

3 POTENCIAS Y RAÍCES

1 ► POTENCIAS

Página 45

1 Calcula.

a) 5^3

b) 2^6

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

d) 8^1

e) $(-5)^3$

f) $(-2)^6$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

h) $(-8)^1$

a) $5^3 = 125$

b) $2^6 = 64$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

d) $8^1 = 8$

e) $(-5)^3 = -125$

f) $(-2)^6 = 64$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

h) $(-8)^1 = -8$

2 Expresa como una potencia de base 10.

a) 100 000

b) 100 000 000

c) Mil millones

d) Un billón

a) $100\,000 = 10^5$

b) Mil millones = 10^9

c) $100\,000\,000 = 10^8$

d) Un billón = 10^{12}

3 Escribe el cubo de todos los números enteros comprendidos entre -5 y +5.

$(-5)^3 = -125$

$(-1)^3 = -1$

$3^3 = 27$

$(-4)^3 = -64$

$0^3 = 0$

$4^3 = 64$

$(-3)^3 = -27$

$1^3 = 1$

$5^3 = 125$

$(-2)^3 = -8$

$2^3 = 8$

4 Escribe la descomposición polinómica de:

a) 250 467

b) 8 400 900

c) 42 800 500 000

a) $250\,467 = 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7$

b) $8\,400\,900 = 8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^2$

c) $42\,800\,500\,000 = 4 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^9 + 8 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^5$

5 ¿Qué número corresponde a cada descomposición?

a) $4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2$

b) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$

a) $4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 = 478\,602$

b) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 = 52\,086\,020$

Página 47

6 Reduce cada expresión a una sola potencia:

- | | |
|--|--|
| a) $x \cdot x^4 \cdot x^2$ | b) $x^9 : x^7$ |
| c) $x^2 \cdot (x^7 : x^6)$ | d) $(a^9 : a^6) \cdot a^2$ |
| e) $(a^3 \cdot a^5) : (a^4 \cdot a^4)$ | f) $\frac{x^3 \cdot x^6}{x^7}$ |
| g) $\frac{x^7 : x^2}{x^4 : x^3}$ | h) $\frac{x^4 \cdot x^2}{x \cdot x^3}$ |

- a) $x \cdot x^4 \cdot x^2 = x^{1+4+2} = x^7$ (Propiedad ③)
- b) $x^9 : x^7 = x^{9-7} = x^2$ (Propiedad ④)
- c) $x^2 \cdot (x^7 : x^6) = x^{2+(7-6)} = x^{2+1} = x^3$ (Propiedades ③ y ④)
- d) $(a^9 : a^6) \cdot a^2 = a^{(9-6)+2} = a^{3+2} = a^5$ (Propiedades ③ y ④)
- e) $(a^3 \cdot a^5) : (a^4 \cdot a^4) = a^{3+5} : a^{4+4} = a^8 : a^8 = 1$ (Propiedades ③ y ④)
- f) $\frac{x^3 \cdot x^6}{x^7} = \frac{x^{3+6}}{x^7} = \frac{x^9}{x^7} = x^{9-7} = x^2$ (Propiedades ③ y ④)
- g) $\frac{x^7 : x^2}{x^4 : x^3} = \frac{x^{7-2}}{x^{4-3}} = \frac{x^5}{x} = x^{5-1} = x^4$ (Propiedad ④)
- h) $\frac{x^4 \cdot x^2}{x \cdot x^3} = \frac{x^{4+2}}{x^{1+3}} = \frac{x^6}{x^4} = x^{6-4} = x^2$ (Propiedades ③ y ④)

7 Opera.

- | | | |
|--------------------|----------------------------|------------------------|
| a) $(x^3)^4$ | b) $(x^2)^5$ | c) $(x^3)^5 : x^{10}$ |
| d) $a^9 : (a^4)^2$ | e) $(a^2)^2 \cdot (a^2)^2$ | f) $(a^2)^4 : (a^3)^2$ |
- a) $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$
- b) $(x^2)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$
- c) $(x^3)^5 : x^{10} = x^{15} : x^{10} = x^5$
- d) $a^9 : (a^4)^2 = a^9 : a^8 = a$
- e) $(a^2)^2 \cdot (a^2)^2 = a^4 \cdot a^4 = a^8$
- f) $(a^2)^4 : (a^3)^2 = a^8 : a^6 = a^2$

8 Reduce a una sola potencia y después calcula.

- | | | |
|-----------------|--------------------------|--------------------|
| a) $7^5 : 7^3$ | b) $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ | c) $(-5)^7 : 5^6$ |
| d) $[(-3)^2]^2$ | e) $(7^2)^3 : (7^3)^2$ | f) $(-2)^3 : (-2)$ |
- a) $7^5 : 7^3 = 7^2 = 49$
- b) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^5 = -32$
- c) $(-5)^7 : 5^6 = -5^7 : 5^6 = -5$
- d) $[(-3)^2]^2 = (-3)^4 = 81$
- e) $(7^2)^3 : (7^3)^2 = 7^6 : 7^6 = 7^0 = 1$
- f) $(-2)^3 : (-2) = (-2)^2 = 4$

9 Calcula por el camino más corto, aplicando las propiedades 1 y 2, como en el ejemplo.

• $18^4 : 9^4 = (18 : 9)^4 = 2^4 = 16$

a) $2^5 \cdot 5^5$

b) $24^3 : 8^3$

c) $4^3 \cdot (-5)^3$

d) $(-10)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$

a) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$

b) $24^3 : 8^3 = (24 : 8)^3 = 3^3 = 27$

c) $4^3 \cdot (-5)^3 = [4 \cdot (-5)]^3 = (-20)^3 = -8\,000$

d) $(-10)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[(-10) \cdot \frac{1}{2}\right]^2 = (-5)^2 = 25$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^4 = 1^4 = 1$

