) 2, 6, 18, 54, … $\to$ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

5 **Considera la siguiente progresión:**

$$\mathbf{1;\ 0{,}2;\ 0{,}04;\ 0{,}008;\ \ldots}$$

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) Escribe en forma de potencia el término a_{15} de la progresión.

a) 0,0016; 0,00032; 0,000064; 0,0000128

b) $a_n = 0{,}2^{(n-1)}$

$a_{15} = 0{,}2^{(15-1)} \rightarrow a_{15} = 0{,}2^{14}$

6 **¿En cuánto se convierte un capital de 5 000 €, colocado al 3 % anual durante 10 años, si los intereses se suman al capital al final de cada año?**

Al final de cada año, el capital se multiplica por 1,03.

En diez años, el capital inicial se habrá multiplicado diez veces por 1,03:

$$5\,000 \cdot 1{,}03^{10} = 6\,719{,}58 \text{ €}$$

El capital, al cabo de 10 años, es de 6 719,58 €.

7 **Averigua a partir de qué término la progresión geométrica 3, 6, 12, … supera el valor 1 000 000.**

El término general de esta progresión es $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$, entonces, hay que averiguar para que n se cumple que $3 \cdot 2^{(n-1)} > 1\,000\,000 \rightarrow 2^{(n-1)} > \dfrac{1\,000\,000}{3} \approx 333\,333{,}3$.

$2^{10} = 1\,024 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Se queda muy corto, probamos con otro.

$2^{15} = 32\,768 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Sigue estando por debajo pero bastante próximo.

…

$2^{18} = 262\,144 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es muy próximo al número buscado

$2^{19} = 524\,288 > 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es el primero que supera 333 333,3.

Por tanto, $n - 1 = 19 \rightarrow n = 19 + 1 \rightarrow n = 20$

$$a_{20} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$$

A partir de $a_{20} = 1\,572\,864$ los términos de la progresión superan 1 000 000.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 80

Practica

Sucesiones

1 **Escribe los seis primeros términos de estas sucesiones:**

a) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es 5.

b) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es –10.

c) El primer término es 5, y el segundo, 7. A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

d) El primer término es 16. Los demás se obtienen dividiendo el anterior por 2.

e) El primer término es 36, el segundo, 12, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

a) 5, 8, 11, 14, 17, 20

b) –10, –7, –4, –1, 2, 5

c) 5, 7, 12, 19, 31, 50

d) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5

e) 36; 12; 24; 18; 21; 19,5

2 Averigua el criterio de formación de estas sucesiones y escribe tres términos más de cada una:

a) $1, 3, 5, 7, \dots$

b) $7, 5, 3, 1, \dots$

c) $2, 4, 8, 16, \dots$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

e) $1{,}5; 1{,}9; 2{,}3; 2{,}7; \dots$

f) $30, 25, 20, 15, \dots$

g) $1, 4, 9, 16, \dots$

h) $2, 5, 10, 17, \dots$

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

j) $1, 3, 6, 10, \dots$

a) El primer término es 1 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$$

b) El primer término es 7 y cada término se obtiene restando 2 al anterior.

$7, 5, 3, 1, -1, -3, -5$

c) El primer término es 2 y cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior.

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$$

d) El primer término es $\frac{1}{2}$ y cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$$

e) El primer término es 1,5 y cada término se obtiene sumando 0,4 al anterior.

$$1{,}5; 1{,}9; 2{,}3; 2{,}7; 3{,}1; 3{,}5; 3{,}9$$

f) El primer término es 30 y cada término se obtiene restando 5 al anterior.

$$30, 25, 20, 15, 10, 5, 0$$

g) El primer término es 1 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa.

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$$

h) El primer término es 2 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa en la sucesión y sumándole 1.

$$2, 5, 10, 17, 26, 37, 50$$

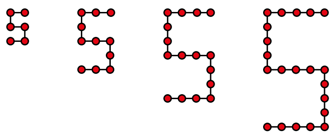
i) El primer término es 1 y cada término es la unidad dividida por el lugar que ocupa en la sucesión.

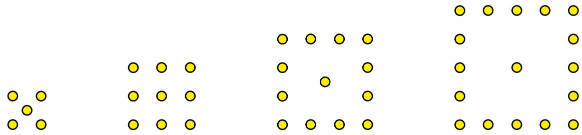
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$$

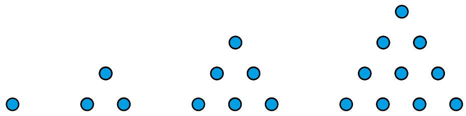
j) El primer término es 1 y, a partir de ahí, se va sumando la posición que ocupa en la sucesión al término anterior.

