1 NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES

1 ▶ OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

Página 11

1 Resuelve las expresiones siguientes en el orden en que aparecen:

a) $13 - 2 \cdot 5$

b) $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5)$

c) $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5) - 7 \cdot 2$

a) $13 - 2 \cdot 5 = 13 - 10 = 3$

b) $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5) = 2 + 6 \cdot 3 = 2 + 18 = 20$

c) $2 + 6 \cdot (13 - 2 \cdot 5) - 7 \cdot 2 = 20 - 7 \cdot 2 = 20 - 14 = 6$

2 Resuelve.

a) $5 \cdot 3 - 2 \cdot 6$

b) $(14 - 9) \cdot 3 - (22 - 20) \cdot 6$

c) $(7 \cdot 2 - 9) \cdot 3 - (22 - 5 \cdot 4) \cdot 6$

a) $5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$

b) $(14 - 9) \cdot 3 - (22 - 20) \cdot 6 = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$

c) $(7 \cdot 2 - 9) \cdot 3 - (22 - 5 \cdot 4) \cdot 6 = (14 - 9) \cdot 3 - (22 - 20) \cdot 6 = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$

3 Calcula y comprueba que los resultados de los cuatro apartados son diferentes.

a) $3 \cdot 2^3 - 7 + 1$ **b) $3 \cdot 2^3 - (7 + 1)$**

c) $3 \cdot (2^3 - 7) + 1$ **d) $3 \cdot (2^3 - 7 + 1)$**

a) $3 \cdot 2^3 - 7 + 1 = 3 \cdot 8 - 7 + 1 = 24 - 7 + 1 = 18$

b) $3 \cdot 2^3 - (7 + 1) = 3 \cdot 8 - 8 = 24 - 8 = 16$

c) $3 \cdot (2^3 - 7) + 1 = 3 \cdot (8 - 7) + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

d) $3 \cdot (2^3 - 7 + 1) = 3 \cdot (8 - 7 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$

Se observa que todos los resultados son diferentes.

4 Calcula paso a paso y comprueba que el valor de cada una de estas expresiones es cero:

a) $14 - 2 \cdot (5^2 - 3 \cdot 6)$

b) $35 - 2 \cdot 4^2 - (2^3 - 10 : 2)$

c) $(6^2 : 4 + 2) - (6^2 - 5^2)$

a) $14 - 2 \cdot (5^2 - 3 \cdot 6) = 14 - 2 \cdot (25 - 18) = 14 - 2 \cdot 7 = 14 - 14 = 0$

b) $35 - 2 \cdot 4^2 - (2^3 - 10 : 2) = 35 - 2 \cdot 16 - (8 - 5) = 35 - 32 - 3 = 35 - 35 = 0$

c) $(6^2 : 4 + 2) - (6^2 - 5^2) = (36 : 4 + 2) - (36 - 25) = (9 + 2) - 11 = 11 - 11 = 0$

2 DIVISIBILIDAD

Página 12

1 **¿Cuáles de estos números son múltiplos de 2 y también de 5? ¿Cuáles son múltiplos de 10?**

34 35 40 72 85 90 108 115 140

Múltiplos de 2 y de 5: 40, 90, 140.

Múltiplos de 10: 40, 90, 140.

2 **Comprueba si 528 es múltiplo de 2, 3, 5, 11, 13 y 17.**

528 : 2 = 264. 528 sí es múltiplo de 2.

528 : 3 = 176. 528 sí es múltiplo de 3.

528 : 5 no es exacto. 528 no es múltiplo de 5.

528 : 11 = 48. 528 sí es múltiplo de 11.

528 : 13 no es exacto. 528 no es múltiplo de 13.

528 : 17 no es exacto. 528 no es múltiplo de 17.

3 **Inventa un número que sea múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez, pero que no sea el menor.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 60$

4 **Un número es divisible entre 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.**

a) A partir de este criterio, encuentra entre estos números los múltiplos de 9:

71 75 108 130 141 555 882 960

b) ¿Cuáles son múltiplos de 3?

a) 7 + 1 = 8. 71 no es múltiplo de 9.

7 + 5 = 12. 75 no es múltiplo de 9.

1 + 0 + 8 = 9. 108 sí es múltiplo de 9.

1 + 3 + 0 = 4. 130 no es múltiplo de 9.

1 + 4 + 1 = 6. 141 no es múltiplo de 9.

5 + 5 + 5 = 15. 555 no es múltiplo de 9.

8 + 8 + 2 = 18. 882 sí es múltiplo de 9.

9 + 6 + 0 = 15. 960 no es múltiplo de 9.

b) Múltiplos de 3: 75, 108, 141, 555, 882 y 960.

Página 13

5 **Averigua, como hemos hecho más arriba, si alguno de los siguientes números es primo:**

a) 83 **b) 91** **c) 107** **d) 139** **e) 221**

a) 83 no es múltiplo ni de 2, ni de 3, ni de 5.

$83 = 11 \cdot 7 + 6$. 83 no es múltiplo ni de 7 ni de 11. Y ya no hay que seguir.

83 es número primo.

b) 91 no es múltiplo ni de 2, ni de 3, ni de 5.

$91 = 13 \cdot 7$.

91 no es número primo.

c) 107 no es múltiplo ni de 2, ni de 3, ni de 5.

$107 = 15 \cdot 7 + 2$. 107 no es múltiplo de 7.

$107 = 9 \cdot 11 + 8$. 107 no es múltiplo de 11. Y ya no hay que seguir.

107 es número primo.

d) 139 no es múltiplo ni de 2, ni de 3, ni de 5.

$139 = 19 \cdot 7 + 6$. 139 no es múltiplo de 7.

$139 = 12 \cdot 11 + 7$. 139 no es múltiplo de 11.

$139 = 10 \cdot 13 + 9$. 139 no es múltiplo de 13. Y ya no hay que seguir.

139 es número primo.

e) 221 no es múltiplo ni de 2, ni de 3, ni de 5.

$221 = 31 \cdot 7 + 4$. 221 no es múltiplo de 7.

$221 = 20 \cdot 11 + 1$. 221 no es múltiplo de 11.

$221 = 17 \cdot 13$.

221 no es número primo.

6 **Escribe los primos comprendidos entre 50 y 70.**

Los números primos comprendidos entre 50 y 70 son: 53, 59, 61 y 67.

7 **Indica por qué cada uno de los siguientes números es compuesto:**

a) 111 **b) 207** **c) 990**

a) 111 es compuesto porque es múltiplo de 3 ($1 + 1 + 1 = 3$).

b) 207 es compuesto porque es múltiplo de 3 ($2 + 0 + 7 = 9$).

c) 990 es compuesto porque es múltiplo de 3 ($9 + 9 + 0 = 18$).

8 **¿Es divisible el número 109 por 2, 3 o 5? ¿Y por 9? ¿Y por 10?**

109 no es divisible por 2 porque no termina en cifra par; no es divisible por 3 porque la suma de sus cifras no es múltiplo de 3; no es múltiplo de 5 porque no termina ni en 0 ni en 5.

Tampoco es múltiplo de 9 porque la suma de sus cifras no es múltiplo de 9.

Por último, tampoco es múltiplo de 10 porque no termina en 0.

9 **Descompón en factores primos los siguientes números, teniendo en cuenta los criterios de divisibilidad:**

12, 15, 16, 18, 30, 100, 126, 168, 90, 125, 150, 528

$12 = 2^2 \cdot 3$

$15 = 3 \cdot 5$

$16 = 2^4$

$18 = 2 \cdot 3^2$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$100 = 2^2 \cdot 5^2$

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$125 = 5^3$

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$

10 **Completa los huecos en tu cuaderno:**

a) $3\,780 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5 \cdot \square$

b) $273\,273 = \square \cdot 7^{\square} \cdot \square \cdot 13^{\square}$

a) $3\,780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

b) $273\,273 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2$

Página 14

11 Calcula.

a) mín. c. m. (12, 18) **b) mín. c. m. (12, 30)**

c) mín. c. m. (18, 30) **d) mín. c. m. (12, 15, 18)**

e) mín. c. m. (12, 15, 30) **f) mín. c. m. (12, 18, 30)**

$12 = 2^2 \cdot 3$ $15 = 3 \cdot 5$ $18 = 2 \cdot 3^2$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

a) mín. c. m. $(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

b) mín. c. m. $(12, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

c) mín. c. m. $(18, 30) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

d) mín. c. m. $(12, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

e) mín. c. m. $(12, 15, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

f) mín. c. m. $(12, 18, 30) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

12 Calcula mentalmente el mín. c. m. de:

a) 8 y 12 **b) 20 y 30** **c) 6, 8 y 12**

d) 4, 10 y 15 **e) 2, 4, 5 y 8** **f) 4, 6, 9 y 12**

a) 8 y 12 $\rightarrow$ 24 b) 20 y 30 $\rightarrow$ 60 c) 6, 8 y 12 $\rightarrow$ 24

d) 4, 10 y 15 $\rightarrow$ 60 e) 2, 4, 5 y 8 $\rightarrow$ 40 f) 4, 6, 9 y 12 $\rightarrow$ 36

13 Calcula.

a) mín. c. m. (126, 168) **b) mín. c. m. (90, 125, 150)**

a)
$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$168 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

mín. c. m. $(126, 168) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$

b)
$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$125 = 5^3$

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

mín. c. m. $(90, 125, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2\,250$

14 ¿Verdadero o falso?

a) El mín. c. m. de tres números, a, b y $a \cdot b$, es $a \cdot b$.

b) Si dos números no tienen factores primos en común, su mín. c. m. es el producto de ellos.

c) El mín. c. m. de tres números primos distintos es 1.

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Falso. Su mínimo común múltiplo será el producto de los tres.

Página 15

15 **Calcula el máx. c. d. de:**

a) 12 y 18 **b) 12 y 30** **c) 18 y 30**

d) 30, 60 y 45 **e) 12, 15 y 30** **f) 60, 100 y 140**

a) $12 = 2^2 \cdot 3$ $18 = 2 \cdot 3^2$

máx. c. d. $(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$

b) $12 = 2^2 \cdot 3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

máx. c. d. $(12, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

c) $18 = 2 \cdot 3^2$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

máx. c. d. $(18, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

d) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $45 = 3^2 \cdot 5$

máx. c. d. $(30, 60, 45) = 3 \cdot 5 = 15$

e) $12 = 2^2 \cdot 3$ $15 = 3 \cdot 5$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

máx. c. d. $(12, 15, 30) = 3$

f) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $100 = 2^2 \cdot 5^2$ $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$

máx. c. d. $(60, 100, 140) = 2^2 = 4$

16 **Si *a* es divisor de *b* y *b* es divisor de *c*, ¿cuál es el máximo común divisor de *a*, *b* y *c*?**

máx. c. d. $(a, b, c) = a$

17 **Si *a* es múltiplo de *b* y *b* es múltiplo de *c*, ¿cuál es el máximo común divisor de *a*, *b* y *c*?**

máx. c. d. $(a, b, c) = c$

18 **Calcula mentalmente el máx. c. d. de:**

a) 8 y 12 **b) 20 y 30** **c) 6, 8, y 12**

d) 60, 15 y 30 **e) 1, 11 y 22** **f) 4, 6, 8 y 10**

a) 4 b) 10 c) 2

d) 15 e) 1 f) 2

19 **Calcula.**

a) máx. c. d. (630, 720)

b) máx. c. d. (315, 420, 273)

c) máx. c. d. (31 500, 42 000, 27 300)

a) $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

máx. c. d. $(630, 720) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

b) $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$

máx. c. d. $(315, 420, 273) = 3 \cdot 7 = 21$

c) máx. c. d. $(31\,500, 42\,000, 27\,300) = 3 \cdot 7 \cdot 100 = 2\,100$

3 NÚMEROS ENTEROS

Página 16

1 Calcula.

a) $-5 - 12 + 8 - 6 + 4 - 3$

b) $+(+8) + (-6) - (+5) - (-2) + (-3)$

c) $(12 - 15 + 9 - 7) - (2 - 13 + 6 - 1)$

d) $(-9) - (9 - 11) + (-8) - (10 - 7)$

a) $-5 - 12 + 8 - 6 + 4 - 3 = 12 - 26 = -14$

b) $+(+8) + (-6) - (+5) - (-2) + (-3) = 8 - 6 - 5 + 2 - 3 = 10 - 14 = -4$

c) $(12 - 15 + 9 - 7) - (2 - 13 + 6 - 1) = (21 - 22) - (8 - 14) = (-1) - (-6) = -1 + 6 = 5$

d) $(-9) - (9 - 11) + (-8) - (10 - 7) = (-9) - (-2) + (-8) - (3) = -9 + 2 - 8 - 3 = -18$

2 Hemos ido midiendo la temperatura en un cierto lugar a diferentes horas del día, observando estas variaciones: subió 2 °C, después bajó 3 °C y luego bajó otros 5 °C.

Si inicialmente había –1 °C, ¿cuál fue la temperatura final?

Temperatura inicial, –1 °C

Temperatura final $\rightarrow$ $-1 + 2 - 3 - 5 = -7$ °C

Página 17

3 **Resuelve expresando el proceso paso a paso.**

a) $5 - 6[(12 - 9) + (7 - 11)]$ **b)** $21 + 4[1 + 2 \cdot (6 - 10)]$

c) $15 - 3[5 \cdot (2 - 8) - (-14)]$ **d)** $5 - 32 : [9 : (7 - 10) + (-5)]$

e) $7 - 2 \cdot [(3 - 8) : (-5) + 3]$ **f)** $3 - (-4) \cdot (-6) - [(5 - 9) \cdot (-2) + 1] \cdot (-3)$

a) $5 - 6[(12 - 9) + (7 - 11)] = 5 - 6 \cdot [3 + (-4)] = 5 - 6 \cdot (3 - 4) = 5 - 6(-1) = 5 + 6 = 11$

b) $21 + 4[1 + 2 \cdot (6 - 10)] = 21 + 4 \cdot [1 + 2(-4)] = 21 + 4 \cdot [1 + (-8)] = 21 + 4 \cdot (1 - 8) =$
$= 21 + 4 \cdot (-7) = 21 - 28 = -7$

c) $15 - 3[5 \cdot (2 - 8) - (-14)] = 15 - 3 \cdot [5 \cdot (-6) + 14] = 15 - 3 \cdot [-30 + 14] =$
$= 15 - 3 \cdot (-16) = 15 + 48 = 63$

d) $5 - 32 : [9 : (7 - 10) + (-5)] = 5 - 32 : [9 : (-3) + (-5)] = 5 - 32 : [(-3) + (-5)] =$
$= 5 - 32 : (-8) = 5 + 4 = 9$

e) $7 - 2 \cdot [(3 - 8) : (-5) + 3] = 7 - 2 \cdot [(-5) : (-5) + 3] = 7 - 2 \cdot (1 + 3) = 7 - 2 \cdot 4 = 7 - 8 = -1$

f) $3 - (-4) \cdot (-6) - [(5 - 9) \cdot (-2) + 1] \cdot (-3) = 3 - (+24) - [-4 \cdot (-2) + 1] \cdot (-3) =$
$= 3 - 24 - [8 + 1] \cdot (-3) = 3 - 24 - 9(-3) =$
$= 3 - 24 + 27 = 6$

4 **Resuelve.**

a) $(-5)^2 + (-4)^3$ **b)** $(4 - 1)^3 + (1 - 4)^3$

c) $(7 - 2)^2 + (2 - 7)^2$ **d)** $(3 - 7)^2 + (3 - 4)^3 + (-3)^3$

e) $(1 - 7)^2 - (7 - 5)^3 + (3 - 5)^5$ **f)** $(12 - 4 - 5)^4 - [(2 - 6)^2 - (1 - 5)^3]$

a) $(-5)^2 + (-4)^3 = 25 + (-64) = -39$

b) $(4 - 1)^3 + (1 - 4)^3 = 3^3 + (-3)^3 = 27 + (-27) = 0$

c) $(7 - 2)^2 + (2 - 7)^2 = 5^2 + (-5)^2 = 25 + 25 = 50$

d) $(3 - 7)^2 + (3 - 4)^3 + (-3)^3 = (-4)^2 + (-1)^3 + (-3)^3 = 16 - 1 - 27 = -12$

e) $(1 - 7)^2 - (7 - 5)^3 + (3 - 5)^5 = (-6)^2 - 2^3 + (-2)^5 = 36 - 8 - 32 = -4$

f) $(12 - 4 - 5)^4 - [(2 - 6)^2 - (1 - 5)^3] = 3^4 - [(-4)^2 - (-4)^3] = 81 - [16 - (-64)] =$
$= 81 - (16 + 64) = 81 - 80 = 1$

4 NÚMEROS DECIMALES

Página 18

Aún más sencillo

Calcula mentalmente:

a) $1,5 + 0,25$ **b)** $3,25 + 2,2$ **c)** $2,75 - 0,5$ **d)** $3 - 2,8$

e) $2,75 \cdot 100$ **f)** $3,2 : 10$ **g)** $6 \cdot 0,5$ **h)** $6 \cdot 0,25$

i) $4,8 : 2$ **j)** $4,8 : 4$

a) 1,75 b) 5,45 c) 2,25 d) 0,2

e) 275 f) 0,32 g) 3 h) 1,5

i) 2,4 j) 1,2

Aún más sencillo

Calcula mentalmente:

a) ¿Cuánto le falta a 0,5 para llegar a 1? **b) ¿Cuánto le falta a 2,6 para llegar a 3?**

a) 0,5 b) 0,4

Aún más sencillo

Estima mentalmente, calcula y después compara:

a) $2,9 \cdot 3,1$ **b)** $5,99 : 1,9$ **c)** $(4,9 + 1,01) \cdot 2,99$

a) 8,99 b) 3,15 c) 17,67

Página 20

1 Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

3,52   2,888...   1,5454...   3,222…

2,7333...   3,5222…   1,030030003…

Exactos $\rightarrow$ 3,52

Periódicos puros $\rightarrow$ 2,888…; 1,5454…; 3,222…

Periódicos mixtos $\rightarrow$ 2,7333…; 3,5222…

Irracionales $\rightarrow$ 1,030030003…

2 Indica qué tipo de número decimal se obtiene en cada división:

a) 7 : 16   **b) 13 : 25**   **c) 1,6 : 0,9**

d) 4 : 11   **e) 0,04 : 0,3**   **f) 13,41 : 0,11**

a) Exacto (0,4375).

b) Exacto (0,52).

c) Periódico puro ($1,\widehat{7}$).

d) Periódico puro ($0,\widehat{36}$).

e) Periódico mixto ($0,1\widehat{3}$).

f) Periódico puro ($121,\widehat{90}$).