10 Reduce a un único número racional en cada caso:

a) $2^3 \cdot 5^4$

b) $20^5 : 2^6$

c) $9^6 : (-3)^6$

d) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$

e) $\frac{6^5}{2^4} : 3^5$

f) $(-2)^8 : \left(\frac{1}{4}\right)^5$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{9}\right)^3$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$

a) $2^3 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 5 = 10^3 \cdot 5 = 5\,000$

b) $20^5 : 2^6 = (20^5 : 2^5) : 2 = (20 : 2)^5 : 2 = 10^5 : 2 = 50\,000$

c) $9^6 : (-3)^6 = [9 : (-3)]^6 = (-3)^6 = 729$

d) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{2^8 \cdot 5^4}{2^4} = 2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10\,000$

e) $\frac{6^5}{2^4} : 3^5 = \frac{(2 \cdot 3)^5}{2^4} : 3^5 = \frac{2^5 \cdot 3^5}{2^4} : 3^5 = (2 \cdot 3^5) : 3^5 = 2$

f) $(-2)^8 : \left(\frac{1}{4}\right)^5 = (-2)^8 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5 = (-2)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{(-2)^8}{2^{10}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^4}{4^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4}{3^6 \cdot (2^2)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4}{3^6 \cdot 2^8} = \frac{1}{3^2 \cdot 2^2} = \frac{1}{36}$

2 ► POTENCIAS DE EXPONENTE CERO O NEGATIVO

Página 49

1 Expresa en cada caso con una fracción irreducible o con un número entero:

a) 7^0

b) 3^{-3}

c) $(-3)^{-2}$

d) 8^{-1}

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^0$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

h) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$

a) $7^0 = 1$

b) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

c) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $8^{-1} = \frac{1}{8}$

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

h) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

2 Calcula.

a) $6^2 \cdot 3^{-4}$

b) $2^{-3} : 2^2$

c) $5^{-2} \cdot 5^{-3}$

d) $(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot 6^2$

e) $(3^2 \cdot 5^{-3}) \cdot (3^3 \cdot 5^{-2})$

f) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

a) $6^2 \cdot 3^{-4} = (3 \cdot 2)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{3^2 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

b) $2^{-3} : 2^2 = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

c) $5^{-2} \cdot 5^{-3} = 5^{-5} = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125}$

d) $(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot 6^2 = \frac{1}{(2 \cdot 3^2)^2} \cdot (2 \cdot 3)^2 = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

e) $(3^2 \cdot 5^{-3}) \cdot (3^3 \cdot 5^{-2}) = \frac{3^2}{5^3} \cdot \frac{3^3}{5^2} = \frac{3^5}{5^5} = \frac{243}{3125}$

f) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{2^2}{3^2} \cdot 3 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

3 Reduce a una sola potencia cada expresión:

a) $x^4 \cdot x^{-5}$

b) $x^2 : x^{-1}$

c) $x^{-3} \cdot (x^5 : x^6)$

d) $(a^2)^3 : a^7$

e) $a^8 \cdot (a^2)^{-3}$

f) $b^6 : (b^4 \cdot b^{-2})$

g) $\frac{x^2}{x^{-3}}$

h) $\frac{x^{-2}}{x}$

i) $\frac{x^7 : x^5}{x \cdot x^3}$

a) $x^4 \cdot x^{-5} = x^{-1}$

b) $x^2 : x^{-1} = x^3$

c) $x^{-3} \cdot (x^5 : x^6) = x^{-3} \cdot x^{-1} = x^{-4}$

d) $(a^2)^3 : a^7 = a^6 : a^7 = a^{-1}$

e) $a^8 \cdot (a^2)^{-3} = a^8 \cdot a^{-6} = a^2$

f) $b^6 : (b^4 \cdot b^{-2}) = b^6 : b^2 = b^4$

g) $\frac{x^2}{x^{-3}} = x^2 : x^{-3} = x^5$

h) $\frac{x^{-2}}{x} = x^{-3}$

i) $\frac{x^7 : x^5}{x \cdot x^3} = \frac{x^2}{x^4} = x^{-2}$

4 Reduce estas expresiones:

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x$

b) $\left(\frac{1}{a}\right)^4 : a^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{-2}$

d) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-8} \cdot \frac{x^6}{y^7}$

f) $\frac{a^5}{b^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x = x^2 \cdot x = x^3$

b) $\left(\frac{1}{a}\right)^4 : a^{-3} = a^{-4} : a^{-3} = a^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{-2} = x^2 \cdot x^{-2} = x^0 = 1$

d) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = a \cdot \frac{b}{a} = b$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-8} \cdot \frac{x^6}{y^7} = \frac{y^8}{x^8} \cdot \frac{x^6}{y^7} = \frac{y}{x^2}$

f) $\frac{a^5}{b^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \frac{a^5}{b^3} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^3}{b}$

3 ▶ RAÍCES EXACTAS

Página 50

1 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt{14\,400}$

d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{-3\,375}{1\,000}}$

a) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$

c) $\sqrt{14\,400} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{2}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{2^2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{-3\,375}{1\,000}} = \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3}} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{3}{2}$

2 ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) -5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y -3 .

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y -3 .

a) Falso.

Quando escribimos $\sqrt{25}$ nos referimos a la raíz positiva, luego $\sqrt{25} = 5$.

b) Verdadero.

$$(-5)^2 = 25.$$

c) Falso.

81 sí tiene dos raíces cuadradas pero son 9 y -9 . 3 y (-3) no son raíces de 81 ya que $3^2 = (-3)^2 = 9 \neq 81$.

d) Falso.

3 sí es raíz cúbica de 27, pues $3^3 = 27$. Sin embargo, (-3) no lo es, pues $(-3)^3 = -27 \neq 27$.