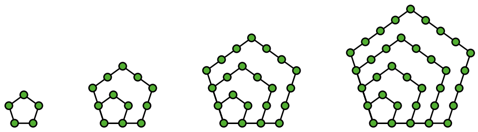
$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28$$

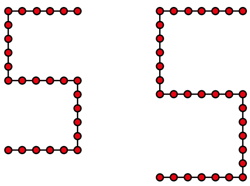
3 **Dibuja las dos siguientes figuras de cada sucesión:**

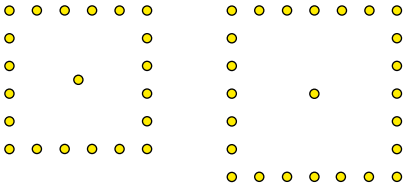
a) 

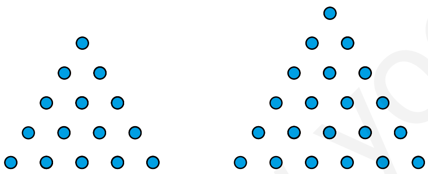
b) 

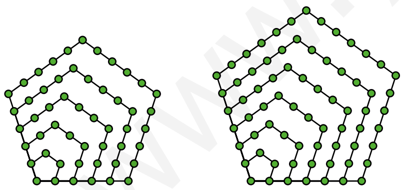
c) 

d) 

a) 

b) 

c) 

d) 

4 **Observa que el número de puntos de cada término de la sucesión del apartado a) del ejercicio anterior es 6, 11, 16, 21, … . Escribe los seis primeros términos de esta y de las demás sucesiones.**

a) 6, 11, 16, 21, 26, 31

b) 5, 9, 13, 17, 21, 25

c) 1, 3, 6, 10, 15, 21

d) 5, 12, 22, 35, 51, 70

Término general y forma recurrente

5 **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:**

a) $n^2 - n$ **b)** $n^2 + n$ **c)** $2^n + 1$

d) $\dfrac{n-1}{n+1}$ **e)** $\dfrac{n^2+1}{n}$ **f)** $\dfrac{2n-1}{n+1}$

a) 0, 2, 6, 12, 20 b) 2, 6, 12, 20, 30 c) 3, 5, 9, 17, 33

d) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e) $0, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}$ f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

6 **a) Comprueba que los términos de la sucesión $a_n = (-1)^n$ son –1, 1, –1, 1, –1, …**

b) Escribe los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es $b_n = 1 + (-1)^n$.

c) Indica el término general de 1, –1, 1, –1, 1, …

a) $a_1 = (-1)^1 = -1$; $a_2 = (-1)^2 = 1$; $a_3 = (-1)^3 = -1$; $a_4 = (-1)^4 = 1$; $a_5 = (-1)^5 = -1$; …

b) $b_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$; $b_2 = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$; $b_3 = 1 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$;
$b_4 = 1 + (-1)^4 = 1 + 1 = 2$; $b_5 = 1 + (-1)^5 = 1 - 1 = 0$

c) $c_n = (-1)^{n+1}$

7 **Escribe los seis primeros términos de cada una de estas sucesiones definidas de forma recurrente:**

a) $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ **b)** $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

c) $a_1 = 64,\ a_2 = 8,\ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$ **d)** $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) 1, –1, 0, –1, –1, –2 b) 3, 5, 2, –3, –5, –2

c) $64, 8, 8, 1, 8, \frac{1}{8}$ d) 2, 4, 4, 8, 16, 64

8 **Escribe los seis primeros términos de cada una de estas sucesiones:**

a) $a_n = \dfrac{n}{10^{n-1}}$ **b)** $b_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$ **c)** $c_n = 2^{3-n}$

d) $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 1$ **e)** $e_n = \dfrac{n - n^2}{2}$ **f)** $f_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

a) $a_1 = \dfrac{1}{10^0} = 1$; $a_2 = \dfrac{2}{10^1} = 0,2$; $a_3 = \dfrac{3}{10^2} = 0,03$; $a_4 = \dfrac{4}{10^3} = 0,004$; $a_5 = \dfrac{5}{10^4} = 0,0005$;
$a_6 = \dfrac{6}{10^5} = 0,00006$

b) $b_1 = 3 \cdot 2^0 = 3$; $b_2 = 3 \cdot 2^1 = 6$; $b_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$; $b_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$; $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$;
$b_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$

c) $c_1 = 2^2 = 4$; $c_2 = 2^3 = 8$; $c_3 = 2^4 = 16$; $c_4 = 2^5 = 32$; $c_5 = 2^6 = 64$; $c_6 = 2^7 = 128$

d) $d_1 = \dfrac{(-1)^1}{1} + 1 = 0$; $d_2 = \dfrac{(-1)^2}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$; $d_3 = \dfrac{(-1)^3}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}$; $d_4 = \dfrac{(-1)^4}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$;
$d_5 = \dfrac{(-1)^5}{5} + 1 = \dfrac{4}{5}$; $d_6 = \dfrac{(-1)^6}{5} + 1 = \dfrac{6}{5}$

e) $e_1 = \frac{1-1^2}{2} = 0$; $e_2 = \frac{2-2^2}{2} = -1$; $e_3 = \frac{3-3^2}{2} = -3$; $e_4 = \frac{4-4^2}{2} = -6$; $e_5 = \frac{5-5^2}{2} = -10$;

$e_6 = \frac{6-6^2}{2} = -15$

f) $f_1 = \frac{1-1}{1+1} = 0$; $f_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$; $f_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $f_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$; $f_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;

$f_6 = \frac{6-1}{6+1} = \frac{5}{7}$

9 **Asocia cada sucesión con su término general:**

a) 5, 10, 15, 20, 25, …	**i)** $\frac{4}{n}$
b) 6, 9, 14, 21, 30, …	**ii)** $\frac{10}{10^n}$
c) 4, 2, $\frac{4}{3}$**, 1,** $\frac{4}{5}$**, …**	**iii)** $n^2 + 5$
d) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; …	**iv)** $\frac{n}{n+1}$
e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$	**v)** $5n$

a) → v) b) → iii) c) → i) d) → ii) e) → iv)