3 Ordena de menor a mayor estos números:

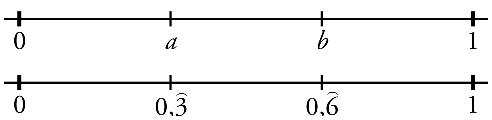
2,5 $2,\widehat{5}$ $2,3\widehat{5}$ 2,505005…

$2,3\widehat{5} < 2,5 < 2,505005\ldots < 2,\widehat{5}$

4 Escribe tres números decimales comprendidos entre 2,5 y $2,\widehat{5}$.

Por ejemplo: 2,51; 2,52; 2,53

5 Escribe los dos números, *a* y *b*, que dividen el intervalo entre cero y uno en tres partes iguales.



5 APROXIMACIONES Y ERRORES

Página 21

1 ¿Qué podemos decir del error absoluto de estas mediciones?

a) Ballena → 37 toneladas **b) Pavo → 3 kg**

a) Ballena → 37 toneladas; 365 < 37 < 37,25

Cometemos un error absoluto de 0,5 toneladas.

$\frac{0,5}{37} = 0,0\overparen{135} \rightarrow 0,0\overparen{135}$ error relativo.

b) Pavo → 3 kg; 2,52 < 3 < 3,5

Cometemos un error absoluto de 0,5 kg.

$\frac{0,5}{3} = 0,1\widehat{6} \rightarrow 0,1\widehat{6}$ error relativo.

2 ¿Cuál de las mediciones del ejercicio anterior es más precisa?
Razona tu respuesta.

La medición del peso de la ballena es más precisa que la del peso del pavo puesto que, aunque el error absoluto que cometemos es mayor en el peso de la ballena, el error relativo es mucho menor que el que cometemos al medir el peso del pavo.

6 ▶ NÚMEROS DECIMALES Y DIVISIBILIDAD CON CALCULADORA

Página 22

1 **Introduce en la calculadora cada una de las expresiones que ves a la derecha y comprueba que, al pulsar la tecla S⇔D, se obtiene la fracción correspondiente.**

a) $3,52$ **b)** $0,27$ **c)** $-0,321$

d) $0,0012$ **e)** $-3,213$ **f)** $5,\widehat{73}$

g) $-0,\widehat{23}$ **h)** $1,8\widehat{03}$ **i)** $-2,0\widehat{1}$

a) $\frac{88}{25}$ b) $\frac{27}{100}$ c) $\frac{-321}{1\,000}$

d) $\frac{3}{2\,500}$ e) $\frac{-3\,213}{1\,000}$ f) $\frac{568}{99}$

g) $\frac{-23}{99}$ h) $\frac{119}{66}$ i) $\frac{-181}{90}$

Página 23

2 **Opera con ayuda de la calculadora:**

a) $3{,}2 \cdot (1{,}7 - 1{,}\widehat{13})$ **b)** $2{,}3 : [3{,}4\widehat{1} - 3 \cdot (2{,}1 + 0{,}\widehat{8})]$

a) $1{,}81\widehat{97}$ b) $0{,}414$

3 **Factoriza los números 60, 840 y 450. Calcula:**

a) máx. c. d (60, 840, 450) **b) mín. c. m (60, 840, 450)**

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

a) máx. c. d. (60, 840, 450) = 30 b) mín. c. m (60, 840, 450) = 12 600

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 24

Practica

Divisibilidad

1 **Encuentra, entre los números siguientes, los que son múltiplos de 2, los múltiplos de 3 y los múltiplos de 5:**

120 148 125 114 285 270 171

Múltiplos de 2 (terminan en cifra par): 120, 148, 114, 270.

Múltiplos de 3 (la suma de sus cifras es múltiplo de 3): 120, 114, 285, 270, 171.

Múltiplos de 5 (terminan en 0 o en 5): 120, 125, 285, 270.

2 **Averigua si los números 89 y 217 son primos.**

- 89 no es múltiplo ni de 2, ni de 3, ni de 5.

  $89 = 12 \cdot 7 + 5$. 89 no es múltiplo de 7.

  $89 = 8 \cdot 11 + 1$. 89 no es múltiplo de 11. Y ya no hay que seguir.

  89 sí es número primo.

- 217 no es múltiplo de 2, ni de 3, ni de 5.

  $217 = 31 \cdot 7$. 217 sí es múltiplo de 7.

  217 no es número primo.

3 **Dado el número 34X averigua, en cada caso, los valores que puede tener X para que sea:**

a) Múltiplo de 2.
b) Múltiplo de 3.
c) Múltiplo de 5.
d) Múltiplo de 9.
e) Múltiplo de 6 (múltiplo de 2 y de 3).

a) X puede ser 0, 2, 4, 6 u 8 para que 34X termine en cifra par.

b) X puede ser 2, 5 u 8 para que la suma $3 + 4 + X$ sea múltiplo de 3.

c) X puede ser 0 o 5 para que 34X termine en 0 o en 5.

d) X puede ser 2 para que la suma $3 + 4 + X$ sea múltiplo de 9.

e) X puede ser 2 u 8 para que 34X sea múltiplo de 2 y de 3 a la vez.

4 **Calcula el máx. c. d. y el mín. c. m. de:**

a) **48 y 72** **b)** **12, 30 y 14** **c)** **90 y 150** **d)** **24, 36 y 40**

a) $48 = 2^4 \cdot 3$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$

máx. c. d. $(48, 72) = 2^3 \cdot 3 = 24$

mín. c. m. $(48, 72) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$

b) $12 = 2^2 \cdot 3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $14 = 2 \cdot 7$

máx. c. d. $(12, 30, 14) = 2$

mín. c. m. $(12, 30, 14) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

c) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

máx. c. d. $(90, 150) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

mín. c. m $(90, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$

d) $24 = 2^3 \cdot 3$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $40 = 2^3 \cdot 5$

máx. c. d. $(24, 36, 40) = 2^2 = 4$

mín. c. m $(24, 36, 40) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

5 **Escribe los números primos comprendidos entre 70 y 90.**

Los números primos comprendidos entre 70 y 90 son 71, 73, 79, 83 y 89.

Números enteros y decimales. Operaciones

6 **Ordena de menor a mayor los siguientes números:**

5,28 5,2 5,8 5,285 5,08 5,58

5,08 < 5,2 < 5,28 < 5,285 < 5,58 < 5,8

7 **Ordena de menor a mayor estos números:**

+11 –15 –1 +12 +1 0 –22 –3 +13

–22 < –15 < –3 < –1 < 0 < 1 < 11 < 12 < 13

8 **Escribe dos números decimales comprendidos entre los dos que se dan en cada caso:**

a) **2,8 y 2,9** **b)** **$3,25$ y $3,\widehat{25}$** **c)** **0,25 y 0,5** **d)** **$3,83$ y $3,\widehat{83}$**

a) 2,81; 2,83 b) 3,251; 3,2511 c) 0,3; 0,4 d) 3,831; 3,832

9 **Efectúa la división en cada caso e indica qué tipo de decimal obtienes:**

a) **147 : 20** **b)** **22 : 1,8** **c)** **5,68 : 1,8**

a) 147 : 20 = 7,35. Decimal exacto.

b) $22 : 1,8 = 12,\widehat{2}$. Decimal periódico puro.

c) $5,68 : 1,8 = 3,1\widehat{5}$. Decimal periódico mixto.

10 **Calcula mentalmente.**

a) $7 - 2 + 4$ **b)** $7 - (2 + 4)$ **c)** $7 - (2 - 4)$ **d)** $-7 + 2 - 4$

e) $11 + 3 \cdot 5 - 2$ **f)** $(7 + 3) \cdot 5 - 2$ **g)** $11 + 3 \cdot (5 - 2)$ **h)** $(7 + 3) \cdot (5 - 2)$

a) 9 b) 1 c) 9 d) -9

e) 24 f) 48 g) 20 h) 30

11 **Halla mentalmente.**

a) $20 \cdot (-350)$ **b)** $(50 \cdot 60) : 20$ **c)** $(-2) \cdot 75 \cdot (-2)$ **d)** $1\,640 \cdot 4$

a) $-7\,000$ b) 150 c) 300 d) 6 560

12 **Calcula mentalmente.**

a) $(-2)^5$ **b)** $(-2)^8$ **c)** $(-1)^{10}$

d) $(-1)^{23}$ **e)** $(-5)^2 - 5^2$ **f)** $(-2)^3 - 2^3$

a) -32 b) 256 c) 1

d) -1 e) 0 f) -16

13 **Resuelve.**

a) $6 - 5 \cdot [-4 - 1 + (-2)^2 - 3^2]$

b) $12 - 8 \cdot [-2 + 4 : (-1) - (-3 + 2)^4]$

c) $(-2)^5 : (3 + 1)^2 + 2 \cdot (-5 - 4 + 3)$

d) $10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 + 7 - 3)]$

e) $8 - (-3) \cdot (-5) - [(1 - 6) \cdot (-4) + 2] \cdot (-2)$

f) $[(5 - 9) \cdot (-2) + 1] - (-3) \cdot (-7) + (-11)$

g) $[(7 - 3) \cdot (-1)] \cdot (-2) + (-13) - (+4) \cdot (-7)$

h) $-[(-2)^2 \cdot (3 - 4)] + (-3)^3 - (5 \cdot 4 - 10)$

a) $6 - 5 \cdot [-4 - 1 + (-2)^2 - 3^2] = 6 - 5 \cdot (-4 - 1 + 4 - 9) = 6 - 5 \cdot (-10) = 6 + 50 = 56$

b) $12 - 8 \cdot [-2 + 4 : (-1) - (-3 + 2)^4] = 12 - 8 \cdot [-2 + 4 : (-1) - (-1)^4] =$

$= 12 - 8 \cdot (-2 - 4 - 1) = 12 - 8 \cdot (-7) = 12 + 56 = 68$

c) $(-2)^5 : (3 + 1)^2 + 2 \cdot (-5 - 4 + 3) = -32 : (4)^2 + 2 \cdot (-6) = -32 : 16 - 12 = -2 - 12 = -14$

d) $10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (-4 + 7 - 3)] = 10 - 10 \cdot [-6 + 5 \cdot (0)] = 10 - 10 \cdot (-6) = 10 + 60 = 70$

e) $8 - (-3) \cdot (-5) - [(1 - 6) \cdot (-4) + 2] \cdot (-2) = 8 - 15 - [(-5) \cdot (-4) + 2] \cdot (-2) =$

$= 8 - 15 - (20 + 2) \cdot (-2) = 8 - 15 - 22 \cdot (-2) =$

$= 8 - 15 - (-44) = 8 - 15 + 44 = 52 - 15 = 37$

f) $[(5 - 9) \cdot (-2) + 1] - (-3) \cdot (-7) + (-11) = [-4 \cdot (-2) + 1] - 21 - 11 =$

$= (8 + 1) - 21 - 11 = 9 - 21 - 11 = -23$

g) $[(7 - 3) \cdot (-1)] \cdot (-2) + (-13) - (+4) \cdot (-7) = [4 \cdot (-1)] \cdot (-2) + (-13) - (-28) =$

$= -4 \cdot (-2) - 13 + 28 = 8 - 13 + 28 = 36 - 13 = 23$

h) $-[(-2)^2 \cdot (3 - 4)] + (-3)^3 - (5 \cdot 4 - 10) = -[4 \cdot (-1)] + (-27) - (20 - 10) =$

$= -(-4) - 27 - 10 = 4 - 27 - 10 = -33$

14 **Calcula.**

a) $(+3) \cdot (-2)^3 - (+2) \cdot (-3)^3$

b) $(+3) \cdot [(-2)^3 - (+2)] \cdot (-3)^3$

c) $(-20) - (10 - 15)^2 + [(-5)^2 + (8 - 13)^2]$

d) $60 - (8 - 5)^3 + (-2) \cdot [(-2)^4 + 3 \cdot (2 - 7)]$

a) $(+3) \cdot (-2)^3 - (+2) \cdot (-3)^3 = 3 \cdot (-8) - 2 \cdot (-27) = -24 + 54 = 30$

b) $(+3) \cdot [(-2)^3 - (+2)] \cdot (-3)^3 = 3 \cdot (-8 - 2) \cdot (-27) = 3 \cdot (-10) \cdot (-27) = 810$

c) $(-20) - (10 - 15)^2 + [(-5)^2 + (8 - 13)^2] = -20 - (-5)^2 + [25 + (-5)^2] =$
$= -20 - 25 + (25 + 25) = -20 - 25 + 50 =$
$= -45 + 50 = 5$

d) $60 - (8 - 5)^3 + (-2) \cdot [(-2)^4 + 3 \cdot (2 - 7)] = 60 - (3)^3 + (-2) \cdot [16 + 3 \cdot (-5)] =$
$= 60 - 27 + (-2) \cdot (16 - 15) = 60 - 27 + (-2) \cdot 1 =$
$= 60 - 27 - 2 = 60 - 29 = 31$

15 **Copia en tu cuaderno y coloca los paréntesis necesarios para que cada igualdad sea cierta:**

a) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = 3$

b) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -3$

c) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -7$

d) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -1$

a) $(1 - 2)^3 + 3 \cdot 2 - 2 = 3$

b) $1 - 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -3$

c) $1 - 2^3 + 3 \cdot (2 - 2) = -7$

d) $(1 - 2)^3 + 3 \cdot (2 - 2) = -1$

16 **Opera mentalmente.**

a) 2,75 + 3,25 **b)** 8,75 – 3,25 **c)** 3,47 + 2,2 **d)** 14,8 – 2,3

e) 45,3 · 100 **f)** 45,3 : 100 **g)** 7,46 · 1 000 **h)** 74,6 : 1 000

i) 14,5 · 0,1 **j)** 28 · 0,01 **k)** 14,5 : 0,1 **l)** 28 : 0,01

a) 6 b) 5,50 c) 5,67 d) 12,5

e) 4 530 f) 0,453 g) 7 460 h) 0,0746

i) 1,45 j) 0,28 k) 145 l) 2 800

17 **Resuelve.**

a) 135,87 + 25,3 + 35,185

b) 125,3 – 34,85 + 27,14

c) 25,3 · 0,85

d) 12,8 · 6,07

e) 0,89 · 0,47

f) 1,875 · 8

a) 196,355

b) 117,59

c) 21,505

d) 77,696

e) 0,4183

f) 15

Página 25

18 Calcula.

a) 10 : 2 – (15,875 + 12,34 – 3,215) : 5 **b) (3,4 – 2,8) · 12 + 15,4 : 2**

c) 7,5 – 3 · (12,6 – 15) **d) 15,45 + 0,45 · (28,2 : 3 – 4)**

a) 10 : 2 – (15,875 + 12,34 – 3,215) : 5 = 5 – 25 : 5 = 5 – 5 = 0

b) (3,4 – 2,8) · 12 + 15,4 : 2 = 0,6 · 12 + 15,4 : 2 = 7,2 + 7,7 = 14,9

c) 7,5 – 3 · (12,6 – 15) = 7,5 – 3 · (–2,4) = 7,5 + 7,2 = 14,7

d) 15,45 + 0,45 · (28,2 : 3 – 4) = 15,45 + 0,45 · (9,4 – 4) = 15,45 + 0,45 · 5,4 = 17,88

19 Elige la respuesta correcta en cada caso.

a) Añado 3,2 a 7,9 y multiplico el resultado por 0,4.

La expresión que traduce este cálculo es:

I) 3,2 + 7,9 · 0,4 **II) (3,2 + 7,9) · 0,4**

b) Pago 28,80 € por un libro de 18 € y 6 cuadernos iguales.

La expresión que nos da el precio de un cuaderno es:

I) (28,80 – 18) : 6 **II) 28,80 – 18 : 6**

a) La respuesta correcta es la II).

b) La respuesta correcta es la I).

20 En cada caso, convierte en minutos:

a) 2,5 h **b) 390 s** **c) 3 h 25 min 15 s**

a) 2,5 h = 2,5 · 60 min = 150 min

b) 390 s = 390 : 60 min = 6,5 min

c) 3 h 25 min 15 s = (3 · 60 + 25 + 15 : 60) min = 205,25 min

21 En cada caso, convierte en horas:

a) 45 min **b) 1 h 36 min** **c) 270 min**

a) 45 min = 45 : 60 h = 0,75 h

b) 1 h 36 min = (1 + 36 : 60) h = 1,6 h

c) 270 min = 270 : 60 h = 4,5 h

Aproximaciones y errores

22 Calcula los cocientes de estas divisiones, dando el resultado redondeado a las centésimas:

a) 134,2 : 0,31 **b) 2,53 : 2,5** **c) 0,345 : 0,28** **d) 58,2 : 0,47**

a) 432,90 b) 1,01 c) 1,23 d) 123,83

23 **Opera con la calculadora y da cada resultado redondeado a las milésimas:**

a) $3,845 - 2,83 \cdot (4,53 : 2,8 + 2,75)$

b) $12,4 - 3,85 \cdot 2,6 - (3 - 4,7 : 2,6)$

c) $5,47 \cdot 2,83 - (5,28 + 4,5 : 2,7)$

a) $-8,516$ b) $1,198$ c) $8,533$

24 **¿Qué podemos decir del error absoluto en cada una de estas mediciones?**

a) Volumen de una bañera → 326 litros

b) Volumen de una piscina → 320 m^3

¿Cuál de las dos se ha realizado con mayor precisión? Explica tu respuesta.

a) Cometemos un error absoluto de 0,5 litros debido al redondeo → $325,5 < 326 < 326,5$

b) Cometemos un error absoluto de 0,5 m^3 debido al redondeo → $319,5 < 320 < 320,5$

Para saber cuál se ha realizado con mayor precisión calculamos el error relativo.