4 ► NOTACIÓN CIENTÍFICA

Página 51

Cálculo mental

Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $513\,000 = 5,13 \cdot 10^n$

b) $2\,577,6 = 2,5776 \cdot 10^n$

c) $453 \cdot 10^3 = 4,53 \cdot 10^n$

d) $125,3 \cdot 10^6 = 1,253 \cdot 10^n$

a) $n = 5$

b) $n = 3$

c) $n = 5$

d) $n = 8$

Cálculo mental

Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $0,000004 = 4 \cdot 10^n$

b) $0,00513 = 5,13 \cdot 10^n$

c) $0,45 \cdot 10^{-2} = 4,5 \cdot 10^n$

d) $0,0018 \cdot 10^{-5} = 1,8 \cdot 10^n$

a) $n = -6$

b) $n = -3$

c) $n = -3$

d) $n = -8$

1 Expresa estas cantidades en notación científica:

a) $2\,800\,000$

b) $169\,000\,000$

c) $7\,020\,000\,000$

d) $53\,420\,000\,000\,000$

a) $2\,800\,000 = 2,8 \cdot 10^6$

b) $169\,000\,000 = 1,69 \cdot 10^8$

c) $7\,020\,000\,000 = 7,02 \cdot 10^9$

d) $53\,420\,000\,000\,000 = 5,342 \cdot 10^{13}$

2 Expresa con todas sus cifras.

a) $3,6 \cdot 10^5$

b) $8,253 \cdot 10^8$

c) $2,27 \cdot 10^{11}$

a) $3,6 \cdot 10^5 = 360\,000$

b) $8,253 \cdot 10^8 = 825\,300\,000$

c) $2,27 \cdot 10^{11} = 227\,000\,000\,000$

3 Expresa estas cantidades en notación científica:

a) $0,00016$

b) $0,00000387$

c) $0,00000000083$

d) $0,000000000000000629$

a) $0,00016 = 1,6 \cdot 10^{-4}$

b) $0,00000387 = 3,87 \cdot 10^{-6}$

c) $0,00000000083 = 8,3 \cdot 10^{-10}$

d) $0,000000000000000629 = 6,29 \cdot 10^{-16}$

4 Expresa con todas sus cifras.

a) $2,65 \cdot 10^{-4}$

b) $8,253 \cdot 10^{-6}$

c) $2,27 \cdot 10^{-11}$

a) $2,65 \cdot 10^{-4} = 0,000265$

b) $8,253 \cdot 10^{-6} = 0,000008253$

c) $2,27 \cdot 10^{-11} = 0,0000000000227$

b) La masa de una molécula elemental son 18 : $(6,022 \cdot 10^{23}) \approx 2,989 \cdot 10^{-23}$ gramos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 54

Practica

Descomposición polinómica de un número

1 Escribe la descomposición polinómica de estos números:

- a) 3 450 300 b) 0,470286 c) 583,735 d) 39,084

a) $3\,450\,300 = 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2$

b) $0,470286 = 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6}$

c) $583,735 = 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$

d) $39,084 = 3 \cdot 10 + 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

2 Escribe el número que corresponde a cada descomposición:

a) $4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0$

b) $8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$

c) $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

a) $4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0 = 492\,607$

b) $8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} = 0,8495$

c) $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} = 263,74$

3 Utiliza las potencias de base 10 con exponente negativo para hacer las descomposiciones polinómicas de los siguientes decimales:

- a) 0,00203 b) -0,0000053 c) 0,00000000019

a) $0,00203 = 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-5}$

b) $-0,0000053 = -5 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-7}$

c) $0,00000000019 = 1 \cdot 10^{-10} + 9 \cdot 10^{-11}$

Potencias: propiedades y operaciones

4 Calcula las potencias siguientes:

a) $(-3)^3$

b) $(-2)^4$

c) $(-2)^{-3}$

d) -3^2

e) -4^{-1}

f) $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

i) $\left(\frac{4}{3}\right)^0$

a) $(-3)^3 = -27$

b) $(-2)^4 = 16$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

d) $-3^2 = -9$

e) $-4^{-1} = \frac{-1}{4}$

f) $(-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{-1}\right)^2 = 4$

i) $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$

5 Expresa como una potencia de base 2 o 3.

a) 64

b) 243

c) $\frac{1}{32}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $-\frac{1}{27}$

a) $64 = 2^6$

b) $243 = 3^5$

c) $\frac{1}{32} = 2^{-5}$

d) $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

e) $-\frac{1}{27} = (-3)^{-3}$

6 Expresa como potencia única.

a) $\frac{3^4}{3^{-3}}$

b) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

c) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^2$

e) $\left[\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{-1}\right]^3$

a) $\frac{3^4}{3^{-3}} = 3^7$

b) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1} = \frac{2^3}{2^2} = 2$

c) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}} = \frac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$

e) $\left[\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{-1}\right]^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

7 Reduce a una sola potencia.

a) $(11^7 \cdot 11^4) : 11^8$

b) $(a^8 : a^5)^4$

c) $(a^{-2})^3 \cdot a^9$

d) $(a^{-3} \cdot a^2)^{-4} : a^{-6}$

e) $12^5 : (-3)^5$

f) $8^{-6} \cdot 16^{-6}$

a) $(11^7 \cdot 11^4) : 11^8 = 11^{7+4-8} = 11^3$

b) $(a^8 : a^5)^4 = (a^{8-5})^4 = (a^3)^4 = a^{12}$

c) $(a^{-2})^3 \cdot a^9 = a^{-6} \cdot a^9 = a^{-6+9} = a^3$

d) $(a^{-3} \cdot a^2)^{-4} : a^{-6} = (a^{-1})^{-4} : a^{-6} = a^4 : a^{-6} = a^{10}$

e) $12^5 : (-3)^5 = 4^5 \cdot 3^5 : (-3)^5 = -4^5$

f) $8^{-6} \cdot 16^{-6} = (8 \cdot 16)^{-6} = 128^{-6}$

8 Simplifica.

a) $\frac{2a}{b^2} : \frac{3a^2}{b}$

b) $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a}$

c) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2}$

d) $(a^{-1} b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1}$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2}$