10 **Escribe el término general de estas sucesiones:**

a) 1, 2, 3, 4, … **b) 0, 1, 2, 3, …** **c) 1, 4, 9, 16, …**

d) 0, 3, 8, 15, … **e) 2, 4, 6, 8, …** **f) 1, 3, 5, 7, …**

g) 3, 5, 7, 9, … **h) 12, 14, 16, 18, …** **i) 2, 4, 8, 16, …**

j) 3, 5, 9, 17, … **k) 100, 200, 300, 400, …** **l) 5, 25, 125, 625, …**

a) $a_n = n$ b) $b_n = n - 1$ c) $c_n = n^2$

d) $d_n = n^2 - 1$ e) $e_n = 2n$ f) $f_n = 2n - 1$

g) $g_n = 2n + 1$ h) $h_n = 2(n + 5) = 2n + 10$ i) $i_n = 2^n$

j) $j_n = 2^n + 1$ k) $k_n = 100n$ l) $l_n = 5^n$

Página 81

Progresiones aritméticas

11 **De las sucesiones siguientes, definidas por sus términos generales, hay tres que son progresiones aritméticas. Identifícalas y di cuál es la diferencia en cada una de ellas:**

a) $5n - 4$ **b)** $5 - 3n$ **c)** $10 - 0{,}5n$ **d)** $n^2 + 1$

a) $5n - 4 \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = 5$.

b) $5 - 3n \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = -3$.

c) $10 - 0{,}5n \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = -0{,}5$.

d) $n^{2+1} \rightarrow$ No es progresión aritmética.

12 **Escribe los seis primeros términos y el término general de estas progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = -13,\ d = 5$ **b)** $b_1 = \frac{2}{3},\ d = 1$ **c)** $c_1 = 5,\ d = -\frac{1}{2}$

d) $d_1 = 3,\ d = 0{,}5$ **e)** $e_1 = 5,\ d = -1{,}2$ **f)** $f_1 = \frac{1}{7},\ d = 0$

a) $-13, -8, -3, 2, 7, 12.$ $a_n = -13 + (n - 1)\ 5 = 5n - 18$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3}.$ $b_n = \frac{2}{3} + (n-1) \cdot 1 = n - \frac{1}{3}$

c) $5, \frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}.$ $c_n = 5 + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-n}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11-n}{2}$

d) $3;\ 3{,}5;\ 4;\ 4{,}5;\ 5;\ 5{,}5.$ $d_n = 3 + (n - 1) \cdot 0{,}5 = 0{,}5n + 2{,}5$

e) $5;\ 3{,}8;\ 2{,}6;\ 1{,}4;\ 0{,}2;\ -1.$ $e_n = 5 + (n - 1)\ (-1, 2) = -1, 2n + 6{,}2$

f) $\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}.$ $f_n = \frac{1}{7} + (n-1) \cdot 0 = \frac{1}{7}$

13 **Halla el término general en cada caso:**

a) $3, 14, 25, 36, 47, \ldots$ **b)** $-5, -2, 1, 4, 7, \ldots$

c) $-7, -3, 1, 5, 9, \ldots$ **d)** $2;\ 3{,}5;\ 5;\ 6{,}5;\ 8;\ \ldots$

e) $3;\ 5{,}8;\ 8{,}6;\ 11{,}4;\ \ldots$ **f)** $7;\ 5{,}7;\ 4{,}4;\ 3{,}1;\ \ldots$

g) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}, \ldots$ **h)** $\frac{15}{8}, \frac{11}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \ldots$

a) $a_1 = 3, d = 11 \rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \cdot 11 = 11_n - 8$

b) $b_1 = -5, d = 3 \rightarrow b_n = -5 + (n - 1) \cdot 3 = 3_n - 8$

c) $c_1 = -7, d = 4 \rightarrow c_n = -7 + (n - 1) \cdot 4 = 4_n - 11$

d) $d_1 = 2, d = 1{,}5 \rightarrow d_n = 2 + (n - 1) \cdot 1{,}5 = 1{,}5n + 0{,}5$

e) $e_1 = 3; d = 2{,}8 \rightarrow e_n = 3 + (n - 1) \cdot 2{,}8 = 2{,}8n + 0{,}2$

f) $f_1 = 7; d = -1{,}3 \rightarrow f_n = 7 + (n - 1) \cdot (-1{,}3) = -1{,}3n + 8{,}3$

g) $g_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{3}{4} \rightarrow g_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3n}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3n-1}{4}$

h) $h_1 = \frac{15}{8}, d = -\frac{4}{8} \rightarrow h_n = \frac{15}{8} + (n-1) \cdot \left(-\frac{4}{8}\right) = \frac{-4n}{8} + \frac{19}{8} = \frac{19-4n}{8}$