Error relativo del volumen de una bañera → $\dfrac{0,5}{326} \approx 0,001534$

Error relativo del volumen de una piscina → $\dfrac{0,5}{320} \approx 0,00156$

La medición que se ha hecho con más precisión es la del volumen de la bañera, ya que el error relativo es menor.

25 **Compara el error absoluto en las siguientes aproximaciones:**

a) Altura de un árbol: 3,58 m.

b) Distancia de mi casa al gimnasio: 1,5 km.

c) Longitud de una etapa ciclista: 98 km.

¿Cuál de estas tres mediciones es más precisa?

a) $E_a < 0,005$ m

b) $E_a < 0,05$ km $= 50$ m

c) $E_a < 0,5$ km $= 500$ m

Es más precisa la primera medición porque está dada con más cifras significativas.

Resuelve problemas

26 **Tengo una cinta de 120 cm y otra de 96 cm. Quiero cortarlas de modo que todos los trozos sean iguales pero lo más largos posible. ¿Cuánto medirá cada uno? ¿Cuántos trozos de cinta serán?**

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad$ $96 = 2^5 \cdot 3$

máx. c. d. $(120, 96) = 2^3 \cdot 3 = 24$

Cada trozo de cinta medirá 24 cm. De la cinta de 120 cm salen $120 : 24 = 5$ trozos. De la cinta de 96 cm salen $96 : 24 = 4$ trozos. Por tanto, en total son $5 + 4 = 9$ trozos de cinta.

27 **El autobús A sale cada 6 minutos; el B, cada 8 minutos, y el C, cada 10 minutos. Si los tres han coincidido en la parada a las 7:00, ¿cuándo volverán a estar los tres juntos?**

mín. c. m. $(6, 8, 10) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

Volverán a coincidir dentro de 120 min = 2 h. Por tanto, volverán a estar juntos a las 9:00.

28 **Tres amigas trabajan como voluntarias en una ONG de acuerdo con sus posibilidades de tiempo. Una de ellas va cada 4 días al local de la ONG, otra lo hace cada 20 días y la otra, cada 10 días. Suponiendo que un día se encuentran las tres, ¿cuántos días después volverán a encontrarse?**

mín. c. m. $(4, 20, 10) = 20$

Volverán a encontrarse dentro de 20 días.

29 **Hugo ha comprado 2,5 kg de manzanas a 1,65 €/kg, y 3,2 kg de peras a 2,1 €/kg. Tenía un vale descuento por valor de 3 €.**

a) ¿Cuánto ha tenido que pagar en total?

b) Si ha pagado con un billete de 20 €, ¿cuánto le ha sobrado?

1 kg de manzanas → 1,65 € $\qquad$ Vale descuento → 3 €

1 kg de peras → 2,1 €

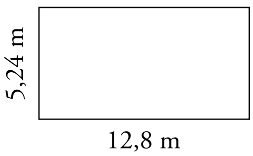
a) $2,5 \cdot 1,65 + 3,2 \cdot 2,1 - 3 = 7,845$

Hugo ha pagado 7,845 €.

b) $20 - 7,845 = 12,155$

Le han sobrado 12,16 €.

30 **María ha comprado una parcela de 5,24 m de largo por 12,8 m de ancho. Averigua cuánto le ha costado, sabiendo que ha pagado 50,20 € por cada metro cuadrado.**



Calculamos el área de la parcela:

$A = b \cdot h = 12,8 \text{ m} \cdot 5,24 \text{ m} = 67,072 \text{ m}^2$

Calculamos el precio total: $67,072 \cdot 50,20 = 3\,367,0144$

María ha pagado 3 367 € por la parcela.

31 **Una compañía telefónica cobra en las llamadas internacionales 2,35 € por la conexión y 1,25 € por minuto. ¿Cuánto costará una conferencia de 8 min 48 s?**

8 min 48 s = (8 + 48 : 60) min = 8,8 min

2,35 + 8,8 · 1,25 = 13,35 €

La conferencia costará 13,35 euros.

32 **Un grifo llena dos botellas de 1 litro de capacidad en un minuto. Determina cuántas botellas se pueden llenar en cada caso:**

a) En 20 minutos.

b) En tres cuartos de hora.

c) En 1,6 horas.

a) El grifo llena 2 L en 1 min. Por tanto, en 20 min puede llenar 40 botellas de 1 L.

b) En 45 min puede llenar 45 · 2 = 90 botellas de 1 L.

c) 1,6 h = 1,6 · 60 min = 96 min. En 1,6 h puede llenar 96 · 2 = 192 botellas de 1 L.

33 **Una cadena de montaje de electrodomésticos está programada para fabricar una lavadora cada 6 min 12 s. ¿Cuántas horas y minutos tardará en preparar un pedido de 50 lavadoras?**

En fabricar una lavadora se tardan (6 · 60 + 12) s = 372 s.

En fabricar 50 lavadoras se tardan 372 · 50 = 18600 s = 310 min = 5 h 10 min.

34 **Una empresa que fabrica ordenadores tiene que atender un pedido de 160 para la tienda A, de 240 para la tienda B y de 80 para la tienda C. La empresa decide, para optimizar el transporte, mandar camiones a cada tienda de manera que lleven la misma cantidad de ordenadores y que sea la máxima posible. ¿Cuántos camiones debe enviar a cada tienda?**

$160 = 2^5 \cdot 5$ $\quad$ $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad$ $80 = 2^4 \cdot 5$

máx. c. d. $(160, 240, 80) = 2^4 \cdot 5 = 80$

En cada camión enviará 80 ordenadores. A la tienda A enviará 160 : 80 = 2 camiones; a la tienda B, 240 : 80 = 3 camiones, y a la tienda C, 1 camión.

Página 26

35 **Ana compró un paquete de pasta y tres botes de tomate, uno para su padre y dos para un vecino. Pagó con un billete de 10 € y le devolvieron 1,40 €. Ana recuerda que el paquete de pasta costaba 2,30 €. ¿Cuánto le tiene que cobrar a su vecino por los dos botes de tomate?**

10 – 1,40 = 8,60 € le costó la compra.

8,60 – 2,30 = 6,30 € le costaron, en total, los 3 botes de tomate.

6,30 : 3 = 2,10 € le costó cada bote de tomate.

Por tanto, Ana tiene que cobrar 2,10 · 2 = 4,20 € a su vecino por los dos botes de tomate.

36 **Cada cápsula de un antibiótico lleva 4,5 mg de su principio activo. ¿Cuántas cápsulas se pueden fabricar con 1,8 kg de principio activo?**

1,8 kg = 1 800 000 mg

1 800 000 : 4,5 = 400 000 cápsulas

Se pueden fabricar 400 000 cápsulas.

37 **En un aparcamiento del centro de una ciudad se paga por minutos. Ayer estuve 3 horas y media y pagué 8,40 €. Calcula lo que hay que pagar si el tiempo de estancia es:**

a) 2 h 40 min **b) 18 min** **c) 1,8 h**

3,5 h = 3,5 · 60 min = 210 min.

El aparcamiento cobra 840 : 210 = 4 cént. por minuto.

a) 2 h 40 min = 2 · 60 + 40 = 160 min. Hay que pagar 160 · 4 = 640 cént. = 6,40 €.

b) Hay que pagar 18 · 4 = 72 cént.

c) 1,8 h = 1,8 · 60 min = 108 min. Hay que pagar 108 · 4 = 432 cént. = 4,32 €.

38 **Para limpiar un centro escolar, se necesitan cuatro empleados de limpieza trabajando 3 horas y media cada uno. Si uno está de baja y no lo sustituyen, ¿cuánto tiempo emplearán los otros tres en limpiar el centro escolar? Exprésalo en horas y minutos.**

Para limpiar el centro escolar se necesitan 3,5 · 4 = 14 h. Si solo hay tres empleados, necesitarán 14 h : 3 = 4 h 20 min en limpiar el centro escolar.

39 **En un triángulo isósceles, el perímetro es 25,2 cm, y el área, 29,1 cm^2. Si el lado desigual mide 6,8 cm, calcula la medida de cada uno de los lados iguales y la altura sobre el lado desigual del triángulo.**

Cada uno de los lados iguales medirá (25,2 – 6,8) : 2 = 18,4 : 2 = 9,2 cm.

La altura buscada medirá (29,1 · 2) : 6,8 = 58,2 : 6,8 = 8,56 cm.

40 **El sistema de seguimiento GPS de la Vuelta Ciclista indica que el grupo que encabeza la carrera está a 15 min 30 s de diferencia del ciclista que les persigue. Si la distancia se acorta 15 segundos cada kilómetro, ¿al cabo de cuántos kilómetros atrapará al grupo?**

15 min 30 s = (15 · 60 + 30) s = 930 s

930 : 15 = 62 km

Atrapará al grupo al cabo de 62 km.

41 **Los vecinos y las vecinas de una urbanización abonan 390 € mensuales por las 130 farolas que alumbran sus calles. ¿Cuántas farolas han de suprimir si desean reducir la factura mensual a 240 €?**

Abonan 390 : 130 = 3 € por farola.

Desean reducir 390 – 240 = 150 € la factura mensual.

Por tanto, tienen que suprimir 150 : 3 = 50 farolas.

42 **El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?**

Cada caja le cuesta 670 : 25 = 26,80 €.

Un pedido de 17 cajas le costará 26,80 · 17 = 455,60 €.

Si paga 938 € recibirá 938 : 26,80 = 35 cajas.

43 **Un autobús ha tardado 1 h 45 min en ir de un pueblo A a otro B a una velocidad media de 75 km/h. Si a la vuelta emplea 20 minutos más en hacer el mismo recorrido, ¿cuál ha sido su velocidad?**

1 h 45 min = (1 + 45 : 60) h = 1,75 h

La distancia del pueblo A al B es de 75 · 1,75 = 131,25 km.

A la vuelta tarda (1,75 + 20 : 60) h = 2,083 h

La velocidad de la vuelta es 131,25 : 2,083 = 63 km/h, aproximadamente.

44 **Una locomotora, a 85 km/h, tarda 3 horas y 18 minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades. ¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta si aumenta su velocidad a 110 km/h?**

3 h 18 min = (3 + 18 : 60) h = 3,3 h

La distancia entre las ciudades es de 85 · 3,3 = 280,5 km.

En el viaje de vuelta tardará 280,5 : 110 = 2,55 h = 2 h 33 min.

45 **Un campamento de refugiados de 4 600 personas tiene víveres para 24 semanas. ¿En cuánto se reducirá ese tiempo con la llegada de 200 nuevas personas?**

Si solo hubiera una persona, podría comer durante 4 600 · 24 = 110 400 semanas.

Si hay 4 800 personas, podrán comer durante 110 400 : 4 800 = 23 semanas.

Por tanto, si llegan 200 personas nuevas el tiempo se reducirá en 1 semana.

46 **Tres amigas, Ana, Berta y Carla, han repartido folletos publicitarios y les han pagado 900 €. Si Ana repartió 150 folletos; Berta, 250, y Carla, 200, ¿qué cantidad de dinero le corresponde a cada una?**

En total repartieron 150 + 250 + 200 = 600 folletos.

Por cada folleto que repartieron les pagaron 900 : 600 = 1,50 €.

A Ana le corresponden 150 · 1,50 = 225 €.

A Berta le corresponden 250 · 1,50 = 375 €.

A Carla le corresponden 200 · 1,50 = 300 €.

47 Veinte vacas consumen 210 kg de pienso a la semana.

a) ¿Cuánto pienso consume una vaca en un día?

b) ¿Cuántos kilogramos de pienso se necesitan para alimentar a 35 vacas durante 30 días?

a) Una vaca consume $210 : 20 = 10{,}5$ kg a la semana. Por tanto, consume $10{,}5 : 7 = 1{,}5$ kg al día.

b) Para alimentar 30 días a 35 vacas se necesitan $1{,}5 \cdot 30 \cdot 35 = 1\,575$ kg.

48 Una comerciante compra 125 kg de fresas a 1,75 €/kg. Durante el transporte se estropean 2 kg que tiene que eliminar. ¿A cuánto debe vender el kilo de las fresas que le quedan si quiere ganar 75 €?

Por la compra de las fresas se ha gastado $125 \cdot 1{,}75 = 218{,}75$ €.

Si quiere ganar 75 €, debe vender las fresas que le quedan por un total de $218{,}75 + 75 = 293{,}75$ €.

Como le quedan 123 kg, debe vender cada kilo a $293{,}75 : 123 = 2{,}39$ €.

49 Una empresa china que fabrica móviles debe enviar un pedido de un millón de teléfonos a EE. UU. Esta empresa cuenta con cinco modelos: A1, A2, A3, A4 y A5. El pedido se especifica en la siguiente tabla:

	UNIDADES
A1	230 000
A2	165 000
A3	155 000
A4	210 000
A5	240 000

El pedido se envía en lotes con la misma cantidad de teléfonos y separados por modelo. Si se desea que la cantidad de lotes sea la mínima posible, ¿cuántos lotes de cada modelo debe haber?

$230\,000 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 23$; $165 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 11$; $155\,000 = 2^3 \cdot 5^4 \cdot 31$

$210\,000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7$; $240\,000 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^4$

máx. c. d. $(230\,000, 165\,000, 155\,000, 210\,000, 240\,000) = 2^3 \cdot 5^4 = 5\,000$

Cada lote contendrá 5 000 unidades.

Del modelo A1 habrá $230\,000 : 5\,000 = 46$ lotes.

Del modelo A2 habrá $165\,000 : 5\,000 = 33$ lotes.

Del modelo A3 habrá $155\,000 : 5\,000 = 31$ lotes.

Del modelo A4 habrá $210\,000 : 5\,000 = 42$ lotes.

Del modelo A5 habrá $240\,000 : 5\,000 = 48$ lotes.

50 **Se reparten 190 € de un premio entre tres personas de modo que la segunda reciba 20 € más que la primera, y la tercera, 30 € más que la segunda. ¿Cuánto le corresponde a cada una?**

La segunda persona recibe 20 € más que la primera. La tercera persona recibe 20 + 30 = = 50 € más que la primera.

190 – (20 + 50) = 190 – 70 = 120

120 : 3 = 40 € es la parte igual que reciben las tres personas.

Por tanto, la primera persona recibe 40 €; la segunda, 60 €, y la tercera, 90 €.

51 **María hace un viaje de 300 km en tres etapas. Si en la primera recorre 80 km, y en la segunda 20 km más que en la tercera, ¿cuál es la distancia que recorre en la última etapa?**

300 – 80 = 220 km tiene que hacer entre la segunda y la tercera etapa.

(220 – 20) : 2 = 200 : 2 = 100 km es la parte igual que hace en las etapas segunda y tercera.

Por tanto, en la segunda etapa recorre 120 km, y en la tercera, 100 km.

52 **Un comerciante del mercadillo pone a la venta 100 pares de calcetines a 2,85 € el par. Cuando lleva vendidos 75 pares, decide rebajarlos a 1,99 € para acelerar la venta. Así, consigue agotar la mercancía antes de levantar el puesto. ¿Cuál será su ganancia, teniendo en cuenta que pagó 225 € por el lote?**

75 · 2,85 + 25 · 1,99 – 225 = 38,5

El comerciante obtiene un beneficio de 38,50 €.

53 ¿A qué precio medio ha vendido el par de calcetines el comerciante del ejercicio anterior?

$75 \cdot 2{,}85 + 25 \cdot 1{,}99 = 263{,}5$

$263{,}5 : 100 = 2{,}635$

El par de calcetines lo ha vendido a un precio medio de 2,64 €.

54 En un mercadillo hacen las siguientes ofertas:

- **5 calzoncillos valen lo mismo que 3 camisetas.**
- **2 camisetas valen como 5 bragas.**
- **1 braga vale 1,90 €.**

¿Cuánto cuesta un calzoncillo?

5 bragas valen $5 \cdot 1{,}90 = 9{,}50$ €. 2 camisetas valen 9,50 €.

1 camiseta vale $9{,}50 : 2 = 4{,}75$ €.

3 camisetas valen $4{,}75 \cdot 3 = 14{,}25$ €. 5 calzoncillos valen 14,25 €.

1 calzoncillo cuesta $14{,}25 : 5 = 2{,}85$ €.

55 Un gimnasio mide 21,25 m de ancho por 34,8 m de largo. Para limpiar el suelo, se utiliza una máquina fregadora que limpia 1 000 m^2 por hora. ¿Se podrá limpiar el gimnasio en tres cuartos de hora con esa máquina?

La superficie del gimnasio son $21{,}25 \cdot 34{,}8 = 739{,}5$ m^2.

En tres cuartos de hora, la fregadora limpia $(1\,000 \cdot 3) : 4 = 750$ m^2.

Por tanto, sí se podrá limpiar el gimnasio en tres cuartos de hora.

56 Se desea cubrir con baldosas cuadradas una habitación de 330 cm de ancho por 390 cm de largo. ¿Qué tamaño deben tener las baldosas si deben ser lo más grandes posible y no se quiere cortar ninguna?

máx.c.d. $(330, 390) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Las baldosas tendrán un tamaño de 30 cm de largo y 30 cm de ancho.