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} (a^{-1})^{-2}$

a) $\frac{2a}{b^2} : \frac{3a^2}{b} = \frac{2ab}{3a^2 b^2} = \frac{2}{3ab}$

b) $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b}{9b^2} = \frac{4a^2}{3b}$

c) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2} = (6a)^{-1} : (3^{-2} \cdot a^4) = \frac{1}{6a} : \frac{a^4}{3^2} = \frac{9}{6a^5} = \frac{3}{2a^5}$

d) $(a^{-1} b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1} = (a^{-2} \cdot b^4) \cdot (a^{-1} \cdot b^2) = \frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{b^6}{a^3}$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^4 \cdot \frac{a^3}{b^2} = \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{a^3}{b^2} = \frac{b^2}{a}$

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} (a^{-1})^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 \cdot a^2 = \frac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \frac{b^3}{a}$

9 Calcula, como en el ejemplo resuelto.

$$\bullet \frac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \frac{2^{10} \cdot 3^4}{3^2 \cdot 2^7} = 2^3 \cdot 3^2$$

a) $\frac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$

b) $\frac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$

c) $\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$

d) $\frac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$

a) $\frac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \frac{2^{10} \cdot 3^4}{2^7 \cdot 3^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

b) $\frac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot (2^2)^2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{5}{2}$

c) $\frac{2^{-5} \cdot 4^3}{16} = \frac{2^{-5} \cdot (2^2)^3}{2^4} = \frac{2^{-5} \cdot 2^6}{2^4} = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}} = \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}} = \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 3^4 = 81$

e) $\frac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2)^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot (2^2)^2} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4} = \frac{2^2 \cdot 3^6}{2^7 \cdot 3^2} = \frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$

Potencias de base 10

10 Indica el valor de n en cada caso:

a) $0,001 = 10^n$

b) $(10\,000)^2 = 10^n$

c) $0,00000001 = 10^n$

d) $0,0001^3 = 10^n$

a) $0,001 = 10^n \rightarrow n = -3$

b) $(10\,000)^2 = (10^4)^2 = 10^8 \rightarrow n = 8$

c) $0,00000001 = 10^n \rightarrow n = -7$

d) $0,0001^3 = (10^{-4})^3 = 10^{-12} \rightarrow n = -12$

11 ¿Verdadero o falso?

a) $(0,001)^{-3} = 10^9$

b) $(0,001)^4 = 10^{12}$

c) $(0,01)^3 = 10^{-6}$

d) $(10^{-2})^5 = (0,1)^{10}$

a) Verdadero. $(0,001)^{-3} = (10^{-3})^{-3} = 10^9$

b) Falso. $(0,001)^4 = (10^{-3})^4 = 10^{-12} \neq 10^{12}$

c) Verdadero. $(0,01)^3 = (10^{-2})^3 = 10^{-6}$

d) Verdadero. $(10^{-2})^5 = 10^{-10} = (10^{-1})^{10} = (0,1)^{10}$

12 Expresa como una potencia de base 10.

a) $(0,01)^{-5}$

b) $\left(\frac{1}{0,001}\right)^4$

c) $\left(\frac{1}{10^3}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{0,1^3}{10^5}\right)^2$

a) $(0,01)^{-5} = (10^{-2})^{-5} = 10^{10}$

b) $\left(\frac{1}{0,001}\right)^4 = \left(\frac{1}{10^{-3}}\right)^4 = (10^3)^4 = 10^{12}$

c) $\left(\frac{1}{10^3}\right)^{-3} = (10^{-3})^{-3} = 10^9$

d) $\left(\frac{0,1^3}{10^5}\right)^2 = \left(\frac{10^{-3}}{10^5}\right)^2 = (10^{-8})^2 = 10^{-16}$

13 Expresa como una potencia de base 10 estos enunciados:

a) El área en centímetros cuadrados de un cuadrado de lado 1 kilómetro.

b) El volumen en metros cúbicos de un cubo de arista 1 milímetro.

a) $1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ km} \times 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm} \times 10^5 \text{ cm} = (10^5)^2 \text{ cm}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$

b) $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \rightarrow 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} =$
 $= 10^{-3} \text{ m} \times 10^{-3} \text{ m} \times 10^{-3} \text{ m} = (10^{-3})^3 \text{ m}^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$

14 Escribe, como se hace en los ejemplos, dos potencias de base 10 consecutivas entre las que estén los siguientes números:

• $10^2 < 234 < 10^3$

$10^{-1} < 0,28 < 10^0$

a) 8,35

b) 762

c) 13 456

d) 1 230 022 045

e) 0,18

f) 0,008

g) 0,02

h) 0,000007

a) $10^0 < 8,35 < 10^1$

b) $10^2 < 762 < 10^3$

c) $10^4 < 13 456 < 10^5$

d) $10^9 < 1 230 022 045 < 10^{10}$

e) $10^{-1} < 0,18 < 10^0$

f) $10^{-3} < 0,008 < 10^{-2}$

g) $10^{-2} < 0,02 < 10^{-1}$

h) $10^{-6} < 0,000007 < 10^{-5}$

15 ¿Verdadero o falso?

a) El exponente de una potencia no puede ser un número negativo si la base es negativa.

b) Una potencia con exponente negativo es siempre negativa.

c) Si $a^n = -1$, entonces $a = -1$ y n es impar.

d) 5^{-2} es un número negativo.

e) $6^{-1} < 1$

f) $10^{-3} \cdot 10^{-2} = 0,1$

g) $(-8)^{-2} = (+8)^2$

a) Falso. Por ejemplo: $(-2)^{-1} = -1/2$

b) Falso. Por ejemplo: $(10)^{-1} = 0,1$

c) Verdadero.

d) Falso. $5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$

e) Verdadero.

f) Falso. $10^{-3} \cdot 10^{-2} = 10^{-5} \neq 0,1$

g) Falso. $(-8)^{-2} = (-1)^{-2} (8)^{-2} = 8^{-2} \neq 8^2$

Raíces

16 La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos $-\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz negativa. Es decir, $-\sqrt{4} = -2$.

¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?

- | | | |
|---|--|------------------------|
| a) $-\sqrt{64}$ | b) $\sqrt[4]{81}$ | c) $-\sqrt{1}$ |
| d) $\sqrt[6]{1}$ | e) $-\sqrt{9}$ | f) $\sqrt[3]{-8}$ |
| g) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ | h) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ | i) $\sqrt[3]{-1}$ |
| a) $-\sqrt{64} = -8$ | b) $\sqrt[4]{81} = 3$ | c) $-\sqrt{1} = -1$ |
| d) $\sqrt[6]{1} = 1$ | e) $-\sqrt{9} = -3$ | f) $\sqrt[3]{-8} = -2$ |
| g) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ | h) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ | i) $\sqrt[3]{-1} = -1$ |

17 Justifica cuál debe ser el valor de a , en cada caso, para que se verifique la igualdad:

- | | | |
|--|---|-----------------------------|
| a) $a^3 = 2^6$ | b) $a^{-1} = 2$ | c) $\sqrt{a} = \frac{4}{5}$ |
| d) $\sqrt[4]{a} = 1$ | e) $a^{-2} = \frac{1}{4}$ | f) $a^{-5} = -1$ |
| a) $a = 2^2$ | b) $a = \frac{1}{2}$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ | |
| c) $a = \frac{16}{25}$ porque $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ | d) $a = 1$ porque $\sqrt[4]{1} = 1$ | |
| e) $a = 2$ porque $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ | f) $a = -1$ porque $(-1)^{-5} = \frac{1}{(-1)^5} = -1$ | |

18 Calcula las siguientes raíces:

- | | | |
|---|-------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\sqrt[5]{16\,807}$ | b) $\sqrt[3]{\frac{27}{343}}$ | c) $\sqrt[4]{1,6 \cdot 10^5}$ |
| d) $\sqrt{\frac{289}{121}}$ | e) $\sqrt[3]{0,064}$ | f) $\sqrt[5]{0,00001}$ |
| g) $\sqrt[6]{2^{12}}$ | h) $\sqrt[5]{-1}$ | i) $\sqrt[4]{\frac{5^{-2}}{5^2}}$ |
| a) $\sqrt[5]{16807} = \sqrt[5]{7^5} = 7$ | | |
| b) $\sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{7^3}} = \frac{3}{7}$ | | |
| c) $\sqrt[4]{1,6 \cdot 10^5} = \sqrt[4]{16 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10 = 20$ | | |
| d) $\sqrt{\frac{289}{121}} = \sqrt{\frac{17^2}{11^2}} = \frac{17}{11}$ | | |
| e) $\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{64 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-1} = 0,4$ | | |
| f) $\sqrt[5]{0,00001} = \sqrt[5]{10^{-5}} = 10^{-1} = 0,1$ | | |
| g) $\sqrt[6]{2^{12}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2^6} = 2 \cdot 2 = 4$ | | |
| h) $\sqrt[5]{-1} = -1$ | | |
| i) $\sqrt[4]{\frac{5^{-2}}{5^2}} = \sqrt[4]{5^{-2} \cdot 5^{-2}} = \sqrt[4]{5^{-4}} = 5^{-1}$ | | |

19 Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:

- | | | | |
|--------------------|---------------------------|----------------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt[4]{16}$ | b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ | c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ | d) $\sqrt[4]{-1}$ |
| e) $\sqrt[3]{216}$ | f) $\sqrt[7]{-128}$ | g) $\sqrt[5]{-243}$ | h) $\sqrt[6]{4\,096}$ |
| i) $\sqrt[6]{64}$ | j) $\sqrt[3]{-8}$ | k) $\sqrt[4]{625}$ | |
| l) $\sqrt{-8}$ | m) $\sqrt[4]{625/16}$ | n) $\sqrt[5]{-1}$ | |
-
- | | | |
|----------------------------|------------------|------------------|
| a) 2 | b) $\frac{4}{5}$ | c) $\frac{1}{2}$ |
| d) No tiene solución real. | e) 6 | f) -2 |
| g) -3 | h) 4 | i) 2 |
| j) -2 | k) 5 | |
| l) No tiene solución real. | m) $\frac{5}{2}$ | n) -1 |

20 Las siguientes raíces no son exactas. ¿Entre qué naturales consecutivos están?

- | | | |
|-----------------------|--------------------|----------------------------|
| a) $\sqrt{1,5}$ | b) $\sqrt{130}$ | c) $\sqrt[3]{850}$ |
| d) $\sqrt[3]{1\,235}$ | e) $\sqrt[4]{520}$ | f) $\sqrt{1,5 \cdot 10^3}$ |
- a) $1^2 < 1,5 < 2^2 \rightarrow 1 < \sqrt{1,5} < 2$
- b) $11^2 < 130 < 12^2 \rightarrow 11 < \sqrt{130} < 12$
- c) $9^3 < 850 < 10^3 \rightarrow 9 < \sqrt[3]{850} < 10$
- d) $10^3 < 1\,235 < 11^3 \rightarrow 10 < \sqrt[3]{1\,235} < 11$
- e) $4^4 < 520 < 5^4 \rightarrow 4 < \sqrt[4]{520} < 5$
- f) $\sqrt{1,5 \cdot 10^3} = \sqrt{1500}$
 $38^2 < 1\,500 < 39^2 \rightarrow 38 < \sqrt{1500} < 39$

21 Simplifica, si se puede, como en el ejemplo.

- $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$
- | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ | b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ | c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ |
| d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ | e) $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$ | f) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
- a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ no se puede simplificar.
- c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ no se puede simplificar.
- e) $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{6}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{5}{3}\sqrt{5}$
- f) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

22 Simplifica, si es posible, teniendo en cuenta que:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$

e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{5 \cdot 16} = \sqrt{5 \cdot 2^4} = 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{20}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2} \rightarrow$ No tienen el mismo índice.

e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6} \rightarrow$ No tienen el mismo índice.