15 **Calcula los elementos que se te piden en estas progresiones aritméticas. Escribe sus términos generales:**

a) a_{19} **y** d**, sabiendo que** $a_1 = 4$ **y** $a_2 = 7$**.**

b) a_1**,** a_{40} **y** d**, sabiendo que** $a_5 = 17$ **y** $a_6 = 22$**.**

c) a_1**, sabiendo que** $a_{35} = 104$ **y** $d = 27$**.**

d) a_1**,** a_{100} **y** d**, sabiendo que** $a_{15} = 43$ **y** $a_{16} = 35$**.**

e) a_{20} **y** d**, sabiendo que** $a_1 = 16$ **y** $a_{10} = 43$**.**

f) a_1 **y** a_{15}**, sabiendo que** $a_{10} = 4$ **y** $d = 6$**.**

a) $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$

$a_{19} = 4 + (19 - 1) \cdot 3 = 4 + 54 = 58$

b) $d = a_6 - a_5 = 22 - 17 = 5$

$a_5 = a_1 + 4d \rightarrow 17 = a_1 + 20 \rightarrow a_1 = -3$

$a_{40} = -3 + (40 - 1) \cdot 5 = -3 + 195 = 192$

c) $a_{35} = a_1 + 34 \cdot d \rightarrow 104 = a_1 + 34 \cdot 27 \rightarrow a_1 = -814$

d) $d = a_{16} - a_{15} = 35 - 43 = -8$

$a_{15} = a_1 + 14 \cdot d \rightarrow 43 = a_1 + 14 \cdot (-8) \rightarrow a_1 = 155$

$a_{100} = 155 + 99 \cdot (-8) = -637$

e) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \rightarrow 43 = 16 + 9 \cdot d \rightarrow d = 3$

$a_{20} = 16 + 19 \cdot 3 = 73$

f) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \rightarrow 4 = a_1 + 9 \cdot 6 \rightarrow a_1 = -50$

$a_{15} = -50 + 14 \cdot 6 = 34$

16 **Halla la suma de los 20 primeros términos de cada una de las progresiones aritméticas de la actividad anterior.**

Aplicamos en cada caso la fómula $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = (a_1 + a_{20}) \cdot 10$

a) $a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61 \rightarrow S_{20} = (4 + 61) \cdot 10 = 650$

b) $a_{20} = -3 + 19 \cdot 5 = 92 \rightarrow S_{20} = (-3 + 92) \cdot 10 = 890$

c) $a_{20} = -814 + 19 \cdot 27 = -301 \rightarrow S_{20} = (-814 - 301) \cdot 10 = -11\,150$

d) $a_{20} = 155 + 19 \cdot (-8) = 3 \rightarrow S_{20} = (155 + 3) \cdot 10 = 1\,580$

e) $a_{20} = 73 \rightarrow S_{20} = (16 + 73) \cdot 10 = 890$

f) $a_{20} = -50 + 19 \cdot 6 = 64 \rightarrow S_{20} = (-50 + 64) \cdot 10 = 140$

17 **El término general de una progresión aritmética es** $a_n = 4 + 3n$**. Halla** a_1**,** a_{100} **y** S_{100}**.**

$a_n = 4 + 3n$

$a_1 = 4 + 3 \cdot 1 = 7$

$a_{100} = 4 + 3 \cdot 100 = 304$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 304) \cdot 100}{2} = 15\,550$$

18 Halla la suma indicada en cada caso:

a) S_{40} **sabiendo que** $a_n = 3 - 4n$.

b) S_{25} **sabiendo que** $b_n = -7 + 9n$.

c) S_{10} **sabiendo que** $c_n = 1 + \frac{2}{3}n$.

d) S_{100} **sabiendo que** $d_n = \frac{3}{8} - 4n$.

e) S_{70} **sabiendo que** $e_n = \frac{1}{5} + \frac{7}{3}n$.

a) $a_1 = -1;\ a_{40} = -157$

Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = -1$ y $d = -4$

$$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} = \frac{(-1-157) \cdot 40}{2} = -3160$$

b) $b_1 = 2;\ b_{25} = 218$

Se trata de una progresión aritmética con $b_1 = 2$ y $d = 9$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2+218) \cdot 25}{2} = 2750$$

c) $c_1 = \frac{5}{3};\ c_{10} = \frac{23}{3}$

Se trata de una progresión aritmética con $c_1 = \frac{5}{3}$ y $d = \frac{2}{3}$

$$S_{10} = \frac{(c_1 + c_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{\left(\frac{5}{3} + \frac{23}{3}\right) \cdot 10}{2} = \frac{140}{3}$$

d) $d_1 = -\frac{29}{8};\ d_{100} = -\frac{3197}{8}$

Se trata de una progresión aritmética con $d_1 = -\frac{29}{8}$ y $d = -4$

$$S_{100} = \frac{(d_1 + d_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{\left(-\frac{29}{8} + \frac{3197}{8}\right) \cdot 100}{2} = \frac{-161300}{8} = 20162,5$$

e) $e_1 = \frac{38}{15};\ e_{70} = \frac{2453}{15}$

Se trata de una progresión aritmética con $e_1 = \frac{38}{15}$ y $d = \frac{7}{3}$

$$S_{70} = \frac{(e_1 + e_{70}) \cdot 70}{2} = \frac{\left(\frac{38}{15} + \frac{2453}{15}\right) \cdot 70}{2} = \frac{87185}{15} = \frac{17437}{3}$$

19 **En una progresión aritmética, $a_1 = 6$ y $a_{15} = 41$. Halla:**

a) La suma de los 15 primeros términos.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

c) El término centésimo, a_{100}.