AUTOEVALUACIÓN

Página 27

1 Resuelve.

a) $34 - 24 : 3 + 6 \cdot 7$
b) $18 - (-2)^2 \cdot (-10) + (-8) \cdot (-3)$
c) $(5 - 9)^2 : 2 - (-12 + 8) \cdot 2^3 - 10$

a) $34 - 24 : 3 + 6 \cdot 7 = 34 - 8 + 42 = 76 - 8 = 68$

b) $18 - (-2)^2 \cdot (-10) + (-8) \cdot (-3) = 18 - 2 \cdot (-10) + 24 = 18 + 20 + 24 = 62$

c) $(5 - 9)^2 : 2 - (-12 + 8) \cdot 2^3 - 10 = (-4)^2 : 2 - (-4) \cdot 2^3 - 10 =$

$= 16 : 2 + 4 \cdot 8 - 10 = 4 + 32 - 10 = 26$

2 Calcula.

a) $(2{,}4 - 0{,}5) - (7{,}2 : 4)$
b) $3{,}5 \cdot 1{,}2 - 4 \cdot 0{,}8 - 3{,}8$

a) $(2{,}4 - 0{,}5) - (7{,}2 : 4) = 1{,}9 - 1{,}8 = 0{,}1$

b) $3{,}5 \cdot 1{,}2 - 4 \cdot 0{,}8 - 3{,}8 = 4{,}2 - 3{,}2 - 3{,}8 = -2{,}8$

3 Escribe tres números comprendidos entre $2{,}\widehat{6}$ y 2,65.

Respuesta abierta. Por ejemplo: 2,651; 2,657; 2,665.

4 Averigua si los números 113 y 143 son primos.

- 113 no es múltiplo ni de 2, ni de 3, ni de 5.

  $113 = 16 \cdot 7 + 1$. 113 no es múltiplo de 7

  $113 = 10 \cdot 11 + 3$. 113 no es múltiplo de 11. Ya no hay que seguir.

  113 es número primo.

- $143 = 11 \cdot 13$. 143 no es número primo.

5 En una carpintería se quiere cortar una plancha de madera, de 128 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible.

a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
b) ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

a) $128 = 2^7$ $\qquad$ $96 = 2^5 \cdot 3$

máx. c. d. $(128, 96) = 2^5 = 32$

El lado de cada cuadrado debe medir 32 cm.

b) $128 : 32 = 4$ $\qquad$ $96 : 32 = 3$

En total de obtienen $4 \cdot 3 = 12$ cuadrados de la plancha.

6 **Un grifo que vierte 4 litros por minuto tarda 8 min 30 s en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si echase 5 litros por minuto? Da la respuesta en minutos y segundos.**

El depósito tiene una capacidad de $4 \cdot 8{,}5 = 34$ L.

Si echase 5 L/min, tardaría $34 : 5 = 6{,}8$ min $= 6$ min $(0{,}8 \cdot 60)$ s $= 6$ min 48 s.

7 **¿Verdadero o falso?**

a) Dividir por 0,25 es lo mismo que multiplicar por 4.

b) Multiplicar por 0,4 es lo mismo que dividir por 2.

c) $\mathbf{1 - (-3)^2 = 10}$

d) Si a **es múltiplo de** b**, entonces:**

$$\text{mín.c.m.}\,(a, b) = a$$

e) Si a **es múltiplo de** b**, entonces:**

$$\text{máx.c.d.}\,(a, b) = b$$

f) $\mathbf{(-1)^3 - (5 - 12)^2 = -50}$

a) Verdadero.

b) Falso. Multiplicar por 0,4 es lo mismo que dividir por 2,5.

c) Falso. $1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8$

d) Verdadero.

e) Verdadero.

f) Verdadero.

8 **En un obrador han sacado una hornada de magdalenas. Si las envasan en bolsas de 10, sobran cinco, y lo mismo ocurre si las envasan en bolsas de 12.**

¿Cuántas magdalenas han salido del horno, sabiendo que son más de 150 pero menos de 200?

Múltiplos de 10 mayores que 150 y menores que 200: 160, 170, 180 y 190.

Múltiplos de 12 mayores que 150 y menores que 200: 156, 168 y 180.

Como 180 es múltiplo común, se habrán horneado 185 magdalenas.

9 **En una cooperativa tienen 420 litros de un tipo de aceite y 225 litros de otro. Quieren envasarlo, sin mezclar, en el menor número posible de garrafas iguales. ¿Qué capacidad tendrá cada garrafa?**

máx. c. d. $(420, 225) = 3 \cdot 5 = 15$

Cada garrafa tendrá una capacidad de 15 litros.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Página 27

Una cuestión de comas

- **Poniendo una coma en el lugar adecuado, la siguiente expresión es cierta:**

  «CINCO POR CUATRO VEINTE MÁS UNO, VEINTIDÓS»

¿Podrías aclarar la cuestión?

Cinco por cuatro coma veinte más uno, veintidós.

$5 \times 4{,}20 + 1 = 22$

2 FRACCIONES

2 FORMA FRACCIONARIA Y DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Página 30

1 **Pasa estas fracciones a forma decimal:**

a) $\frac{7}{2}$ **b)** $\frac{3}{8}$

c) $\frac{5}{12}$ **d)** $\frac{29}{30}$

a) $\frac{7}{2} = 7 : 2 = 3{,}5$

b) $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$

c) $\frac{5}{12} = 5 : 12 = 0{,}41\overset{\frown}{6}$

d) $\frac{29}{30} = 29 : 30 = 0{,}9\overset{\frown}{6}$

2 **Pasa a forma fraccionaria.**

a) 10 **b)** 1,2 **c)** 0,34 **d)** 0,005

e) $0{,}\overset{\frown}{8}$ **f)** $0{,}3\overset{\frown}{5}$ **g)** $1{,}2\overset{\frown}{7}$ **h)** $11{,}4\overset{\frown}{6}$

a) $10 = \frac{10}{1}$

b) $1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

c) $0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$

d) $0{,}005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$

e) $0{,}\overset{\frown}{8}$

$$\begin{array}{r} 10N = 8{,}888\ldots \\ -\ N = 0{,}888\ldots \\ \hline 9N = 8 \end{array} \rightarrow N = \frac{8}{9}$$

f) $0{,}3\overset{\frown}{5}$

$$\begin{array}{r} 100N = 35{,}5555\ldots \\ -\ 10N = 3{,}5555\ldots \\ \hline 90N = 32 \end{array} \rightarrow N = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

g) $1{,}2\overset{\frown}{7}$

$$\begin{array}{r} 100N = 127{,}7777\ldots \\ -\ 10N = 12{,}7777\ldots \\ \hline 90N = 115 \end{array} \rightarrow N = \frac{115}{90} = \frac{23}{18} = 1 + \frac{5}{18}$$

h) $11{,}4\overset{\frown}{6}$

$$\begin{array}{r} 100N = 1\,146{,}666\ldots \\ -\ 10N = 114{,}666\ldots \\ \hline 90N = 1\,032 \end{array} \rightarrow N = \frac{1032}{90} = \frac{172}{15} = 11 + \frac{7}{15}$$

3 ▸ LA FRACCIÓN COMO OPERADOR

Página 31

Calculo mental

Calcula mentalmente.

a) Los dos quintos de 400.

b) El número cuyos dos quintos es 40.

c) Los tres séptimos de 140.

d) El número cuyos cinco sextos es 25

a) $\frac{2}{5}$ de 400 = 160 b) 100 c) $\frac{3}{7}$ de 140 = 60 d) 30

1 Calcula.

a) $\frac{3}{4}$ **de 48** **b)** $\frac{2}{5}$ **de 350** **c)** $\frac{7}{10}$ **de 1 480**

a) $\frac{3}{4}$ de 48 = (48 : 4) · 3 = 12 · 3 = 36

b) $\frac{2}{5}$ de 350 = (350 : 5) · 2 = 150 · 2 = 300

c) $\frac{7}{10}$ de 1 480 = (1 480 : 10) · 7 = 148 · 7 = 1 036

2 Los $\frac{2}{5}$ **de un número valen 14. ¿Qué número es?**

$\frac{2}{5}$ de $C = 14 \rightarrow C = (14 : 2) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$

El número es 35.

3 Calcula el valor de M **y** N.

a) $\frac{3}{10}$ **de** $M = 18$ **b)** $\frac{5}{12}$ **de** $N = 120$

a) $\frac{3}{10}$ de $M = 18 \rightarrow M = (18 : 3) \cdot 10 = 60$

b) $\frac{5}{12}$ de $N = 120 \rightarrow N = (120 : 5) \cdot 12 = 288$

4 Una botella de aceite de 3/4 de litro cuesta 3,45 €. ¿A cómo sale el litro?

3/4 de litro son 3,45.

Veamos cuánto cuesta 1/4 de litro → 3,45 : 3 = 1,15 €

El litro lo forman cuatro cuartos → 1,15 · 4 = 4,60 €

El litro de aceite sale a 4,60 €.

4 EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

Página 32

1 Expresa en forma decimal estas fracciones:

$\dfrac{6}{16}$ $\quad \dfrac{9}{24}$ $\quad \dfrac{12}{32}$ $\quad \dfrac{15}{40}$ **¿Qué observas?**

$\dfrac{6}{16} = 6 : 16 = 0{,}375$ $\qquad \dfrac{9}{24} = 9 : 24 = 0{,}375$

$\dfrac{12}{32} = 12 : 32 = 0{,}375$ $\qquad \dfrac{15}{40} = 15 : 40 = 0{,}375$

Al expresar las fracciones en decimal, resulta el mismo número. Por tanto, todas las fracciones son equivalentes.

2 Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{70}{90}$ **b)** $\dfrac{8}{36}$ **c)** $\dfrac{15}{35}$ **d)** $\dfrac{36}{48}$

a) $\dfrac{70}{90} = \dfrac{70:10}{90:10} = \dfrac{7}{9}$ $\qquad$ b) $\dfrac{8}{36} = \dfrac{8:4}{36:4} = \dfrac{2}{9}$

c) $\dfrac{15}{35} = \dfrac{15:5}{35:5} = \dfrac{3}{7}$ $\qquad$ d) $\dfrac{36}{48} = \dfrac{36:12}{48:12} = \dfrac{3}{4}$

3 Obtén en cada caso la fracción irreducible:

a) $\dfrac{13}{39}$ **b)** $\dfrac{84}{210}$ **c)** $\dfrac{125}{75}$ **d)** $\dfrac{450}{480}$

a) $\dfrac{13}{39} = \dfrac{13:13}{39:13} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ b) $\dfrac{84}{39} = \dfrac{84:21}{210:21} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

c) $\dfrac{125}{75} = \dfrac{125:25}{75:25} = \dfrac{5}{3}$ $\qquad$ d) $\dfrac{450}{480} = \dfrac{450:30}{480:30} = \dfrac{15}{16}$

4 Escribe dos fracciones equivalentes a $\dfrac{9}{12}$, una cuyo denominador sea 4 y otra cuyo numerador sea 90.

- Para que la fracción tenga denominador 4, lo habremos tenido que dividir entre 3, por tanto, tenemos que hacer lo mismo con el numerador:

$$\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

- Para que el numerador de la fracción sea 90, lo habremos tenido que multiplicar por 10, por tanto, tenemos que hacer lo mismo con el denominador:

$$\frac{9}{12} = \frac{9 \cdot 10}{12 \cdot 10} = \frac{90}{120}$$

Página 33

Cálculo mental

Compara mentalmente cada pareja de fracciones:

a) $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{6}{8}$ **y** $\frac{7}{8}$ **c)** 1 **y** $\frac{6}{8}$

d) $\frac{3}{5}$ **y** $\frac{6}{10}$ **e)** 3 **y** $\frac{8}{11}$ **f)** 2 **y** $\frac{6}{3}$

a) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ c) $1 > \frac{6}{8}$

d) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ e) $3 > \frac{8}{11}$ f) $2 = \frac{6}{3}$

5 Compara estas fracciones: $\frac{5}{6}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$

Para comparar las fracciones, las sustituimos por sus equivalentes con denominador común:

$$\frac{5}{6}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5} \to \frac{50}{60}; \frac{45}{60}; \frac{48}{60} \to \frac{45}{60} < \frac{48}{60} < \frac{50}{60} \to \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$$

6 Ordena de menor a mayor: $\frac{5}{6}; \frac{7}{9}; \frac{5}{12}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}$

Para comparar las fracciones, las sustituimos por sus equivalentes con denominador común:

$$\frac{5}{6}; \frac{7}{9}; \frac{5}{12}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3} \to \frac{30}{36}; \frac{28}{36}; \frac{15}{36}; \frac{27}{36}; \frac{24}{36} \to$$

$$\to \frac{15}{36} < \frac{24}{36} < \frac{27}{36} < \frac{28}{36} < \frac{30}{36} \to \frac{5}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{5}{6}$$

5 OPERACIONES CON FRACCIONES

Página 35

1 Resuelve mentalmente.

a) $1 - \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{5} - 1$ **e)** $\frac{15}{5} - 3$ **f)** $\frac{1}{8} - \frac{1}{2}$

a) $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$

d) $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$ e) $\frac{15}{5} - 3 = 0$ f) $\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{8}$

2 Calcula.

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - 1$ **b)** $-\frac{1}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{7}{20} - \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{4}$ **d)** $2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - 1$

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$

b) $-\frac{1}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{4} = -\frac{12}{36} + \frac{20}{36} - \frac{9}{36} = \frac{-1}{36}$

c) $\frac{7}{20} - \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{4} = \frac{7}{20} - \frac{4}{20} + \frac{6}{20} - \frac{15}{20} = \frac{-6}{36} = \frac{-1}{6}$

d) $2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{36}{18} - \frac{2}{18} + \frac{3}{18} - \frac{18}{18} = \frac{19}{18}$

4 **Resuelve las expresiones siguientes:**

a) $5-\left(1+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{10}-2\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)-\left(1-\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\right)$

d) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{4}{5}-3\right)$

a) $5-\left(1+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{10}-2\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=5-\left(\frac{5}{5}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{10}-\frac{20}{10}\right)-\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)=$

$=5-\frac{9}{5}+\left(-\frac{17}{10}\right)-\frac{3}{2}=\frac{50}{10}-\frac{18}{10}-\frac{17}{10}-\frac{15}{10}=0$

b) $\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)-\left(1-\frac{7}{8}-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{9}{24}-\frac{4}{24}\right)-\frac{10}{24}-\left(\frac{24}{24}-\frac{21}{24}-\frac{20}{24}\right)=$

$=\frac{5}{24}-\frac{10}{24}-\left(-\frac{17}{24}\right)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\right)=\left(\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right)-\left(\frac{15}{60}+\frac{24}{60}+\frac{20}{60}\right)=\frac{13}{12}-\frac{59}{60}=$

$=\frac{65}{60}-\frac{59}{60}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$

d) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{4}{5}-3\right)=\left(\frac{5}{30}-\frac{6}{30}+\frac{15}{30}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{15}{5}\right)=\frac{14}{30}-\left(\frac{-11}{5}\right)=\frac{14}{30}+\frac{11}{5}=$

$=\frac{14}{30}+\frac{66}{30}=\frac{80}{30}=\frac{8}{3}$

5 **Opera mentalmente.**

a) $5\cdot\frac{3}{5}$ **b)** $1:\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}$

d) $\frac{4}{5}:2$ **e)** $\frac{1}{4}\cdot 8$ **f)** $\frac{1}{3}:2$

a) $5\cdot\frac{3}{5}=3$ b) $1:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$

d) $\frac{4}{5}:2=\frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{4}\cdot 8=2$ f) $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$

6 **Realiza estos productos y divisiones:**

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$ **b)** $\frac{5}{6}:\frac{10}{9}$ **c)** $4\cdot\frac{3}{20}$

d) $18:\frac{9}{10}$ **e)** $\frac{7}{18}\cdot\frac{9}{14}$ **f)** $\frac{1}{15}:\frac{1}{5}$

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

b) $\frac{5}{6}:\frac{10}{9}=\frac{5\cdot 9}{6\cdot 10}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$

c) $4\cdot\frac{3}{20}=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{20}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

d) $18:\frac{9}{10}=\frac{18}{1}:\frac{9}{10}=\frac{18\cdot 10}{1\cdot 9}=\frac{180}{9}=20$

e) $\frac{7}{18}\cdot\frac{9}{14}=\frac{7\cdot 9}{18\cdot 14}=\frac{7\cdot 9}{2\cdot 9\cdot 7\cdot 2}=\frac{1}{4}$

f) $\frac{1}{15}:\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 5}{15\cdot 1}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

8 **Calcula.**

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right)$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) : \frac{7}{15}$ **d)** $(-2) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right)$

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) : \frac{7}{15} = \left(\frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right) : \frac{7}{15} = -\frac{2}{15} : \frac{7}{15} = \frac{-2 \cdot 15}{7 \cdot 15} = -\frac{2}{7}$

d) $(-2) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right) = (-2) \cdot \left(\frac{20}{15} - \frac{18}{15}\right) = (-2) \cdot \frac{2}{15} = -\frac{4}{15}$

9 **Resuelve.**

a) $\frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)\right]$ **b)** $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{6}{7}\right]$

a) $\frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)\right] = \frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{6}{6} + \frac{1}{6}\right)\right] = \frac{3}{8} - \left[\frac{2}{3} + \frac{7}{6}\right] = \frac{3}{8} - \left[\frac{4}{6} + \frac{7}{6}\right] = \frac{3}{8} - \frac{11}{6} =$

$= \frac{9}{24} - \frac{44}{24} = \frac{-35}{24}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{6}{7}\right] = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{10}{10} - \frac{3}{10}\right) \cdot \frac{6}{7}\right] = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{7}\right] = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} =$

$= \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

6 ▶ PROBLEMAS CON FRACCIONES

Página 37

1 **Tres de cada diez habitantes de una pequeña aldea tienen 65 años o más, la mitad están entre los 18 y los 65 años, y los cuarenta y cinco habitantes restantes tienen 18 años o menos. ¿Cuántos habitantes tiene la aldea?**

Buscamos la fracción que representan los menores de 18.

$\frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ son los mayores de 18

Entonces, los jóvenes de 18 o niños son $\frac{1}{5}$ de los habitantes $\rightarrow$ $\frac{1}{5}$ son 45 habitantes.

$45 \cdot 5 = 225$

Solución: En la aldea hay 225 habitantes.

2 **Un embalse estaba a los 2/3 de su capacidad al final de primavera y en verano perdió las 4/5 partes del agua que tenía. Así llegó al otoño con unas reservas de 1,6 hectómetros cúbicos. ¿Cuál es la capacidad del embalse?**

En verano se pierde $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.