Notación científica

23 Escribe estos números con todas sus cifras:

a) $4 \cdot 10^7$

b) $5 \cdot 10^{-4}$

c) $9,73 \cdot 10^8$

d) $8,5 \cdot 10^{-6}$

e) $3,8 \cdot 10^{10}$

f) $1,5 \cdot 10^{-5}$

a) $4 \cdot 10^7 = 40\,000\,000$

b) $5 \cdot 10^{-4} = 0,0005$

c) $9,73 \cdot 10^8 = 973\,000\,000$

d) $8,5 \cdot 10^{-6} = 0,0000085$

e) $3,8 \cdot 10^{10} = 38\,000\,000\,000$

f) $1,5 \cdot 10^{-5} = 0,000015$

24 Expresa en notación científica.

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km

b) Caudal de una catarata: 1 200 000 L/s

c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s

d) Emisiones de CO₂: 54 900 000 000 kg

a) $1,5 \cdot 10^8$ km

b) $1,2 \cdot 10^6$ L/s

c) $3 \cdot 10^8$ m/s

d) $5,49 \cdot 10^{10}$ kg

25 Escribe en notación científica:

a) 13 800 000

b) 0,000005

c) 4 800 000 000

d) 0,0000173

e) $153 \cdot 10^4$

f) $93,8 \cdot 10^{-4}$

a) $1,38 \cdot 10^7$

b) $5 \cdot 10^{-6}$

c) $4,8 \cdot 10^9$

d) $1,73 \cdot 10^{-5}$

e) $1\,530\,000 = 1,53 \cdot 10^6$

f) $0,00938 = 9,38 \cdot 10^{-3}$

26 Completa estas igualdades:

a) $5,25 \cdot 10^7 = \dots \cdot 10^6$

b) $2 \cdot 10^3 = \dots \cdot 10^4$

c) $4,7 \cdot 10^{-3} = \dots \cdot 10^{-2}$

d) $234 \cdot 10^4 = \dots \cdot 10^3$

a) $52,5 \cdot 10^6$

b) $0,2 \cdot 10^4$

c) $0,47 \cdot 10^{-2}$

d) $2\,340 \cdot 10^3$

27 Di el valor de n en cada caso:

a) $3\,570\,000 = 3,57 \cdot 10^n$

c) $157,4 \cdot 10^3 = 1,574 \cdot 10^n$

a) $n = 6$

b) $n = -5$

b) $0,000083 = 8,3 \cdot 10^n$

d) $93,8 \cdot 10^{-5} = 9,38 \cdot 10^n$

c) $n = 5$

d) $n = -4$

29 Calcula y comprueba con la calculadora.

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$

c) $(3,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^7)$

a) $6 \cdot 10^{17}$

c) $6,8 \cdot 10^9$

e) $3 \cdot 10^{-14}$

b) $(1,5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

f) $(4,4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-5})$

b) $3 \cdot 10^{-12}$

d) $4 \cdot 10^{-5}$

f) $2,2 \cdot 10^{13}$

30 Efectúa y comprueba con la calculadora.

a) $3,6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$

a) $3,6 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = (36 - 4) \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3,2 \cdot 10^{12}$

b) $5 \cdot 10^9 + 81 \cdot 10^9 = 86 \cdot 10^9 = 8,6 \cdot 10^{10}$

c) $80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7,5 \cdot 10^{-8}$

d) $532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5,4 \cdot 10^{-4}$

b) $5 \cdot 10^9 + 8,1 \cdot 10^{10}$

d) $5,32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

Solución: Se consumen anualmente 141,3 kg por habitante.

36 Expresa en notación científica el número de segundos que tiene un año. ¿Qué edad tendría una persona que haya vivido 2 000 millones de segundos?

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ año tiene } 365 \text{ días} \\ 1 \text{ día tiene } 24 \text{ horas} \\ 1 \text{ hora tiene } 3\,600 \text{ segundos} \end{array} \right\} \rightarrow 365 \cdot 24 \cdot 3\,600 = 31\,536\,000$$

* si el año es bisiesto el resultado es otro.

$3,1536 \cdot 10^7$ segundos tiene un año.

$2\,000\,000\,000$ segundos $\rightarrow 2 \cdot 10^9 : 3,1536 \cdot 10^7 = 63,4$ años.

37 El velocista Usain Bolt recorre 1 m en $9,6 \cdot 10^{-2}$ s. El cohete Apolo X recorre 1 m en 90 microsegundos (μs). Ana dice que el Apolo X va más de 1 000 veces más rápido que Usain Bolt. ¿Es verdad esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Usain Bolt recorre 1 m en $9,6 \cdot 10^{-2}$ s.

Apolo X recorre 1 m en $90 \mu\text{s} = 90 \cdot 10^6 \text{ s} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

$$(9,6 \cdot 10^{-2}) : (9 \cdot 10^{-5}) = (9,6 : 9) \cdot 10^3 = 1,07 \cdot 10^3$$

$$1,07 \cdot 10^3 > 1\,000 = 10^3$$

Ana tiene razón; para recorrer 1 m, Usain Bolt necesita más de 1 000 veces más tiempo que el cohete Apolo X.