$a_1 = 6; \quad a_{15} = 41$

a) $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(6 + 41) \cdot 15}{2} = 352{,}5$

b) $a_{15} = a_1 + (15 - 1)d \to 41 = 6 + 14d \to d = \dfrac{41 - 6}{14} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

$a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 6 + 2{,}5(n - 1) \to a_n = 3{,}5 + 2{,}5n$

c) $a_{100} = 3{,}5 + 2{,}5 \cdot 100 = 253{,}5$

20 **En una progresión aritmética, $a_1 = 103$ y $a_2 = 99$.**

a) Halla la diferencia, d, y escribe los 10 primeros términos.

b) Obtén el término general.

c) Halla a_{30} y S_{30}.

$a_1 = 103; \qquad a_2 = 99$

a) $d = a_2 - a_1 = 99 - 103 = -4$

Los diez primeros términos son 103, 99, 95, 91, 87, 83, 79, 75, 71, 67.

b) $a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 103 - 4 \cdot (n - 1) = 107 - 4n$

El término general de esta progresión aritmética es $a_n = 107 - 4n$.

c) $a_{30} = 107 - 4 \cdot 30 = -13$

$S_{30} = \dfrac{(a_1 + a_{30})}{2} = \dfrac{(103 + (-13)) \cdot 30}{2} = 1\,350$

Progresiones geométricas

21 **Escribe los cinco primeros términos de cada una de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_1 = 3$; $r = 2$

b) $a_1 = 64$; $r = 0{,}5$

c) $a_1 = 10\,000$; $r = 0{,}1$

d) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

e) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot 3^{n-1}$

f) $a_n = 0{,}2 \cdot 10^n$

a) 3, 6, 12, 24, 48

b) 64, 32, 16, 8, 4

c) 10 000, 1 000, 100, 10, 1

d) 3, –6, 12, –24, 48

e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, \dfrac{27}{2}, \dfrac{81}{2}$

f) 2, 20, 200, 2 000, 20 000

22 **Calcula la razón de cada una de estas progresiones geométricas y halla el término a_8:**

a) 5, 15, 45, 135, 405, …

b) 640, –320, 160, –80, 40, …

c) 3; 4,5; 6,75; 10,125; 15,1875; …

d) 1,2; 3,6; 10,8; 32,4; 97,2; …

a) $r = 15 : 5 = 3$; $a_8 = 5 \cdot (3)^7 = 10\,935$

b) $r = -320 : 640 = -0{,}5$; $a_8 = 640 \cdot (-0{,}5)^7 = -5$

c) $r = 4{,}5 : 3 = 1{,}5$; $a_8 = 3 \cdot (1{,}5)^7 = 51{,}2578125$

d) $r = 3{,}6 : 1{,}2 = 3$; $a_8 = 1{,}2 \cdot (3)^7 = 2\,624{,}4$

23 **Asocia cada progresión con su término general:**

a) 1, 2, 4, 8, 16, …	I) $a_n = 4 \cdot 3^n$
b) 30; 3; 0,3; 0,03; 0,003; …	II) $a_n = 1000 \cdot 0{,}2^n$
c) 12, 36, 108, 324, 972, …	III) $a_n = 240 \cdot (-0{,}5)^n$
d) –120; 60; –30; 15; –7,5; …	IV) $a_n = 300 \cdot 0{,}1^n$
e) 200; 40; 8; 1,6; 0,32; …	V) $a_n = 0{,}5 \cdot 2^n$

a) → V) b) → IV) c) → I) d) → III) e) → II)

Página 82

Resuelve problemas

24 **Calcula, con ayuda de la calculadora, cuál es el primer término mayor que 100 de cada una de estas progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 23, \ d = 8$ **b)** $b_1 = \frac{2}{3}, \ d = \frac{43}{3}$

c) $c_1 = 39, \ d = \frac{7}{5}$ **d)** $d_1 = -27, \ d = 1{,}43$

a) a_{11} b) b_7 c) c_{45} d) d_{90}

25 **En una progresión geométrica,** $a_1 = 64$ **y** $r = 0{,}75$**.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

$a_1 = 64; \ r = 0{,}75$

a) $a_1 = 64$

$a_2 = 64 \cdot 0{,}75 = 48$

$a_3 = 48 \cdot 0{,}75 = 36$

$a_4 = 36 \cdot 0{,}75 = 27$

$a_5 = 27 \cdot 0{,}75 = 20{,}25$

El primer término no entero es $a_5 = 20{,}25$.

b) Con la calculadora: 0,75 ⊠ ⊠ 64 ⊜ ⊜ … ⊜

Para que el resultado sea un número menor que 1 hay que dar 15 veces al botón ⊜.

Por tanto, $a_{15} = 0{,}85526$ es el primer término menor que 1.

26 **De las siguientes sucesiones, dadas por sus términos generales, unas son progresiones aritméticas, otras, progresiones geométricas, y otras, ni lo uno ni lo otro. Identifica cada una de ellas:**

a) $3n + 5$ **b)** $n^2 + 5$ **c)** $3^n + 5$ **d)** $3^n \cdot 5$

e) $n^2 + n$ **f)** $n + 2$ **g)** $n/2$ **h)** $2/n$

a) $3n + 5 \ \rightarrow$ Progresión aritmética

b) $n^2 + 5 \ \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

c) $3^n + 5 \ \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

d) $3^n \cdot 5 \ \rightarrow$ Progresión geométrica

e) $n^2 + n \ \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

f) $n + 2 \ \rightarrow$ Progresión aritmética

g) $\frac{n}{2} \ \rightarrow$ Progresión aritmética

h) $\frac{2}{n} \ \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

27

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

a) Esta es la tabla de multiplicar. Observa en ella cada fila o columna. ¿Qué tipos de sucesiones son? Escribe el término general de cada una.

b) Obtén el término general de la diagonal principal: 1, 4, 9, 16, …

c) La diagonal 2, 6, 12, 20, … se formó multiplicando cada número natural por su siguiente. ¿Cuál es el término general?

a) En la tabla de multiplicar podemos observar que cada fila o columna son progresiones aritméticas.