Al principio de otoño quedan $\frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{10}{15} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$.

$\frac{2}{15}$ de la capacidad son $1{,}6 \text{ hm}^3$ $\rightarrow$ $\frac{1}{15}$ son $1{,}6 : 2 = 0{,}8 \text{ hm}^3$

$0{,}8 \cdot 15 = 12 \text{ hm}^3$

Solución: La capacidad del embalse es de 12 hm^3.

7 ▶ FRACCIONES CON LA CALCULADORA

Página 38

1 **Introduce en la calculadora las siguientes expresiones y comprueba que, al pulsar ⊜, se simplifican las fracciones:**

a) $\dfrac{3}{5}$ **b)** $\dfrac{8}{12}$ **c)** $\dfrac{27}{15}$

a) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$ b) $\dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{27}{15} = \dfrac{9}{5}$

2 **Introduce en la calculadora estas expresiones y comprueba que, al pulsar S⇔D, aparecen los números decimales correspondientes, exactos o periódicos:**

a) $\dfrac{1}{7}$ **b)** $\dfrac{13}{24}$ **c)** $\dfrac{6}{15}$ **d)** $\dfrac{19}{20}$

a) $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ b) $\dfrac{13}{24} = 0,541\overset{\frown}{6}$ c) $\dfrac{6}{15} = 0,4$ d) $\dfrac{19}{20} = 0,95$

Página 39

3 **Realiza las siguientes operaciones con calculadora. Obtén los resultados en forma de fracción y de número decimal (exacto o periódico):**

a) $\frac{5}{4} - \frac{2}{7}$

b) $\left(\frac{4}{9} + 2\right) \cdot \frac{-3}{5}$

c) $\left(-3 + \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{5}$

d) $\left(\frac{-2}{5} - \frac{3}{7}\right) - 2$

e) $\frac{2}{7} - \left(\frac{1}{8} + 3\right) : \frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{5} : \left(2 - \frac{5}{3}\right)$

g) $\frac{-5}{2} - \left(\frac{3}{-5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

h) $\left(\frac{2}{7} + \frac{10}{3}\right) \cdot \frac{7}{5}$

i) $\dfrac{\left(\frac{2}{7} - \frac{5}{3}\right) + \left(2 - \frac{5}{3}\right)}{\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{4}\right) + \frac{1}{8}}$

j) $\dfrac{\left(\frac{1}{2} : \frac{3}{6}\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right)}{-2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)}$

a) $\frac{27}{28} = 0,96\overparen{428571}$

b) $\frac{-22}{15} = -1,4\overparen{6}$

c) $\frac{-20}{3} = -6,\overparen{6}$

d) $\frac{-99}{35} = -2,828571499$

e) $\frac{-509}{56} = -9,089\overparen{285714}$

f) $\frac{3}{5} = 0,6$

g) $\frac{-11}{5} = -2,2$

h) $\frac{76}{15} = 5,0\overparen{6}$

i) $\frac{880}{441} = 1,\overparen{995464852600770}$

j) $\frac{16}{125} = 0,128$

4 **Obtén las fracciones generatrices de los siguientes números decimales:**

a) $2,354$ **b)** $3,0\overparen{02}$ **c)** $0,02\overparen{43}$ **d)** $3,7\overparen{01}$

e) $0,1\overparen{25}$ **f)** $2,0\overparen{9}$ **g)** $0,12\overparen{33}$ **h)** $1,\overparen{1}$

a) $\frac{1177}{500}$ b) $\frac{1486}{495}$ c) $\frac{241}{9900}$ d) $\frac{1832}{495}$

e) $\frac{62}{495}$ f) $\frac{21}{10}$ g) $\frac{37}{300}$ h) $\frac{10}{9}$

5 **Calcula la siguiente expresión con ayuda de la calculadora, y expresa el resultado en forma de fracción y como número decimal:**

$$\dfrac{\left(\frac{4}{5} + 1\right) : \frac{2}{5}}{\left(\frac{4}{9} - \frac{5}{3}\right) \cdot \dfrac{7}{\frac{8}{3} - \dfrac{1}{\frac{3}{9} - \dfrac{2}{8 + \frac{4}{3}}}}}$$

$\frac{1161}{385} = 3,0\overparen{155844}$

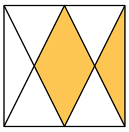
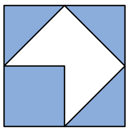
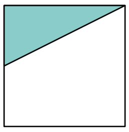
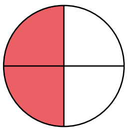
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

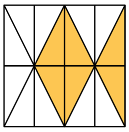
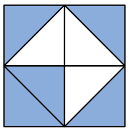
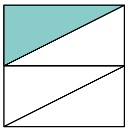
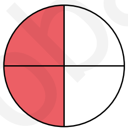
Página 40

Practica

Fracciones y decimales

1 **Escribe la fracción que representa la parte coloreada en cada una de estas figuras y ordénalas de menor a mayor:**

a)  b)  c)  d) 

a)  b)  c)  d) 

a) $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ d) $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Ordenamos de menor a mayor: $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}<\frac{5}{8}$

2 **Indica cuáles de estas fracciones son propias y cuáles impropias:**

$$\mathbf{\frac{7}{5} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{12}{14} \quad \frac{17}{14}}$$

Propias $\rightarrow$ $\frac{3}{8}$; $\frac{12}{14}$

Impropias $\rightarrow$ $\frac{7}{5}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{17}{14}$

3 **Escribe una fracción cuyo valor sea la unidad, otra cuyo valor sea el número entero 4 y otra cuyo valor sea el número entero –5.**

Con valor la unidad $\rightarrow$ $\frac{5}{5}$ (deben coincidir numerador y denominador).

Con valor 4 $\rightarrow$ $\frac{8}{2}$ (el numerador debe ser el denominador multiplicado por 4).

Con valor –5 $\rightarrow$ $-\frac{10}{2}$ (El numerador debe ser el denominador multiplicado por –5).

4 **Calcula mentalmente el número decimal equivalente a cada fracción:**

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{5}{4}$ **e)** $\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{4}{3}$

a) 0,5 b) 1,5 c) 0,25 d) 1,25 e) $0,\widehat{3}$ f) $1,\widehat{3}$

5 **Expresa en forma decimal, señalando el periodo cuando sea el caso, y después ordena de menor a mayor.**

a) $\frac{7}{5}$ **b)** $\frac{5}{8}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{2}{11}$ **e)** $\frac{85}{22}$

a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$ b) $\frac{5}{8} = 0{,}625$ c) $\frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3}$ d) $\frac{2}{11} = 0{,}\widehat{18}$ e) $\frac{85}{22} = 3{,}8\widehat{63}$

Ordenamos de menor a mayor: $\frac{2}{11} < \frac{5}{8} < \frac{5}{6} < \frac{7}{5} < \frac{85}{22}$

6 **Escribe cada decimal en forma de fracción:**

a) 0,8 **b)** 1,8 **c)** 0,17 **d)** 1,17

a) $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ b) $1{,}8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ c) $0{,}17 = \frac{17}{100}$ d) $1{,}17 = \frac{117}{100}$

7 **Expresa como suma de un número entero y una fracción, igual que se hace en el ejemplo:**

- $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

a) $\frac{8}{5}$ **b)** $\frac{15}{8}$ **c)** $\frac{16}{7}$ **d)** $-\frac{3}{2}$ **e)** $-\frac{7}{3}$

a) $\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = 1 + \frac{3}{5}$

b) $\frac{15}{8} = \frac{8+7}{8} = \frac{8}{8} + \frac{7}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

c) $\frac{16}{7} = \frac{14+2}{7} = \frac{14}{7} + \frac{2}{7} = 2 + \frac{2}{7}$

d) $-\frac{3}{2} = -\frac{2+1}{2} = -\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2}$

e) $-\frac{7}{3} = -\frac{6+1}{3} = -\frac{6}{3} - \frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

8 **Introduce en la calculadora las expresiones siguientes y comprueba que, al pulsar ⊜, se simplifican las fracciones o se obtienen las fracciones correspondientes a los números decimales:**

a) $\frac{18}{72}$ **b)** $\frac{24}{56}$ **c)** $\frac{81}{117}$ **d)** $\frac{120}{95}$

e) 2,45 **f)** 0,19 **g)** 1,26 **h)** 0,115

a) $\frac{18}{72} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ c) $\frac{81}{117} = \frac{9}{13}$ d) $\frac{120}{95} = \frac{24}{19}$

e) $2{,}45 = \frac{49}{20}$ f) $0{,}19 = \frac{19}{100}$ g) $1{,}26 = \frac{63}{50}$ h) $0{,}115 = \frac{23}{200}$

9 **Obtén con la calculadora el valor decimal de cada una de estas fracciones:**

a) $\frac{8}{9}$ **b)** $\frac{11}{4}$ **c)** $\frac{12}{24}$ **d)** $\frac{51}{110}$

a) $\frac{8}{9} = 0{,}\widehat{8}$ b) $\frac{11}{4} = 2{,}75$ c) $\frac{12}{24} = 0{,}5$ d) $\frac{51}{110} = 0{,}4\widehat{63}$

10 **Pasa las fracciones a forma decimal y los decimales a forma de fracción.**

a) $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{2}{9}$ **c)** $\frac{3}{9}$ **d)** $\frac{4}{9}$

e) $0,\widehat{5}$ **f)** $0,\widehat{6}$ **g)** $0,\widehat{7}$ **h)** $0,\widehat{8}$

i) $1,\widehat{5}$ **j)** $1,\widehat{6}$ **k)** $0,0\widehat{7}$ **l)** $1,2\widehat{8}$

a) $\frac{1}{9} = 0,\widehat{1}$ b) $\frac{2}{9} = 0,\widehat{2}$ c) $\frac{3}{9} = 0,\widehat{3}$ d) $\frac{4}{9} = 0,\widehat{4}$

e) $0,\widehat{5} = \frac{5}{9}$ f) $0,\widehat{6} = \frac{6}{9}$ g) $0,\widehat{7} = \frac{7}{9}$ h) $0,\widehat{8} = \frac{8}{9}$

i) $1,\widehat{5} = \frac{14}{9}$ j) $1,\widehat{6} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ k) $0,0\widehat{7} = \frac{7}{90}$ l) $1,2\widehat{8} = \frac{116}{90} = \frac{58}{45}$

Fracción de una cantidad: cálculo de la parte y del total

11 **Calcula.**

a) $\frac{3}{7}$ **de 140** **b)** $\frac{5}{8}$ **de 312** **c)** $\frac{5}{32}$ **de 224** **d)** $\frac{17}{8}$ **de 1 000**

a) $\frac{3}{7}$ de $140 = (140 : 7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$

b) $\frac{5}{8}$ de $312 = (312 : 8) \cdot 5 = 39 \cdot 5 = 195$

c) $\frac{5}{32}$ de $224 = (224 : 32) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$

d) $\frac{17}{8}$ de $1\,000 = (1\,000 : 8) \cdot 17 = 125 \cdot 17 = 2\,125$

12 **Calcula mentalmente.**

a) Los tres cuartos de un número valen 12. ¿Cuál es el número?

b) Los dos tercios de un número valen 20. ¿De qué número se trata?

c) Los $\frac{3}{5}$ **de una cantidad son 15. ¿Cuál es esa cantidad?**

a) $12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ b) $20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ c) $15 \cdot \frac{5}{3} = 25$

13 **Halla mentalmente.**

¡a) $\frac{2}{3}$ **de 60** **b)** $\frac{3}{4}$ **de 100** **c)** $\frac{3}{500}$ **de 500**

d) La mitad de $\frac{3}{2}$ **e) El triple de** $\frac{7}{12}$ **f) El doble de la quinta parte de** $\frac{-5}{6}$

a) 40 b) 75 c) 3 d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{21}{12}$ f) $\frac{-1}{3}$

14 Resuelve.

a) **Los $\frac{2}{3}$ de un número valen 12. ¿De qué número se trata?**

b) **Averigua el número cuyos $\frac{3}{5}$ valen 21.**

c) **¿Qué número, disminuido en su sexta parte, se queda en 25?**

d) **Si a un número le quitas sus $\frac{4}{7}$, se reduce en 8 unidades. ¿Qué número es?**

a) $\frac{2}{3}$ de $C = 12 \rightarrow C = (12 : 2) \cdot 3 \rightarrow C = 18$

b) $\frac{3}{5}$ de $C = 21 \rightarrow C = (21 : 3) \cdot 5 \rightarrow C = 35$

c) $C - \frac{1}{6} \cdot C = 25 \rightarrow \frac{5}{6} \cdot C = 25 \rightarrow C = (25 : 5) \cdot 6 \rightarrow C = 30$

d) $C - \frac{4}{7} \cdot C = C - 8 \rightarrow 8 = C - C + \frac{4}{7} \cdot C \rightarrow \frac{4}{7}C = 8 \rightarrow (8 : 4) \cdot 7 \rightarrow C = 14$

15 Calcula x en cada caso:

a) $\frac{2}{7}$ **de** $x = 98$ **b)** $\frac{9}{10}$ **de** $x = 126$ **c)** $\frac{11}{15}$ **de** $x = 682$ **d)** $\frac{13}{25}$ **de** $x = 715$

a) $\frac{2}{7}$ de $x = 98 \rightarrow x = (98 : 2) \cdot 7 \rightarrow x = 343$

b) $\frac{9}{10}$ de $x = 126 \rightarrow x = (126 : 9) \cdot 10 \rightarrow x = 140$

c) $\frac{11}{15}$ de $x = 682 \rightarrow x = (682 : 11) \cdot 15 \rightarrow x = 390$

d) $\frac{13}{25}$ de $x = 715 \rightarrow x = (715 : 13) \cdot 25 \rightarrow x = 1\,375$

Página 41

Fracciones equivalentes. Simplificación y reducción a denominador común

16 **a) Agrupa las fracciones que sean equivalentes:**

$$\frac{10}{15} \qquad \frac{5}{7} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{5}{15} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{6} \qquad \frac{15}{21}$$

b) Representa, las que lo sean, sobre rectángulos de igual tamaño.

a) Expresamos en forma decimal las fracciones:

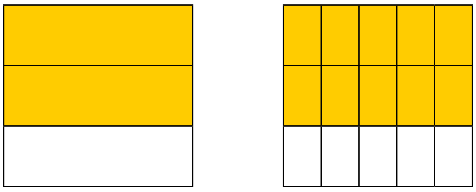
$\frac{10}{15} = 0,\widehat{6}$ $\qquad \frac{5}{7} \approx 0,71$ $\qquad \frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ $\qquad \frac{5}{15} = 0,\widehat{3}$

$\frac{2}{3} = 0,\widehat{6}$ $\qquad \frac{2}{6} = 0,\widehat{3}$ $\qquad \frac{15}{21} \approx 0,71$

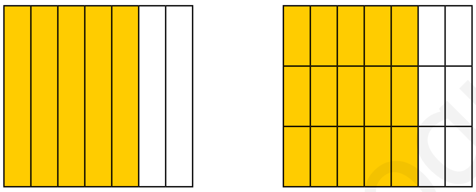
Agrupamos las equivalentes:

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ $\qquad \frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ $\qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$

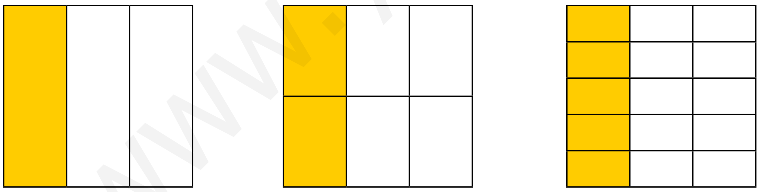
b) $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$



$\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$



$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$



17 **Simplifica todo lo posible.**

a) $\frac{30}{42}$ **b)** $\frac{18}{72}$ **c)** $\frac{75}{125}$ **d)** $\frac{60}{210}$ **e)** $\frac{2000}{4000}$

a) $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ b) $\frac{18}{72} = \frac{1}{4}$ c) $\frac{75}{125} = \frac{3}{5}$ d) $\frac{60}{210} = \frac{2}{7}$ e) $\frac{2000}{4000} = \frac{1}{2}$

18 **Escribe una fracción equivalente a 2/5 y otra equivalente a 7/6, pero que tengan el mismo denominador.**

mín.c.m $(6, 5) = 30 \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{12}{30}; \ \frac{7}{6} = \frac{35}{30}$

20 **Halla, en cada caso, el valor de *x*:**

a) $\frac{x}{18} = \frac{35}{42}$ **b)** $\frac{32}{x} = \frac{12}{15}$

a) $\frac{x}{18} = \frac{35}{42} \rightarrow x \cdot 42 = 35 \cdot 18 \rightarrow 42x = 630 \rightarrow x = 15$

b) $\frac{32x}{x} = \frac{12}{15} \rightarrow 32 \cdot 15 = 12 \cdot x \rightarrow 480 = 12x \rightarrow x = 40$

21 **Escribe fracciones equivalentes a las que ves debajo, que tengan por denominador 24:**

a) $\frac{3}{8}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{5}{12}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{2}{3}$

a) $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ b) $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ c) $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$ d) $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$ e) $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$

22 **Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:**

$$\frac{7}{10} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{13}{20}$$

mín.c.m. (4, 5, 8, 10, 20) = 40

$\frac{7}{10} = \frac{28}{40}$ $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$ $\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$ $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$ $\frac{13}{20} = \frac{26}{40}$

Ordenamos de menor a mayor:

$\frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$

Operaciones con fracciones

23 **Calcula mentalmente.**

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **b)** $1 + \frac{1}{2}$ **c)** $2 - \frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{1}{6}$

24 **Calcula.**

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ **b)** $\frac{5}{6} + \frac{1}{9} + \frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{30} - \frac{1}{45}$ **d)** $\frac{11}{30} - \frac{3}{40} - \frac{7}{60}$