38 El ordenador chino Tianhe-2 puede realizar 34 mil billones de operaciones por segundo. Calcula cuántas operaciones puede realizar en:

a) 1 milisegundo.

b) 1 microsegundo.

c) 1 nanosegundo.

$$34 \text{ mil billones} = 34 \cdot 10^3 \text{ billones} = 34 \cdot 10^{15}$$

a) 1 segundo = 10^3 milisegundos

$$(34 \cdot 10^{15}) : 10^3 = 34 \cdot 10^{12}$$

Solución: En un milisegundo puede hacer $34 \cdot 10^{12}$ operaciones.

b) 1 segundo = 10^6 microsegundos

$$(34 \cdot 10^{15}) : 10^6 = 34 \cdot 10^9$$

Solución: En un microsegundo puede hacer $34 \cdot 10^9$ operaciones.

c) 1 segundo = 10^9 nanosegundos

$$(34 \cdot 10^{15}) : 10^9 = 34 \cdot 10^6$$

Solución: En un nanosegundo puede hacer $34 \cdot 10^6$ operaciones.

39 Consulta en Internet un reloj que mide, segundo a segundo, la población mundial y observo que en el último cuarto de hora ha aumentado en 876 personas. A ese ritmo, ¿cuándo llegaremos a los ocho mil millones? (Población actual: $7,5 \cdot 10^9$).

$$8\,000\,000\,000 = 8 \cdot 10^9$$

$$8 \cdot 10^9 - 7,5 \cdot 10^9 = 0,5 \cdot 10^9 = 5 \cdot 10^8 \text{ personas faltan.}$$

En 15 min aumentan 876 personas $\rightarrow$ En 1 hora aumentan $876 \cdot 4 = 3\,504$ personas

$$5 \cdot 10^8 : 3\,504 \approx 142\,694 \text{ horas} \approx 5\,945,6 \text{ días} \approx 16,3 \text{ años.}$$

Solución: Tardaremos unos 16,3 años en llegar a los ocho mil millones.

- 40** Un centímetro cúbico de agua contiene $3,35 \cdot 10^{22}$ moléculas de agua. Si en nuestro planeta hay, aproximadamente, $1,39 \cdot 10^9 \text{ km}^3$ de agua, ¿cuántas moléculas de agua hay en la Tierra? ¿Y en un vaso de $\frac{2}{5}$ de litro?

$$1,39 \cdot 10^9 \cdot 10^{15} = 1,39 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3$$

$$1,39 \cdot 10^{24} \cdot 3,35 \cdot 10^{22} = 4,6565 \cdot 10^{46} \text{ moléculas.}$$

$$\frac{2}{5} \text{ de litro} = \frac{2}{5} \text{ dm}^3 = \frac{2}{5} \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 0,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

$$0,4 \cdot 10^3 \cdot 3,35 \cdot 10^{22} = 1,34 \cdot 10^{25} \text{ moléculas en un vaso.}$$

- 41** La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Un *año luz* es la distancia que recorre la luz en un año.

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5,914 \cdot 10^6 \text{ km}$).

c) La estrella Alfa Centauri está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

a) $1 \text{ año} = 365 \text{ días} = 8760 \text{ horas} = 525\,600 \text{ min} = 31\,536\,000 \text{ s}$

$$\text{Recorre: } 31\,536\,000 \cdot (3 \cdot 10^8) = 9,4608 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Solución: Recorre $9,4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$ en un año.

b) $5,914 \cdot 10^6 \text{ km} = 5,914 \cdot 10^9 \text{ m}$

$$(5,914 \cdot 10^9) : (3 \cdot 10^8) = (5,914 : 3) \cdot 10 = 19,7133 \cdot 10 = 197,133 \text{ segundos}$$

$$197,133 : 3600 = 0,05476 \text{ horas} = 3,2856 \text{ días}$$

Solución: Tarda unos 3 días y medio en llegar.

c) $4,3 \text{ A.L.} = 4,3 \cdot (9,4608 \cdot 10^{12}) = 4,068 \cdot 10^{13} \text{ km}$

Solución: 4,3 años luz son $4,068 \cdot 10^{13} \text{ km}$.

- 42** De Neptuno al Sol hay $4,50 \cdot 10^9 \text{ km}$, y de la Tierra al Sol, $1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$. Cuando los tres estén alineados, ¿a qué distancia se encontrará Neptuno de la Tierra? Si una nave espacial sale de la Tierra con dirección a Neptuno a $18\,000 \text{ km/h}$, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a su destino?

Consideramos que el sol está en un extremo, entonces se restan las distancias:

$$4,5 \cdot 10^9 - 1,5 \cdot 10^8 = 4,4 \cdot 10^9 \text{ km}$$

$$t = \frac{e}{v} = \frac{4,4 \cdot 10^9}{1,8 \cdot 10^4} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ horas.}$$

43 La Gran Mancha de Basura en el Pacífico Norte está creciendo a gran velocidad. Una noticia afirma que esta área de residuos se expande por unos 1,6 millones de km^2 —es decir, casi tres veces el tamaño de Francia— y contiene cerca de 80 000 toneladas de plástico.

a) Expresa los datos en notación científica.

b) Calcula, con esos datos, la superficie de Francia, y comprueba la veracidad de la noticia buscando la superficie de Francia en Internet.



a) $1,6 \text{ millones de km}^2 = 1,6 \cdot 10^6 \text{ km}^2$

$80\,000 \text{ toneladas} = 8 \cdot 10^4 \text{ toneladas} = 8 \cdot 10^7 \text{ kg}$

b) Superficie de Francia según la noticia:

$(1,6 \cdot 10^6) : 3 = 0,533 \cdot 10^6 = 5,33 \cdot 10^5 \text{ km}^2$

Superficie real de Francia: $643\,801 \text{ km}^2 = 6,43801 \cdot 10^5 \text{ km}^2$

44 El proyecto *The Ocean Cleanup* espera poder limpiar la Gran Mancha de Basura del Pacífico Norte en 5 años retirando los desechos con el funcionamiento del *System 001*, formado por un tubo cilíndrico flotante (con estructura metálica interior) del que cuelga un faldón de lona. Estima la cantidad de residuos, en kilos, que será necesario recuperar cada día.