Los términos generales de cada fila o columna son:

1ª fila o columna: $a_n = n$

2ª fila o columna: $a_n = 2n$

3ª fila o columna: $a_n = 3n$

4ª fila o columna: $a_n = 4n$

5ª fila o columna: $a_n = 5n$

6ª fila o columna: $a_n = 6n$

7ª fila o columna: $a_n = 7n$

8ª fila o columna: $a_n = 8n$

9ª fila o columna: $a_n = 9n$

b) El término general de la diagonal principal es $a_n = n^2$.

c) El término general de la diagonal 2, 6, 12, 20, … es $a_n = n(n + 1) = n^2 + n$.

28 a) ¿Cuántos números impares menores que 100 hay? Halla su suma.

b) Halla la suma de todos los números pares menores que 100.

a) Hay 100 : 2 = 50 números impares menores que 100.

La sucesión de los números impares menores de 100 es 1, 3, 5, 7, …, 99.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 1$ y $a_{50} = 99$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

b) En este caso también hay 100 : 2 = 50 números pares menores que 100.

La sucesión de los números pares menores de 100 es 2, 4, 6, 8, …, 98.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 2$ y $a_{50} = 98$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

29 Jimena recibe en su móvil 8 mensajes cada 5 minutos. A este ritmo, ¿cuántos mensajes recibirá en 3 h?

a) 3h = 3 · 60 = 180 min

180 : 5 = 36

Jimena recibe 8 mensajes en el minuto 5; 8 + 8 = 16 mensajes en el minuto 10; 8 + 8 + 8 = 24 mensajes en el minuto 15; … Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = 8$ y $d = 8$ en la que tenemos que calcular el término a_{36}: $a_{36} = 8 + 35 \cdot 8 = 288$.

Jimena recibirá 288 mensajes en 3 h.

30 Un padre, cuando nace su hijo, abre a su nombre una cuenta bancaria, al 6 % anual, con un capital de 5 000 €, indicando que los intereses se vayan sumando al capital al final de cada año. El hijo podrá disponer del dinero cuando cumpla dieciocho años. ¿A cuánto ascenderá la cuenta en ese momento?

El capital aumenta en un 6 % anual. Es decir, al finalizar cada año se multiplica el capital que tenga en la cuenta bancaria por 1,6.

Como el hijo puede disfrutar del capital que tenga acumulado en la cuenta bancaria a los 18 años, el capital inicial se habrá multiplicado dieciocho veces por 1,06:

$$5\,000 \cdot 1{,}06^{18} = 14\,271{,}69 \text{ €}$$

Por tanto, cuando el hijo cumpla 18 años la cuenta ascenderá a 14 271,69 €.

31 He recibido un préstamo de 1 000 € de un banco que me cobra unos intereses del 4 % anual (con la suma de los intereses al final de cada año). ¿Cuánto tendré que devolver al cabo de 5 años?

La cantidad que tengo que devolver aumenta un 4 % anual. Es decir, el finalizar cada año se multiplica por 1,04.

Si lo devuelvo al cabo de 5 años:

$$1\,000 \cdot (1{,}04)^5 = 1\,216{,}65 \text{ €}$$

Al cabo de cinco años tendré que devolver 1 216,65 €

32 ¿Cuánto tardará en duplicarse un euro, colocado en el banco al 5 % anual, si los intereses se van acumulando al final de cada anualidad?

El euro colocado en el banco aumenta un 5 % anual. Es decir, al finalizar cada año el euro que está en la cuenta bancaría se multiplica por 1,05.

n son el número de años necesarios para duplicar el euro, por tanto, $1 \cdot 1{,}05^n \geq 2$.

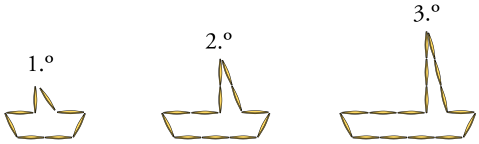
Con la calculadora:

1,05 ⊗ ⊗ 1 ⊜ ⊜ … ⊜ → Damos a ⊜ hasta que aparezca un número mayor o igual que 2.

Para que salga un número mayor o igual a 2 debemos dar a ⊜ 15 veces, $1 \cdot 1{,}05^{15} = 2{,}08 \geq 2$.

Por tanto, el euro colocado en el banco tardará 15 años en duplicarse.

33 **Pedro construye barquitos con palillos como ves en esta figura:**



¿Cuántos palillos necesita para construir el barco número 100? ¿Cuántos habrá utilizado para formar todos los barquitos hasta el 100?

1.er barquito $\rightarrow$ 8 palillos $\rightarrow$ $a_1 = 8$

2.º barquito $\rightarrow$ 12 palillos $\rightarrow$ $a_2 = 12$

3.er barquito $\rightarrow$ 16 palillos $\rightarrow$ $a_3 = 16$

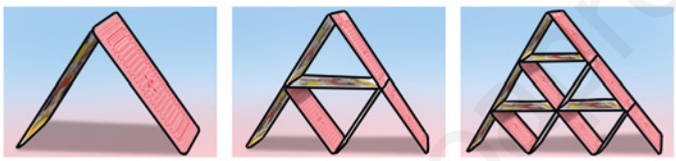
El número de palillos forma una progresión aritmética con $a_1 = 8$ y $d = 4$.