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15}{30} - \frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{11}{30}$

b) $\frac{5}{6} + \frac{1}{9} + \frac{3}{4} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{27}{36} = \frac{37}{36}$

c) $\frac{1}{30} - \frac{1}{45} = \frac{3}{90} - \frac{2}{90} = \frac{1}{90}$

d) $\frac{11}{30} - \frac{3}{40} - \frac{7}{60} = \frac{44}{120} - \frac{9}{120} - \frac{14}{120} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$

25 **Halla el valor de estas expresiones:**

a) $3-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$ **b)** $\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(5-\frac{7}{2}\right)$ **c)** $\frac{5}{32}-2+\frac{1}{3}$ **d)** $5-\left(\frac{1}{3}-2\right)$

Comprueba los resultados con la calculadora.

a) $3-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)=3-\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\right)=3-\frac{5}{6}=\frac{18}{6}-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$

b) $\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(5-\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{6}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{10}{2}-\frac{7}{2}\right)=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{8}{6}+\frac{9}{6}=\frac{17}{6}$

c) $\frac{5}{32}-2+\frac{1}{3}=\frac{15}{96}-\frac{192}{96}+\frac{32}{96}=-\frac{145}{96}$

d) $5-\left(\frac{1}{3}-2\right)=5-\left(\frac{1}{3}-\frac{6}{3}\right)=5-\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{15}{3}+\frac{5}{3}=\frac{20}{3}$

26 **Resuelve paso a paso y comprueba los resultados con la calculadora.**

a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\right)$

b) $\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{4}{3}-\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\right)$

c) $2-\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{3}\right)-\left(3+\frac{8}{21}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{11}{14}\right)$

a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\right)=\left(\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}\right)-\left(\frac{15}{12}-\frac{10}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{13}{36}-\frac{10}{12}=$

$=\frac{13}{36}-\frac{30}{36}=-\frac{17}{36}$

b) $\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{4}{3}-\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{2}{18}-\frac{3}{18}\right)+\left(-\frac{8}{9}-\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{7}{12}-\frac{15}{12}-\frac{2}{12}\right)=$

$=-\frac{1}{18}-\frac{13}{9}-\frac{10}{12}=-\frac{1}{18}-\frac{13}{9}-\frac{5}{6}=-\frac{1}{18}-\frac{26}{18}-\frac{15}{18}=-\frac{42}{18}=-\frac{7}{3}$

c) $2-\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{3}\right)-\left(3+\frac{8}{21}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{11}{14}\right)=2-\left(\frac{15}{21}-\frac{35}{21}\right)-\left(\frac{63}{21}+\frac{8}{21}\right)+\left(\frac{14}{14}+\frac{7}{14}-\frac{11}{14}\right)=$

$=2-\left(-\frac{20}{21}\right)-\frac{71}{21}+\frac{10}{14}=2+\frac{20}{21}-\frac{71}{21}+\frac{5}{7}=\frac{42}{21}+\frac{20}{21}-\frac{71}{21}+\frac{15}{21}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

27 Calcula y expresa cada resultado en forma de número mixto:

a) $\frac{2}{3}+\left[3-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\right)\right]$

b) $\frac{2}{11}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{11}-\frac{9}{22}\right)\right]$

c) $\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)+2\right]$

a) $\frac{2}{3}+\left[3-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\right)\right]=\frac{2}{3}+\left[3-\left(\frac{5}{30}+\frac{18}{30}\right)\right]=\frac{2}{3}+\left(3-\frac{23}{30}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{90}{30}-\frac{23}{30}\right)=$

$=\frac{2}{3}+\frac{67}{30}=\frac{20}{30}+\frac{67}{30}=\frac{87}{30}=\frac{29}{10}=2+\frac{9}{10}$

b) $\frac{2}{11}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{11}-\frac{9}{22}\right)\right]=\frac{2}{11}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{6}{22}-\frac{9}{22}\right)\right]=\frac{2}{11}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{22}\right)=\frac{2}{11}-\left(\frac{11}{22}-\frac{3}{22}\right)=$

$=\frac{2}{11}-\frac{8}{22}=\frac{2}{11}-\frac{4}{11}=-\frac{2}{11}$

c) $\left[1-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)+2\right]=\left[1-\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)\right]-\left[\left(\frac{10}{12}-\frac{3}{12}\right)+2\right]=\left(1-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{12}+2\right)=$

$=\left(\frac{6}{6}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{12}+\frac{24}{12}\right)=\frac{5}{6}-\frac{31}{12}=\frac{10}{12}-\frac{31}{12}=-\frac{21}{12}=-\frac{7}{4}$

28 Calcula mentalmente y simplifica.

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}$ **b)** $6\cdot\frac{3}{4}$ **c)** $5:\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{8}{3}:\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{2}{7}:4$

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{4}{15}$ e) $\frac{8}{6}$ f) $\frac{1}{14}$

29 **Efectúa y simplifica descomponiendo en factores, como en el ejemplo:**

- $\frac{15}{21}\cdot\frac{7}{25}=\frac{15\cdot 7}{21\cdot 25}=\frac{3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 5\cdot 5}=\frac{1}{5}$

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{21}$ **b)** $\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{18}$ **c)** $\frac{12}{7}\cdot\frac{35}{36}$

d) $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{27}$ **e)** $\frac{13}{12}\cdot\frac{84}{65}$ **f)** $\frac{90}{35}\cdot\frac{14}{36}$

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{21}=\frac{3\cdot 20}{5\cdot 21}=\frac{3\cdot 2^2\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 7}=\frac{4}{7}$

b) $\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{18}=\frac{6\cdot 5}{25\cdot 18}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 5\cdot 2\cdot 3^2}=\frac{1}{15}$

c) $\frac{12}{7}\cdot\frac{35}{36}=\frac{12\cdot 35}{7\cdot 36}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\frac{5}{3}$

d) $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{27}=\frac{9\cdot 20}{16\cdot 27}=\frac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=\frac{5}{12}$

e) $\frac{13}{12}\cdot\frac{84}{65}=\frac{13\cdot 84}{12\cdot 65}=\frac{13\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13}=\frac{7}{5}$

f) $\frac{90}{35}\cdot\frac{14}{36}=\frac{90\cdot 14}{35\cdot 36}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 7}{5\cdot 7\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=1$

30 **Calcula y simplifica.**

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)$ **b)** $\frac{-5}{3}:\left(\frac{-2}{5}\right)$ **c)** $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right):\frac{2}{5}$

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{3\cdot(-2)}{4\cdot 3}=\frac{-1}{2}$

b) $\frac{-5}{3}:\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{(-5)\cdot 5}{3\cdot(-2)}=\frac{25}{6}$

c) $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right):\frac{2}{5}=\frac{1\cdot(-2)\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 2}=\frac{-1}{3}$

31 **Calcula:**

a) $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{15}\cdot 5-\frac{1}{6}\cdot 2-\frac{1}{9}\cdot 3$

a) $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{6}{6}-\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

b) $\frac{1}{15}\cdot 5-\frac{1}{6}\cdot 2-\frac{1}{9}\cdot 3=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

Página 42

32 Reduce todo lo posible.

a) $\mathbf{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)}$

b) $\mathbf{5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}$

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=$

$=\frac{1}{6}-\frac{3}{36}=\frac{6}{36}-\frac{3}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

b) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=5:\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{4}\right)-3:\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)=5:\frac{6}{4}-3:\frac{1}{4}=\frac{20}{6}-\frac{12}{1}=$

$=\frac{10}{3}-\frac{12}{1}=\frac{10}{3}-\frac{36}{3}=-\frac{26}{3}$

33 Reduce a una sola fracción estas expresiones:

a) $\mathbf{13\cdot\left(\frac{5}{26}-\frac{1}{23}\right)-\frac{4}{3}:\frac{1}{6}}$

b) $\mathbf{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right):\frac{7}{12}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{6}}$

c) $\mathbf{\left(1-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{2}\right)}$

a) $13\cdot\left(\frac{5}{26}-\frac{1}{23}\right)-\frac{4}{3}:\frac{1}{6}=\left(\frac{13\cdot 5}{26}-\frac{13\cdot 1}{23}\right)-\frac{4\cdot 6}{3\cdot 1}=\left(\frac{5}{2}-\frac{13}{23}\right)-8=\left(\frac{115}{46}-\frac{26}{46}\right)-\frac{368}{46}=$

$=\frac{-279}{46}$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right):\frac{7}{12}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{12}{20}-\frac{5}{20}\right):\frac{7}{12}+\left(\frac{4}{24}-\frac{6}{24}\right)\cdot\frac{5}{6}=\frac{7}{20}:\frac{7}{12}+\left(-\frac{2}{24}\right)\cdot\frac{5}{6}=$

$=\frac{12}{20}-\frac{5}{72}=\frac{3}{5}-\frac{5}{72}=\frac{216}{360}-\frac{25}{360}=\frac{191}{360}$

c) $\left(1-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{7}{7}-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{12}{30}-\frac{5}{30}\right)-\left(\frac{9}{12}-\frac{2}{12}\right)\cdot\left(\frac{7}{10}+\frac{5}{10}\right)=$

$=\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{30}-\frac{7}{12}\cdot\frac{12}{10}=\frac{1}{10}-\frac{7}{10}=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$

34 Comprueba que el resultado de cada una de estas expresiones es un número entero:

a) $\left(\frac{1}{6}-1\right)\cdot\left(3-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$

b) $2:\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-3:\left(1+\frac{1}{2}\right)$

c) $-\frac{3}{8}\cdot\left[1-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(\frac{1}{3}-1\right)$

a) $\left(\frac{1}{6}-1\right)\cdot\left(3-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{6}-\frac{6}{6}\right)\cdot\left(\frac{15}{5}-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{2}{6}-\frac{3}{6}\right)=-\frac{5}{6}\cdot\frac{13}{5}-\left(\frac{-1}{6}\right)=$

$=-\frac{13}{6}+\frac{1}{6}=\frac{-12}{6}=-2$

b) $2:\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-3:\left(1+\frac{1}{2}\right)=2:\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{6}\right)-3:\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)=2:\left(-\frac{2}{6}\right)-3:\frac{3}{2}=-6-2=-8$

c) $-\frac{3}{8}\cdot\left[1-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]=-\frac{3}{8}\cdot\left[1-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-\frac{20}{20}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{9}{3}\right)\right]=$

$-\frac{3}{8}\cdot\left[1-\frac{3}{5}-\left(-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)\right]=-\frac{3}{8}\cdot\left[1-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right]=-\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{5}-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{8}\cdot 0=0$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(\frac{1}{3}-1\right)=\left[\left(\frac{6}{9}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)^2\right]:\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{3}\right)=$

$=\left[\frac{5}{9}+13\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{9}+13\cdot\frac{1}{9}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{9}+\frac{13}{9}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{18\cdot 3}{9\cdot 2}=-3$

35 Opera y simplifica, como en el ejemplo.

- $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{4}+2\right)=\left(\frac{1}{6}\right):\left(\frac{11}{4}\right)=\frac{2}{33}$

a) $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{3-\frac{5}{3}}{3+\frac{5}{3}}$

c) $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{3}{5}}{\frac{7}{10}-\frac{3}{4}}$

a) $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}:\frac{1}{2}=3$

b) $\dfrac{3-\frac{5}{3}}{3+\frac{5}{3}}=\dfrac{\frac{9}{3}-\frac{5}{3}}{\frac{9}{3}+\frac{5}{3}}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{14}{3}}=\frac{4}{3}:\frac{14}{3}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

c) $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{3}{5}}{\frac{7}{10}-\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{5}{20}-\frac{12}{20}}{\frac{14}{20}-\frac{15}{20}}=\dfrac{\frac{-7}{20}}{\frac{-1}{20}}=\left(\frac{-7}{20}\right):\left(\frac{-1}{20}\right)=7$

Resuelve problemas

36 **Luis ha gastado 3/8 del dinero que llevaba en comprar un regalo. Sabiendo que le han sobrado 30 €, ¿cuánto dinero tenía al principio?**

Si gasta $\frac{3}{8}$, le quedan $\frac{5}{8}$.

$30 : 5 = 6 \rightarrow \frac{1}{8}$ son 6 € $\rightarrow 6 \cdot 8 = 48$ €

Solución: Al principio tenía 48 €.

37 **Elvira salió de su casa con 30 €. Se gastó 2/3 del dinero en un disco y 1/5 en un libro.**

a) ¿Qué fracción del total ha gastado Elvira?

b) ¿Qué fracción le queda?

c) ¿Cuánto dinero le ha sobrado?

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$

Ha gastado $\frac{2}{5}$ del total.

b) Le quedan $\frac{2}{15}$.

c) Le han sobrado $\frac{2}{15}$ de $30 = 30 : 15 \cdot 2 = 4$ €.

38 **A Julia le regalan 120 € por su cumpleaños. Si gasta 2/5 en ropa, 1/4 en libros y 3/20 en ocio, ¿cuánto gastó en cada cosa? ¿Qué fracción del dinero le queda?**

- Gasto en ropa: $\frac{2}{5}$ de $120 = \frac{2 \cdot 120}{5} = 48$ €
- Gasto en libros: $\frac{1}{4}$ de $120 = \frac{120}{4} = 30$ €
- Gasto en ocio: $\frac{3}{20}$ de $120 = \frac{3 \cdot 120}{20} = 18$ €

Le quedan $120 - (48 + 30 + 18) = 24$ € $\rightarrow \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

Le quedan $\frac{1}{5}$ del dinero.

39 **Tres empresas invierten en un negocio. La primera aporta 1/3 del capital; la segunda, 2/5, y la tercera, el resto. Al cabo de tres años se reparten unos beneficios de 150 000 €. ¿Cuánto corresponde a cada una?**

Primera empresa $\rightarrow \frac{1}{3}$ de $150\,000 = 150\,000 : 3 = 50\,000$ €

Segunda empresa $\rightarrow \frac{2}{5}$ de $150\,000 = (150\,000 : 5) \cdot 2 = 60\,000$ €

Tercera empresa $\rightarrow 150\,000 - (50\,000 + 60\,000) = 150\,000 - 110\,000 = 40\,000$ €

Solución: A la primera le corresponden 50 000 €; a la segunda, 60 000 €, y a la tercera, 40 000 €.

40 **De los 28 estudiantes de una clase, 4/7 aprobaron todas las asignaturas, y de ellos, 1/4 obtuvo sobresaliente de nota media. ¿Cuántos sacaron sobresaliente? ¿Qué parte de la clase suspendió alguna asignatura?**

- Estudiantes que aprobaron todo $\rightarrow \frac{4}{7}$ de $28 = \frac{4 \cdot 28}{7} = 16$
- Estudiantes que sacaron sobresaliente $\rightarrow \frac{1}{4}$ de $16 = \frac{16}{4} = 4$
- Estudiantes que suspendieron alguna $\rightarrow 28 - 16 = 12 \rightarrow \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

41 **En mi clase, el número de chicas es igual a los cuatro séptimos del número de chicos. ¿Cuántos somos entre unos y otros si pasamos de 20 pero no llegamos a 30?**

$x + \frac{4}{7}x = \frac{7}{7}x + \frac{4}{7}x = \frac{11}{7}x$

x tiene que ser múltiplo de 7.

$20 < \frac{11}{7}x < 30 \rightarrow \frac{140}{11} < x < \frac{210}{11} \rightarrow 13 \le x \le 19$

Es decir, buscamos un múltiplo de 7 entre 13 y 19 $\rightarrow x = 14$ chicos

$\frac{4}{7}$ de $14 = (14 : 7) \cdot 4 = 8$ chicas

Solución: En total somos 14 + 8 = 22 estudiantes, entre chicos y chicas.

42 **Compro a plazos un equipo de música que vale 600 €. Hago un pago de 60 €; después, otro igual a los 2/3 de lo que me queda por pagar, y luego, otro más por 1/5 de lo que aún debo.**

a) ¿Cuánto he devuelto cada vez?

b) ¿Qué parte de la deuda he pagado?

c) ¿Cuánto me queda por pagar?

a) Tras el primer pago, quedan 600 – 60 = 540 € por pagar.

En el 2.º pago $\rightarrow \frac{2}{3}$ de $540 = (540 : 3) \cdot 2 = 360$ €

Por tanto, quedan 540 – 360 = 180 €.

En el tercer pago $\rightarrow \frac{1}{5}$ de $180 = (180 : 5) \cdot 1 = 36$ €

He devuelto 60 € en el primer pago, 360 € en el segundo y 36 € en el tercero.

b) 60 + 360 + 36 = 456 € $\rightarrow \frac{456}{600} = \frac{19}{25}$

He pagado $\frac{19}{25}$ de la deuda

c) 600 – 456 = 144 €.

Me quedan por pagar 144 €.

43 **Cuatro hermanos se reparten una tarta. Alicia toma 1/3; Borja, los 3/5 de lo que deja Alicia, y los gemelos, Marcos y Ana, se reparten el resto a partes iguales. ¿Qué parte de la tarta se llevó cada uno? ¿Quién se llevó el trozo más grande?**

- Alicia toma $\frac{1}{3}$ de la tarta. Deja $1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de la tarta.
- Borja toma $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{2}{5}$ de la tarta.
- Entre Alicia y Borja han tomado $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5+6}{15}=\frac{11}{15}$. Todavía quedó $1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$ de tarta. Por tanto, cada uno de los gemelos toma $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{15}=\frac{4}{2\cdot 15}=\frac{2}{15}$ de la tarta.

Solución: Alicia ha tomado $\frac{1}{3}$ de la tarta; Borja, $\frac{2}{5}$, y los gemelos toman $\frac{2}{15}$ cada uno.

Como $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ y $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$, quien más tarta ha comido ha sido Borja.

44 **En una encuesta realizada entre los estudiantes de un colegio se recogieron los siguientes resultados:**

- **7/30 de los estudiantes no tienen teléfono móvil.**
- **400 estudiantes tienen ordenador y teléfono móvil.**
- **1/6 no tiene ordenador.**
- **1/15 no tiene ni ordenador ni teléfono móvil.**

¿Cuántos estudiantes fueron consultados en la encuesta?