$5 \text{ años} = 5 \cdot 365 = 1\,825 \text{ días}$

Cantidad de plástico que hay que retirar $= 8 \cdot 10^7 \text{ kg}$

Cada día habrá que retirar: $(8 \cdot 10^7) : 1\,825 \approx 0,004384 \cdot 10^7 = 4,384 \cdot 10^4 \text{ kg}$

Solución: Cada día habrá que retirar unos 43 840 kg.

45 Naciones Unidas estima que durante la década de 2001-2010 se produjo en el mundo una pérdida anual de $1,3 \cdot 10^7$ hectáreas de bosques.

Por otra parte, en cierta página web, leo que la pérdida anual ha sido superior a la superficie de diez millones de campos de fútbol de $120 \text{ m} \times 75 \text{ m}$. Comprueba si es cierta esta información.

10 millones de campos 120×75 :

$$(10 \cdot 10^6) \cdot (120 \cdot 75) = 9 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$$

$$9 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 = 9 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^6 \text{ hm}^2$$

$$9 \cdot 10^6 \text{ ha} < 1,3 \cdot 10^7 \text{ ha}$$

Solución: La información es cierta, pues $9 \cdot 10^6 < 1,3 \cdot 10^7$.

46 La galaxia M87, que está a 50 millones de años luz de la Tierra, tiene un agujero negro cuyo diámetro es 60 años luz y cuya masa es dos mil millones de veces la masa del Sol.

a) Calcula la masa del agujero negro en kilogramos. (La masa del Sol es, aproximadamente, $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$).

b) Expresa en kilómetros la distancia de esa galaxia a la Tierra y el diámetro del agujero negro.

a) La masa del agujero negro es $2 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 4 \cdot 10^{39} \text{ kg}$.

b) Un año luz son $9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$.

$$\text{Distancia} = 50 \cdot 10^6 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 4,73 \cdot 10^{20} \text{ km}$$

$$\text{Diámetro} = 60 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 5,68 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

47 Meta 11.6. Leo en un diario la siguiente noticia:

La cantidad anual de CO_2 emitida en 2016 por una central de carbón fue 6930 000 toneladas, según el Registro Estatal de Emisiones y Fuentes Contaminantes. Para los coches nuevos, la emisión media es de 118,1 g CO_2/km según la Agencia Europea de Medio Ambiente y se estima que un vehículo nuevo recorre en España unos 25 000 km al año.

a) ¿La emisión de cuántas toneladas anuales de CO_2 se evitarían si suprimiéramos un vehículo nuevo?

b) ¿A cuántos coches nuevos equivale la cantidad de CO_2 emitida por la central en 2016?

c) ¿Es correcta la siguiente afirmación?

Un coche nuevo emite 2,9 t anuales de CO_2 y 2,3 millones de ellos emitirán tanto como la central.

a) $118,1 \cdot 25\,000 = 2\,952\,500 \text{ g} \approx 2,95 \text{ toneladas de } \text{CO}_2 \text{ emitidas por un coche nuevo.}$

b) $6930\,000 : 2,95 = 2\,349\,152,5 \text{ coches nuevos.}$

c) Un coche nuevo emite 2,9 toneladas anuales.

$$2,3 \text{ millones emiten } 6\,785\,000$$

Luego la afirmación es correcta.

AUTOEVALUACIÓN

Página 57

1 Calcula.

a) $(-2)^3$

b) -3^2

c) 2^{-3}

d) $-(-5)^3$

e) $(-3)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

h) $-\left(\frac{1}{3}\right)^3$

a) $(-2)^3 = -8$

b) $-3^2 = -9$

c) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $-(-5)^3 = -(-125) = 125$

e) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^5 = -32$

h) $-\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$

2 Escribe como una potencia de base 2, 3 o 10.

a) $\frac{1}{81}$

b) 0,001

c) 0,25

a) $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

b) $0,001 = 10^{-3}$

c) $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

3 Calcula.

a) $\left(\frac{3}{2} - 1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

b) $\left(2 + \frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

b) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{49}$

4 Calcula, expresando los radicandos como potencias.

a) $\sqrt{0,01}$

b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt[5]{-1}$

a) $\sqrt{0,01} = \sqrt{10^{-2}} = 10^{-1} = 0,1$

b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$

c) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

5 Las siguientes raíces no son exactas. ¿Entre qué naturales consecutivos están?

a) $\sqrt[4]{2345}$

b) $\sqrt[3]{104}$

a) $6^4 < 2345 < 7^4 \rightarrow 6 < \sqrt[4]{2345} < 7$

b) $4^3 < 104 < 5^3 \rightarrow 4 < \sqrt[3]{104} < 5$

6 Expresa en notación científica.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| a) $758 \cdot 10^{-5}$ | b) $0,035 \cdot 10^{13}$ |
| c) $101 \cdot 10^{11}$ | d) $0,1001 \cdot 10^{-7}$ |
| a) $7,58 \cdot 10^7$ | b) $3,5 \cdot 10^{11}$ |
| c) $1,01 \cdot 10^{13}$ | d) $1,001 \cdot 10^{-8}$ |

7 Opera y comprueba luego con la calculadora.

- | | |
|--|--|
| a) $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$ | b) $(9,6 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{10})$ |
| a) $28 \cdot 10^{-6} = 2,8 \cdot 10^{-5}$ | b) $3 \cdot 10^{-18}$ |

8 La reserva de gas natural más grande de Asia Central contiene $9 \cdot 10^{11} \text{ m}^3$. Si su producción anual es de $1,8 \cdot 10^{13}$ litros y se mantiene el mismo ritmo a lo largo del tiempo, ¿cuántos años se podrá explotar?

$$1,8 \cdot 10^{13} \text{ litros} = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } 1,8 \cdot 10^{10} \text{ m}^3 \rightarrow 1 \text{ años} \\ \text{Entonces } 9 \cdot 10^{11} \text{ m}^3 \rightarrow x \text{ años} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 10^{11}}{1,8 \cdot 10^{10}} = 50 \text{ años}$$