Por tanto, para construir el barquito número 100 necesita $a_{100} = 8 + 99 \cdot 4 = 404$ palillos.

Para construir todos los barquitos hasta el 100 habrá utilizado:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(8 + 404) \cdot 100}{2} = 20\,600 \text{ palillos}$$

34 **Observa el número de naipes necesarios para formar un piso, dos pisos, tres pisos…**



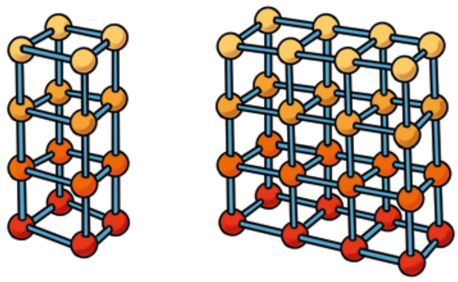
Indica cuál de estos es el término general:

I) $\boldsymbol{a_n = n + n^2}$ **II)** $\boldsymbol{a_n = 2n^2 - 1}$ **III)** $\boldsymbol{a_n = \frac{3n^2 + n}{2}}$

¿Cuántos naipes se necesitan para uno de 10 pisos?

- El término general es el III) $a_n = \frac{3n^2 + n}{2}$.
- Para un castillo de naipes de 10 pisos se necesitan $a_{10} = \frac{3 \cdot 10^2 + 10}{2} = 62$ naipes.

35 **Observa estas dos estructuras formadas por palos y bolas engarzables:**



Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una estructura como la de la figura A, pero de n pisos. ¿Y para la figura B?

— Para la estructura A, se necesitan 4 bolas, 4 palos por cada piso y 4 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, en una estructura de n pisos se necesitan $4n$ bolas y $4n + 4(n - 1)$ palos, es decir, $8n - 4$ palos.

— Para la estructura B, se necesitan 8 bolas, 10 palos por cada piso y 8 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, para una estructura como la B, pero de n pisos, se necesitan $8n$ bolas y $10n + 8(n - 1)$ palos, es decir, $18n - 8$ palos.

Página 83

36 Una pelota de goma se lanza a 10 metros de altura y al caer rebota perdiendo el 40 % de altura en cada bote. ¿Cuántos botes da antes de pararse, si al caer desde una altura inferior a 4 centímetros ya no tiene suficiente energía para volver a subir y deja de botar?

Se lanza la pelota de goma $10 \cdot 100 = 1\,000$ cm hacia arriba y al caer rebota perdiendo 40 % de altura en cada bote, entonces, el índice de variación es 0,6.

Por cada bote que da la pelota hay que multiplicar la altura por 0,6.

Sea n el número de botes que da la pelota antes de pararse, por tanto, hay que calcular n para que $1000 \cdot 0{,}6^n \leq 4$.

Con la calculadora:

0,6 $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ 1 000 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ … → Damos a $\boxed{=}$ hasta que aparezca un número menor o igual que 4.

Para que salga un número menor o igual que 4 debemos dar a $\boxed{=}$ 11 veces, $1\,000 \cdot 0{,}6^{11} = 3{,}63 \leq 4$.

Por tanto, la pelota dará 11 botes antes de pararse.

37 Un tipo de bacterias se reproduce por bipartición cada 10 minutos.

Si en un cultivo tenemos 150 millones de bacterias, ¿cuántas habrá después de 8 horas? Expresa el resultado en notación científica.

Cada 10 minutos, las bacterias se multiplican por 2.

8 horas son 480 minutos → 48 períodos de 10 minutos.

Partiendo de 150 millones de bacterias = $1{,}5 \cdot 10^8$ bacterias:

$$1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 2^{48} \approx 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 2{,}82 \cdot 10^{14} = 4{,}23 \cdot 10^{22}$$

Después de 8 horas habrá $4{,}23 \cdot 10^{22}$ bacterias, aproximadamente.

AUTOEVALUACIÓN

Página 83

1 **Escribe los seis primeros términos de estas sucesiones:**

a) $a_n = n^2 + n$

b) $b_n = 15 - 3(n - 1)$

c) $c_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$

d) $d_n = \frac{(-1)^n}{2} + n$

e) $e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_n = e_{n-1} - 2e_{n-2}$