- Calculamos la fracción de estudiantes que tienen ordenador y teléfono móvil.

$$1-\left(\frac{7}{30}+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)=1-\left(\frac{7}{30}+\frac{5}{30}+\frac{2}{30}\right)=1-\frac{14}{30}=\frac{16}{30}$$

- $\frac{16}{30}$ de $x=400 \rightarrow x=(400\cdot 30):16=750$

Solución: En la encuesta fueron consultados 750 estudiantes.

45 **La información nutricional de una marca de leche dice que hay 120 mg de calcio por cada 100 mL de leche. Esa cantidad de calcio es 3/20 de lo que es recomendable que tome diariamente una persona. Calcula la cantidad de calcio diaria recomendada.**

$\frac{3}{20}$ de $x=120 \rightarrow x=(120\cdot 20):3=800$

Solución: La cantidad de calcio recomendada son 800 mg.

46 **María tiene una botella de un litro y medio de leche. Utiliza 3/8 de litro para una receta de cocina y la cuarta parte de lo que queda para merendar. ¿Quedará en la botella más de medio litro, que es lo que necesita para el desayuno? Explica tu respuesta.**

- La botella es de $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ L de leche.
- Para la receta utiliza $\frac{3}{8}$ de $\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 2}=\frac{9}{16}$ L de leche.

  Todavía le quedan $\frac{3}{2}-\frac{9}{16}=\frac{24}{16}-\frac{9}{16}=\frac{15}{16}$ L de leche.
- Para merendar utiliza $\frac{1}{4}$ de $\frac{15}{16}=\frac{15}{4\cdot 16}=\frac{15}{64}$ L de leche.

  Todavía le quedan $\frac{15}{16}-\frac{15}{64}=\frac{60}{64}-\frac{15}{64}=\frac{45}{64}$ L de leche.
- Como $\frac{45}{64}>\frac{1}{2}=\frac{32}{64}$, en la botella todavía queda más de medio litro.

47 **Dos cajas de manzanas se ponen a la venta a 2,50 € el kilo. La primera, que supone los 5/12 del total, se vende por 50 €. ¿Cuántos kilos de manzanas había en cada caja?**

- En la primera caja hay 50: 2,50 = 20 kg de manzanas.
- $\frac{5}{12}$ de $x=20 \rightarrow x=(20\cdot 12):5=48$ kg de manzanas hay en total.

Solución: En la primera caja había 20 kg, y en la segunda, 48 – 20 = 28 kg.

Página 43

48 **De un solar se vendieron los 2/3 de su superficie y después 3/5 de lo que quedaba. Los 600 m² restantes se destinaron a caminos y jardines. ¿Cuál era la superficie del solar?**

- Se venden $\frac{2}{3}$ del solar. Queda $\frac{1}{3}$ del solar.
- Se venden $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{5}$ del solar.
- En total se ha vendido $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$ del solar. Quedan $\frac{2}{15}$ del solar.
- $\frac{2}{15}$ de $x = 600 \to x\,(600 \cdot 15) : 2 = 4500 \text{ m}^2$.

Solución: El solar tenía 4 500 m² de superficie.

49 **La tercera parte de quienes asisten a un congreso son de España y 3/10 son de Francia. De los restantes, los 6/11 son de Suiza y hay 25 de Italia. ¿Cuántas personas asistieron al congreso?**

- Asistentes de España y Francia: $\frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{10}{30} + \frac{9}{30} = \frac{19}{30}$.
- Hay $\frac{11}{30}$ asistentes que no son ni de España ni de Francia.
- Asistentes de Suiza: $\frac{6}{11}$ de $\frac{11}{30} = \frac{6 \cdot 11}{11 \cdot 30} = \frac{6}{30}$.
- Asistentes de Italia: $1 - \frac{19}{30} - \frac{6}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

  $\frac{1}{6}$ de $x = 25 \to x = 25 \cdot 6 = 150$.

Solución: Al congreso asistieron 150 personas.

50 **Se adquieren 10 kg de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas, se reduce en 1/5 su peso. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción 1/4 del peso. ¿Cuántos kilos de mermelada se obtienen?**

Se reduce $\frac{1}{5} \to$ quedan $\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}$ de 10 = (10 : 5) · 4 = 8 kg quedan al deshuesar las ciruelas.

Al añadir el azúcar se tienen 8 + 8 =16 kg de mezcla.

Se reduce $\frac{1}{4} \to$ quedan $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ de 16 = (16 : 4) · 3 = 12 kg

Solución: Se obtienen 12 kg de mermelada.

51 Los beneficios de este año en una empresa han ascendido a un millón ochocientos mil euros, lo que supone un aumento de dos séptimos respecto al año pasado. ¿Cuáles fueron los beneficios del año pasado?

x → Beneficio del año pasado.

$$x + \frac{2}{7}x = 1\,800\,000 \rightarrow \frac{7}{7}x + \frac{2}{7}x = 1\,800\,000 \rightarrow \frac{9}{7}x = 1\,800\,000 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1\,800\,000 \cdot 7}{9} = 1\,400\,000 \text{ €}$$

Solución: El año pasado los beneficios fueron de 1 400 000 €.

52 En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden al apartado de frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas. Si la venta de naranjas asciende a 195 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?

$\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{5}{16}$ del total → $\frac{5}{16}$ son 195 €

$195 : 5 = 39$ €

$39 \cdot 16 = 624$ €

Solución: El establecimiento ha hecho 624 € de caja.

53 La familia García ha invertido la cuarta parte de su presupuesto para vacaciones en los billetes de avión; la tercera parte, en el hotel; y el resto, que son 600 €, en gastos varios. ¿A cuánto ascendía el presupuesto?

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$ gastan en el hotel y el avión → $\frac{5}{12}$ son 600 €

$600 : 5 = 120$

$120 \cdot 12 = 1\,440$ €

Solución: El presupuesto ascendía a 1 440 €.

54 En una carrera ciclista de cuatro etapas, el primer día abandonó 1/15 de los corredores. El segundo día abandonó la décima parte de los que quedaban. El tercer día, tras una caída, abandonaron 3 corredores, terminando la carrera 123.

a) ¿Qué fracción de los corredores tomaron la salida el segundo día? ¿Y el tercer día?

b) ¿Cuántos corredores participaron en la carrera?

a) Tomaron la salida $\frac{14}{15}$ de los corredores el segundo día.

$\frac{9}{10}$ de $\frac{14}{15} = \frac{126}{150} = \frac{21}{25}$

Tomaron la salida $\frac{21}{25}$ de los corredores el tercer día.

b) Llamamos x al número de corredores iniciales.

$$\frac{21}{25}x - 3 = 123 \rightarrow \frac{21}{25}x - \frac{75}{25} = \frac{3\,075}{25} \rightarrow 21x - 75 = 3\,075 \rightarrow 21x = 3150 \rightarrow x = 150$$

Solución: Participaron 150 corredores en la carrera.

55 **¿Cuál o cuáles de las expresiones que tienes debajo resuelven el problema que te planteamos? Justifica tu respuesta.**

En un depósito municipal lleno de agua había 3 000 litros. Un día se gastó 1/6 del depósito, y otro, 1 250 litros. ¿Qué fracción queda?

a) $\left(1-\frac{1}{6}\right)-\frac{1250}{3000}$ **b)** $\frac{3000-1250}{3000}-\frac{1}{6}$

c) $1-\frac{1}{6}-\frac{1250}{3000}$ **d)** $1-\left(\frac{1250}{3000}+\frac{1}{6}\right)$

a) Sí resuelve el problema:

$\left(1-\frac{1}{6}\right)$ representa la fracción que queda tras el primer día.

$\frac{1250}{3000}$ representa la fracción que se gasta el segundo día, porque tomamos 1 250 del total.

Al restarlas, obtenemos la fracción que queda.

b) Sí resuelve el problema:

$\frac{3000-1250}{3000}$ representa lo que queda al gastarse 1 250 litros.

Al restar $\frac{1}{6}$ a lo anterior, se calcula la fracción que queda tras el gasto de los dos días.

c) Sí resuelve el problema:

Al total le quitamos la fracción que extraemos el primer día y $\frac{1250}{3000}$ que corresponde con la fracción que extraemos el segundo día (1 250 litros de los 3 000 litros totales).

d) Sí resuelve el problema:

$\left(\frac{1250}{3000}+\frac{1}{6}\right)$ representa lo que se gasta en total entre los dos días.

Al restar esto a la unidad, obtenemos la fracción de agua que queda en el depósito.

AUTOEVALUACIÓN

Página 43

1 **Calcula:** $\frac{3}{4} : \left(3 - \frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

$$\frac{3}{4} : \left(3 - \frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{4} : \left(\frac{6}{2} - \frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{4} : \frac{5}{2} - 4 \cdot \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 3}{6} = \frac{3}{10} - 2 =$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{20}{10} = -\frac{17}{10}$$

2 **Pasa de fracción a decimal o de decimal a fracción:**

a) $\frac{57}{40}$ **b)** 0,625 **c)** $1,\widehat{7}$ **d)** $2,\widehat{13}$

a) 1,425 b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{16}{9}$ d) $\frac{211}{99}$

3 **Calcula** x **en cada caso:**

a) $\frac{5}{8}$ **de** $x = 95$ **b)** $\frac{12}{7}$ **de** $x = 48$

a) $\frac{5}{8}$ de $x = 95 \rightarrow x = (95 \cdot 8) : 5 = 152$

b) $\frac{12}{7}$ de $x = 48 \rightarrow x = (48 \cdot 7) : 12 = 28$

4 **Escribe una fracción equivalente a 13/20 y otra equivalente a 7/6 que tengan el mismo denominador.**

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ $6 = 2 \cdot 3$

min.c.m $(20, 6) = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

$\frac{13}{20} = \frac{39}{60}$ $\frac{7}{6} = \frac{70}{60}$

5 **Se han consumido los 2/7 de una vela de cera. ¿Cuál era su longitud inicial si el trozo que queda mide 20 cm?**

Si se han consumido $\frac{2}{7}$, quedan $\frac{5}{7}$.

$\frac{5}{7}$ de $x = 20 \rightarrow x = (20 \cdot 7) : 5 = 28.$

Solución: La longitud inicial de la vela eran 28 cm.

6 **Con la tercera parte del aceite que tengo en un bidón, puedo llenar 20 botellas de 3/5 de litro. ¿Cuántos litros había en el bidón? ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro podré llenar con el resto?**

- Con la tercera parte del bidón puedo llenar $20 \cdot \frac{3}{5} = 12$ L.
- Con el bidón completo puedo llenar $3 \cdot 12 = 36$ L.

  En el bidón había 36 L de aceite.
- Si he gastado 12 L, en el bidón quedarán $36 - 12 = 24$ L.

  Con 24 L podré llenar $24 : \frac{3}{4} = \frac{24 \cdot 4}{3} = 32$ botellas de $\frac{3}{4}$ L.

7 **Los 3/5 de las entradas de un teatro corresponden al patio de butacas; 1/4 son del primer anfiteatro, y el resto, las del segundo anfiteatro, son 90. ¿Cuántas plazas tiene el teatro?**

- Butacas del patio y del primer anfiteatro: $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$
- Butacas del segundo anfiteatro: $1 - \frac{17}{20} = \frac{20}{20} - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$
- $\frac{3}{20}$ de $x = 90 \rightarrow x = (90 \cdot 20) : 3 = 600$

Solución: El teatro tiene 600 plazas.

8 **De un depósito, en el que había 1 500 L de agua, se gastan un día 5/12 del depósito, y otro día, 500 L. ¿Qué fracción queda?**

- El primer día se gastan $\frac{5}{12}$ de $1500 = 625$ L.
- Entre el primer y el segundo día se gastan $625 + 500 = 1\,125$ L.
- Quedan $1500 - 1125 = 375$ L $\rightarrow \frac{375}{1500} = \frac{1}{4}$.

Solución: Queda $\frac{1}{4}$ del depósito.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Página 43

- **Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, y el primer salto es de 2 m. ¿Llegará al centro de la charca en sus cuatro primeros saltos? ¿Y en el quinto?**

- Primer salto $\rightarrow$ 2 m

  Segundo salto $\rightarrow$ $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ m

  Tercer salto $\rightarrow$ $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ m

  Cuarto salto $\rightarrow$ $\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$ m

  Quinto salto $\rightarrow$ $\frac{16}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$ m

  – Longitud de los cuatro primeros saltos:

  $$2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} = \frac{54}{27} + \frac{36}{27} + \frac{24}{27} + \frac{16}{27} = \frac{130}{27} = 4,\overset{\frown}{814} \text{ m}$$

  – Longitud de los cinco primeros saltos:

  $$\frac{130}{27} + \frac{32}{81} = \frac{390}{81} + \frac{32}{81} = \frac{422}{81} = 5,21 \text{ m}$$

Solución: Con los 4 primeros saltos no alcanzará el centro de la charca que está a 5 m. En el quinto salto, sí.

- **Si reparto dos cajas de bombones entres seis amigos, sobran cuatro bombones. ¿Cuántos sobrarán si reparto tres cajas?**

- Si reparto una caja, sobran 2 bombones.

  Si reparto dos cajas, sobran 4 bombones.

  Si reparto tres cajas, sobrarían 6 bombones. Pero estos 6 bombones se vuelven a repartir entre los 6 amigos y no sobra ningún bombón.

3 POTENCIAS Y RAÍCES

1 POTENCIAS

Página 45

1 Calcula.

a) 5^3 **b)** 2^6 **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **d)** 8^1

e) $(-5)^3$ **f)** $(-2)^6$ **g)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ **h)** $(-8)^1$

a) $5^3 = 125$ b) $2^6 = 64$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ d) $8^1 = 8$

e) $(-5)^3 = -125$ f) $(-2)^6 = 64$ g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$ h) $(-8)^1 = -8$

2 Expresa como una potencia de base 10.

a) 100 000 **b)** 100 000 000

c) Mil millones **d)** Un billón

a) $100\,000 = 10^5$ b) Mil millones $= 10^9$

c) $100\,000\,000 = 10^8$ d) Un billón $= 10^{12}$

3 Escribe el cubo de todos los números enteros comprendidos entre –5 y +5.

$(-5)^3 = -125$ $(-1)^3 = -1$ $3^3 = 27$

$(-4)^3 = -64$ $0^3 = 0$ $4^3 = 64$

$(-3)^3 = -27$ $1^3 = 1$ $5^3 = 125$

$(-2)^3 = -8$ $2^3 = 8$

4 Escribe la descomposición polinómica de:

a) 250 467 **b)** 8 400 900 **c)** 42 800 500 000

a) $250\,467 = 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7$

b) $8\,400\,900 = 8 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^2$

c) $42\,800\,500\,000 = 4 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^9 + 8 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^5$

5 ¿Qué número corresponde a cada descomposición?

a) $4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2$

b) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$

a) $4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 = 478\,602$

b) $5 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 = 52\,086\,020$

Página 47

6 **Reduce cada expresión a una sola potencia:**

a) $x \cdot x^4 \cdot x^2$ **b)** $x^9 : x^7$

c) $x^2 \cdot (x^7 : x^6)$ **d)** $(a^9 : a^6) \cdot a^2$

e) $(a^3 \cdot a^5) : (a^4 \cdot a^4)$ **f)** $\dfrac{x^3 \cdot x^6}{x^7}$

g) $\dfrac{x^7 : x^2}{x^4 : x^3}$ **h)** $\dfrac{x^4 \cdot x^2}{x \cdot x^3}$

a) $x \cdot x^4 \cdot x^2 = x^{1+4+2} = x^7$ (Propiedad ③)

b) $x^9 : x^7 = x^{9-7} = x^2$ (Propiedad ④)

c) $x^2 \cdot (x^7 : x^6) = x^{2+(7-6)} = x^{2+1} = x^3$ (Propiedades ③ y ④)

d) $(a^9 : a^6) \cdot a^2 = a^{(9-6)+2} = a^{3+2} = a^5$ (Propiedades ③ y ④)

e) $(a^3 \cdot a^5) : (a^4 \cdot a^4) = a^{3+5} : a^{4+4} = a^8 : a^8 = 1$ (Propiedades ③ y ④)

f) $\dfrac{x^3 \cdot x^6}{x^7} = \dfrac{x^{3+6}}{x^7} = \dfrac{x^9}{x^7} = x^{9-7} = x^2$ (Propiedades ③ y ④)

g) $\dfrac{x^7 : x^2}{x^4 : x^3} = \dfrac{x^{7-2}}{x^{4-3}} = \dfrac{x^5}{x} = x^{5-1} = x^4$ (Propiedad ④)

h) $\dfrac{x^4 \cdot x^2}{x \cdot x^3} = \dfrac{x^{4+2}}{x^{1+3}} = \dfrac{x^6}{x^4} = x^{6-4} = x^2$ (Propiedades ③ y ④)

7 **Opera.**

a) $(x^3)^4$ **b)** $(x^2)^5$ **c)** $(x^3)^5 : x^{10}$

d) $a^9 : (a^4)^2$ **e)** $(a^2)^2 \cdot (a^2)^2$ **f)** $(a^2)^4 : (a^3)^2$

a) $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$ b) $(x^2)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$

c) $(x^3)^5 : x^{10} = x^{15} : x^{10} = x^5$ d) $a^9 : (a^4)^2 = a^9 : a^8 = a$

e) $(a^2)^2 \cdot (a^2)^2 = a^4 \cdot a^4 = a^8$ f) $(a^2)^4 : (a^3)^2 = a^8 : a^6 = a^2$

8 **Reduce a una sola potencia y después calcula.**

a) $7^5 : 7^3$ **b)** $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ **c)** $(-5)^7 : 5^6$

d) $[(-3)^2]^2$ **e)** $(7^2)^3 : (7^3)^2$ **f)** $(-2)^3 : (-2)$

a) $7^5 : 7^3 = 7^2 = 49$ b) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^5 = -32$

c) $(-5)^7 : 5^6 = -5^7 : 5^6 = -5$ d) $[(-3)^2]^2 = (-3)^4 = 81$

e) $(7^2)^3 : (7^3)^2 = 7^6 : 7^6 = 7^0 = 1$ f) $(-2)^3 : (-2) = (-2)^2 = 4$

9 **Calcula por el camino más corto, aplicando las propiedades 1 y 2, como en el ejemplo.**