a) 2, 6, 12, 20, 30, 42

b) 15, 12, 9, 6, 3, 0

c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}$

e) 1, 2, 0, –4, –4, 4

2 **Escribe el término general de cada sucesión:**

a) 4, 11, 18, 25, 32, …

b) 3, 12, 48, 192, 768, …

c) 0, 3, 8, 15, 24, …

d) 9; 3,5; –2; –7,5; –13; …

a) $a_n = 4 + (n - 1)7 = 7n - 3$

b) $b_n = 3 \cdot (4)^{n-1}$

c) $c_1 = 0,\ c_n = c_{n-1} + (2n - 1)$

d) $d_n = 9 + (n - 1)\ (-5{,}5) = -5{,}5n + 14{,}5$

3 **Escribe el término general de estas progresiones aritméticas:**

a) 54, 65, 76, 87, …

b) 114, 91, 68, 45, 22, …

c) 3, –2, –7, –12, …

d) 18,2; 20; 21,8; 23,6, …

e) $a_1 = 7,\ d = -2{,}3$

f) $a_2 = 4,\ d = 4{,}5$

a) $a_n = 54 + (n - 1)11 = 11n + 43$

b) $b_n = 114 + (n - 1)23 = 23n + 91$

c) $c_n = 3 + (n - 1)\ (-5) = -5n + 8$

d) $d_n = 18{,}2 + (n - 1) \cdot 1{,}8 = 1{,}8n + 16{,}4$

e) $a_n = 7 + (n - 1)\ (-2{,}3) = -2{,}35n + 9{,}3$

f) $a_1 = 4 - 4{,}5 = -0{,}5 \ \rightarrow\ a_n = -0{,}5 + (n - 1) \cdot 4{,}5 = 4{,}5n - 5$

4 **Halla las sumas de los 10 primeros términos de estas progresiones aritméticas:**

a) 12, 26, 40, 54, 68, …

b) 9; 8,5; 8; 7,5; 7; …

c) $\boldsymbol{a_1 = 4,\ d = 10}$

d) $\boldsymbol{a_1 = 60,\ d = -3}$

e) $\boldsymbol{a_1 = 64,\ a_3 = 48}$

f) $\boldsymbol{a_2 = -3,\ a_7 = 17}$

En todos los casos aplicaremos la fórmula $S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$

a) $a_1 = 12$; $d = 26 - 12 = 14$; $a_{10} = 12 + 9 \cdot 14 = 138$

$S_{10} = (12 + 132) \cdot 5 = 750$

b) $a_1 = 9$; $d = 8{,}5 - 9 = -0{,}5$; $a_{10} = 9 + 9 \cdot (-0{,}5) = 4{,}5$

$S_{10} = (9 + 4{,}5) \cdot 5 = 67{,}5$

c) $a_1 = 4$; $d = 10$; $a_{10} = 4 + 9 \cdot 10 = 94$

$S_{10} = (4 + 94) \cdot 5 = 490$

d) $a_1 = 60$; $d = -3$; $a_{10} = 60 + 9 \cdot (-3) = 33$

$S_{10} = (60 + 33) \cdot 5 = 465$

e) $a_1 = 64$; $a_3 = a_1 + 2 \cdot d \rightarrow 48 = 64 + 2 \cdot d \rightarrow d = -8$

$a_{10} = 64 + 9 \cdot (-8) = -8$

$S_{10} = (64 - 8) \cdot 5 = 280$

f) $a_7 = a_2 + 5 \cdot d \rightarrow 17 = -3 + 5 \cdot d \rightarrow d = \dfrac{14}{5}$

$a_1 = a_2 - d \rightarrow a_1 = -3 - \dfrac{14}{5} = -\dfrac{29}{5} = -5{,}8$

$a_{10} = -5{,}8 + 9 \cdot \left(\dfrac{14}{5}\right) = \dfrac{97}{5} = 19{,}4$

$S_{10} = (-5{,}8 + 19{,}4) \cdot 5 = 68$

5 **Calcula los seis primeros términos de estas progresiones geométricas:**

a) $\boldsymbol{a_1 = 5,\ r = 2}$

b) $\boldsymbol{a_1 = 48,\ r = 0{,}5}$

c) $\boldsymbol{a_1 = -2,\ r = -3}$

d) $\boldsymbol{a_1 = 1\,250,\ r = 0{,}2}$

e) $\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 5^{n-1}}$

f) $\boldsymbol{a_n = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

g) $\boldsymbol{a_n = 6 \cdot (-2)^{n-1}}$

h) $\boldsymbol{a_n = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

a) 5, 10, 20, 40, 80, 160

b) 48; 24; 12; 6; 3; 1,5

c) –2, 6, –18, 54, –162, 486

d) 1 250; 250; 50; 10; 2; 0,4

e) 2, 10, 50, 250, 1 250, 6 250

f) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{243}$

g) 6, –12, 24, –48, 96, –192

h) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{128}$

6 **Asocia cada progresión geométrica con su término general:**

a) 2, 8, 32, 128, 512, … I) $a_n = (-2)^{n-1}$

b) 80, 40, 20, 10, 5, … II) $a_n = 0{,}07 \cdot 100^n$

c) 1, –2, 4, –8, 16, … III) $a_n = 160 \cdot 0{,}5^n$

d) 7, 700, 70 000, … IV) $a_n = 840 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{n-1}$

e) 840; 42; 2,1; 0,105; … V) $a_n = 0{,}5 \cdot 4^n$

a) → V) b) → III) c) → I) d) → II) e) → IV)

7 **Una persona que estaba de vacaciones gastó 100 € el primer día, y en cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. El dinero le duró 12 días. ¿Cuánto dinero llevó para sus vacaciones?**

La persona se gasta 100 € el primer día → $a_1 = 100$

—Cada día gasta 5 euros → $d = -5$

—El dinero le dura 12 días → la progresión tiene 12 términos, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12}$, cada término es un día.

—El último día se gastó $a_{12} = 100 - 5(12 - 1) \rightarrow a_{12} = 100 - 55 = 45$ €.

—Para saber el dinero que llevó para sus vacaciones solo hace falta calcular S_{12}.

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ €}.$$

Para sus vacaciones llevó 870 €.