- $\mathbf{18^4 : 9^4 = (18 : 9)^4 = 2^4 = 16}$

a) $2^5 \cdot 5^5$ **b)** $24^3 : 8^3$ **c)** $4^3 \cdot (-5)^3$

d) $(-10)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$

a) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$

b) $24^3 : 8^3 = (24 : 8)^3 = 3^3 = 27$

c) $4^3 \cdot (-5)^3 = [4 \cdot (-5)]^3 = (-20)^3 = -8\,000$

d) $(-10)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[(-10) \cdot \frac{1}{2}\right]^2 = (-5)^2 = 25$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^4 = 1^4 = 1$

10 **Reduce a un único número racional en cada caso:**

a) $2^3 \cdot 5^4$ **b)** $20^5 : 2^6$ **c)** $9^6 : (-3)^6$ **d)** $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$

e) $\frac{6^5}{2^4} : 3^5$ **f)** $(-2)^8 : \left(\frac{1}{4}\right)^5$ **g)** $\left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{9}\right)^3$ **h)** $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$

a) $2^3 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 5 = 10^3 \cdot 5 = 5\,000$

b) $20^5 : 2^6 = (20^5 : 2^5) : 2 = (20 : 2)^5 : 2 = 10^5 : 2 = 50\,000$

c) $9^6 : (-3)^6 = [9 : (-3)]^6 = (-3)^6 = 729$

d) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{2^8 \cdot 5^4}{2^4} = 2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10\,000$

e) $\frac{6^5}{2^4} : 3^5 = \frac{(2 \cdot 3)^5}{2^4} : 3^5 = \frac{2^5 \cdot 3^5}{2^4} : 3^5 = (2 \cdot 3^5) : 3^5 = 2$

f) $(-2)^8 : \left(\frac{1}{4}\right)^5 = (-2)^8 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5 = (-2)^8 : \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{(-2)^8}{2^{10}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^4}{4^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4}{3^6 \cdot (2^2)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4}{3^6 \cdot 2^8} = \frac{1}{3^2 \cdot 2^2} = \frac{1}{36}$

2 ▸ POTENCIAS DE EXPONENTE CERO O NEGATIVO

Página 49

1 Expresa en cada caso con una fracción irreducible o con un número entero:

a) 7^0 **b)** 3^{-3} **c)** $(-3)^{-2}$ **d)** 8^{-1}

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^0$ **f)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ **g)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **h)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$

a) $7^0 = 1$

b) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

c) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $8^{-1} = \frac{1}{8}$

e) $\left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

h) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

2 Calcula.

a) $6^2 \cdot 3^{-4}$ **b)** $2^{-3} : 2^2$ **c)** $5^{-2} \cdot 5^{-3}$ **d)** $(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot 6^2$

e) $(3^2 \cdot 5^{-3}) \cdot (3^3 \cdot 5^{-2})$ **f)** $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ **g)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

a) $6^2 \cdot 3^{-4} = (3 \cdot 2)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{3^2 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

b) $2^{-3} : 2^2 = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

c) $5^{-2} \cdot 5^{-3} = 5^{-5} = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125}$

d) $(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot 6^2 = \frac{1}{(2 \cdot 3^2)^2} \cdot (2 \cdot 3)^2 = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

e) $(3^2 \cdot 5^{-3}) \cdot (3^3 \cdot 5^{-2}) = \frac{3^2}{5^3} \cdot \frac{3^3}{5^2} = \frac{3^5}{5^5} = \frac{243}{3125}$

f) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{2^2}{3^2} \cdot 3 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

3 **Reduce a una sola potencia cada expresión:**

a) $x^4 \cdot x^{-5}$ **b)** $x^2 : x^{-1}$ **c)** $x^{-3} \cdot (x^5 : x^6)$

d) $(a^2)^3 : a^7$ **e)** $a^8 \cdot (a^2)^{-3}$ **f)** $b^6 : (b^4 \cdot b^{-2})$

g) $\dfrac{x^2}{x^{-3}}$ **h)** $\dfrac{x^{-2}}{x}$ **i)** $\dfrac{x^7 : x^5}{x \cdot x^3}$

a) $x^4 \cdot x^{-5} = x^{-1}$

b) $x^2 : x^{-1} = x^3$

c) $x^{-3} \cdot (x^5 : x^6) = x^{-3} \cdot x^{-1} = x^{-4}$

d) $(a^2)^3 : a^7 = a^6 : a^7 = a^{-1}$

e) $a^8 \cdot (a^2)^{-3} = a^8 \cdot a^{-6} = a^2$

f) $b^6 : (b^4 \cdot b^{-2}) = b^6 : b^2 = b^4$

g) $\dfrac{x^2}{x^{-3}} = x^2 : x^{-3} = x^5$

h) $\dfrac{x^{-2}}{x} = x^{-3}$

i) $\dfrac{x^7 : x^5}{x \cdot x^3} = \dfrac{x^2}{x^4} = x^{-2}$

4 **Reduce estas expresiones:**

a) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x$ **b)** $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{4} : a^{-3}$ **c)** $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{-2}$

d) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ **e)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-8} \cdot \dfrac{x^6}{y^7}$ **f)** $\dfrac{a^5}{b^3} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}$

a) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x = x^2 \cdot x = x^3$

b) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{4} : a^{-3} = a^{-4} : a^{-3} = a^{-1}$

c) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2} \cdot x^{-2} = x^2 \cdot x^{-2} = x^0 = 1$

d) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} a \cdot \dfrac{b}{a} = b$

e) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-8} \cdot \dfrac{x^6}{x^2} = \dfrac{y^8}{x^8} \cdot \dfrac{x^6}{y^7} = \dfrac{y}{x^2}$

f) $\dfrac{a^5}{b^3} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} = \dfrac{a^5}{b^3} \cdot \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a^3}{b}$

3 RAÍCES EXACTAS

Página 50

1 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ **b)** $\sqrt[3]{216}$ **c)** $\sqrt{14\,400}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$ **e)** $\sqrt[3]{\dfrac{64}{216}}$ **f)** $\sqrt[3]{\dfrac{-3\,375}{1\,000}}$

a) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$

c) $\sqrt{14\,400} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^6}} = \dfrac{1}{2}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{216}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^6}{2^3 \cdot 3^3}} = \dfrac{2^2}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{3375}{1000}} = \sqrt[3]{\dfrac{3^3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3}} = \dfrac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \dfrac{3}{2}$

2 ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3

a) Falso.

Cuando escribimos $\sqrt{25}$ nos referimos a la raíz positiva, luego $\sqrt{25} = 5$.

b) Verdadero.

$(-5)^2 = 25$.

c) Falso.

81 sí tiene dos raíces cuadradas pero son 9 y –9. 3 y (–3) no son raíces de 81 ya que $3^2 = (-3)^2 = 9 \neq 81$.

d) Falso.

3 sí es raíz cúbica de 27, pues $3^3 = 27$. Sin embargo, (–3) no lo es, pues $(-3)^3 = -27 \neq 27$.

4 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Página 51

Cálculo mental

Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $513\,000 = 5{,}13 \cdot 10^n$ **b)** $2\,577{,}6 = 2{,}5776 \cdot 10^n$

c) $453 \cdot 10^3 = 4{,}53 \cdot 10^n$ **d)** $125{,}3 \cdot 10^6 = 1{,}253 \cdot 10^n$

a) $n = 5$ b) $n = 3$ c) $n = 5$ d) $n = 8$

Cálculo mental

Di el valor de n para que se verifique cada igualdad:

a) $0{,}000004 = 4 \cdot 10^n$ **b)** $0{,}00513 = 5{,}13 \cdot 10^n$

c) $0{,}45 \cdot 10^{-2} = 4{,}5 \cdot 10^n$ **d)** $0{,}0018 \cdot 10^{-5} = 1{,}8 \cdot 10^n$

a) $n = -6$ b) $n = -3$ c) $n = -3$ d) $n = -8$

1 Expresa estas cantidades en notación científica:

a) $2\,800\,000$ **b)** $169\,000\,000$

c) $7\,020\,000\,000$ **d)** $53\,420\,000\,000\,000$

a) $2\,800\,000 = 2{,}8 \cdot 10^6$ b) $169\,000\,000 = 1{,}69 \cdot 10^8$

c) $7\,020\,000\,000 = 7{,}02 \cdot 10^9$ d) $53\,420\,000\,000\,000 = 5{,}342 \cdot 10^{13}$

2 Expresa con todas sus cifras.

a) $3{,}6 \cdot 10^5$ **b)** $8{,}253 \cdot 10^8$ **c)** $2{,}27 \cdot 10^{11}$

a) $3{,}6 \cdot 10^5 = 360\,000$ b) $8{,}253 \cdot 10^8 = 825\,300\,000$

c) $2{,}27 \cdot 10^{11} = 227\,000\,000\,000$

3 Expresa estas cantidades en notación científica:

a) $0{,}00016$ **b)** $0{,}00000387$

c) $0{,}00000000083$ **d)** $0{,}000000000000000629$

a) $0{,}00016 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ b) $0{,}00000387 = 3{,}87 \cdot 10^{-6}$

c) $0{,}00000000083 = 8{,}3 \cdot 10^{-10}$ d) $0{,}000000000000000629 = 6{,}29 \cdot 10^{-16}$

4 Expresa con todas sus cifras.

a) $2{,}65 \cdot 10^{-4}$ **b)** $8{,}253 \cdot 10^{-6}$ **c)** $2{,}27 \cdot 10^{-11}$

a) $2{,}65 \cdot 10^{-4} = 0{,}000265$ b) $8{,}253 \cdot 10^{-6} = 0{,}000008253$

c) $2{,}27 \cdot 10^{-11} = 0{,}0000000000227$

Página 52

5 **Expresa 6 274 344 825 en notación científica, redondeándolo a las decenas de millón.**

6 274 344 825 $\rightarrow$ Redondeo: 6 270 000 000

Notación científica: $6{,}27 \cdot 10^9$

6 **Opera y pon el resultado en notación científica.**

a) $7{,}25 \cdot 10^4 - 5{,}83 \cdot 10^4$

b) $7{,}25 \cdot 10^9 + 5{,}83 \cdot 10^9$

c) $7{,}25 \cdot 10^9 + 2{,}1 \cdot 10^8$

d) $4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6$

e) $1{,}8 \cdot 10^9 + 2{,}25 \cdot 10^8$

f) $(2{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{-3})$

g) $(3{,}4 \cdot 10^9) : (5 \cdot 10^4)$

a) $7{,}25 \cdot 10^4 - 5{,}83 \cdot 10^4 = (7{,}25 - 5{,}83) \cdot 10^4 = 1{,}42 \cdot 10^4$

b) $7{,}25 \cdot 10^9 + 5{,}83 \cdot 10^9 = (7{,}25 + 5{,}83) \cdot 10^9 = 13{,}08 \cdot 10^9 = 1{,}308 \cdot 10^{10}$

c) $7{,}25 \cdot 10^9 + 2{,}1 \cdot 10^8 = 7{,}25 \cdot 10^9 + 0{,}21 \cdot 10^9 = (7{,}25 + 0{,}21) \cdot 10^9 = 7{,}46 \cdot 10^9$

d) $4{,}73 \cdot 10^7 - 7{,}5 \cdot 10^6 = 4{,}73 \cdot 10^7 - 0{,}75 \cdot 10^7 = (4{,}73 - 0{,}75) \cdot 10^7 = 3{,}98 \cdot 10^7$

e) $1{,}8 \cdot 10^9 + 2{,}25 \cdot 10^8 = 1{,}8 \cdot 10^9 + 0{,}225 \cdot 10^9 = (1{,}8 + 0{,}225) \cdot 10^9 = 2{,}025 \cdot 10^9$

f) $(2{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{-3}) = (2{,}5 \cdot 8) \cdot 10^{-7-3} = 20 \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-9}$

g) $(3{,}4 \cdot 10^9) : (5 \cdot 10^4) = (3{,}4 : 5) \cdot 10^{9-4} = 0{,}68 \cdot 10^5 = 6{,}8 \cdot 10^4$

7 **Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica:**

a) $234 \cdot 10^3 + 5\,231 \cdot 10^2$

b) $42{,}81 \cdot 10^{-5} - 3\,450 \cdot 10^{-7}$

c) $1{,}592 \cdot 10^4 + 2\,561$

d) $0{,}127 \cdot 10 - 248 \cdot 10^{-3}$

a) $234 \cdot 10^3 + 5\,231 \cdot 10^2 = (2\,340 + 5\,231) \cdot 10^2 = 7\,571 \cdot 10^2 = 7{,}571 \cdot 10^5$

b) $42{,}81 \cdot 10^{-5} - 3\,450 \cdot 10^{-7} = (42{,}81 - 34{,}5) \cdot 10^{-5} = 8{,}31 \cdot 10^{-5}$

c) $1{,}592 \cdot 10^4 + 2\,561 = (1{,}592 + 0{,}2561) \cdot 10^4 = 1{,}8481 \cdot 10^4$

d) $0{,}127 \cdot 10 - 248 \cdot 10^{-3} = 1{,}27 - 0{,}248 = 1{,}022$

8 **En 18 gramos de agua (H_2O) hay $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas elementales (número de Avogadro).**

a) ¿Cuántas moléculas elementales hay en un gramo de agua?

b) ¿Cuál es la masa de una molécula elemental?

a) En un gramo de agua hay $(6{,}022 \cdot 10^{23}) : 18 \approx 0{,}3346 \cdot 10^{23} = 3{,}346 \cdot 10^{22}$ moléculas elementales.

b) La masa de una molécula elemental son $18 : (6{,}022 \cdot 10^{23}) \approx 2{,}989 \cdot 10^{-23}$ gramos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 54

Practica

Descomposición polinómica de un número

1 **Escribe la descomposición polinómica de estos números:**

a) 3 450 300 **b) 0,470286** **c) 583,735** **d) 39,084**

a) $3\,450\,300 = 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2$

b) $0,470286 = 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6}$

c) $583,735 = 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$

d) $39,084 = 3 \cdot 10 + 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

2 **Escribe el número que corresponde a cada descomposición:**

a) $4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0$

b) $8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$

c) $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

a) $4 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^0 = 492\,607$

b) $8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} = 0,8495$

c) $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} = 263,74$

3 **Utiliza las potencias de base 10 con exponente negativo para hacer las descomposiciones polinómicas de los siguientes decimales:**

a) 0,00203 **b) –0,0000053** **c) 0,00000000019**

a) $0,00203 = 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-5}$

b) $-0,0000053 = -5 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-7}$

c) $0,00000000019 = 1 \cdot 10^{-10} + 9 \cdot 10^{-11}$

Potencias: propiedades y operaciones

4 **Calcula las potencias siguientes:**

a) $(-3)^3$ **b)** $(-2)^4$ **c)** $(-2)^{-3}$

d) -3^2 **e)** -4^{-1} **f)** $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **i)** $\left(\frac{4}{3}\right)^0$

a) $(-3)^3 = -27$

b) $(-2)^4 = 16$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

d) $-3^2 = -9$

e) $-4^{-1} = \frac{-1}{4}$

f) $(-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{-1}\right)^2 = 4$

i) $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$

5 **Expresa como una potencia de base 2 o 3.**

a) 64 **b)** 243 **c)** $\frac{1}{32}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $-\frac{1}{27}$

a) $64 = 2^6$ b) $243 = 3^5$ c) $\frac{1}{32} = 2^{-5}$ d) $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ e) $-\frac{1}{27} = (-3)^{-3}$

6 **Expresa como potencia única.**

a) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ **b)** $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$ **c)** $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$ **d)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^2$ **e)** $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$

a) $\frac{3^4}{3^{-3}} = 3^7$ b) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1} = \frac{2^3}{2^2} = 2$ c) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}} = \frac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$ e) $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

7 **Reduce a una sola potencia.**

a) $(11^7 \cdot 11^4) : 11^8$ **b)** $(a^8 : a^5)^4$ **c)** $(a^{-2})^3 \cdot a^9$

d) $(a^{-3} \cdot a^2)^{-4} : a^{-6}$ **e)** $12^5 : (-3)^5$ **f)** $8^{-6} \cdot 16^{-6}$

a) $(11^7 \cdot 11^4) : 11^8 = 11^{7+4-8} = 11^3$ b) $(a^8 : a^5)^4 = (a^{8-5})^4 = (a^3)^4 = a^{12}$

c) $(a^{-2})^3 \cdot a^9 = a^{-6} \cdot a^9 = a^{-6+9} = a^3$ d) $(a^{-3} \cdot a^2)^{-4} : a^{-6} = (a^{-1})^{-4} : a^{-6} = a^4 : a^{-6} = a^{10}$

e) $12^5 : (-3)^5 = 4^5 \cdot 3^5 : (-3)^5 = -4^5$ f) $8^{-6} \cdot 16^{-6} = (8 \cdot 16)^{-6} = 128^{-6}$

8 **Simplifica.**

a) $\frac{2a}{b^2} : \frac{3a^2}{b}$ **b)** $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a}$ **c)** $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2}$

d) $(a^{-1} b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1}$ **e)** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \frac{a^3}{b^2}$ **f)** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} (a^{-1})^{-2}$

a) $\frac{2a}{b^2} : \frac{3a^2}{b} = \frac{2ab}{3a^2 b^2} = \frac{2}{3ab}$

b) $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b}{9b^2} = \frac{4a^2}{3b}$

c) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2} = (6a)^{-1} : (3^{-2} \cdot a^4) = \frac{1}{6a} : \frac{a^4}{3^2} = \frac{9}{6a^5} = \frac{3}{2a^5}$

d) $(a^{-1} b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1} = (a^{-2} \cdot b^4) \cdot (a^{-1} \cdot b^2) = \frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{b^6}{a^3}$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^4 \cdot \frac{a^3}{b^2} = \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{a^3}{b^2} = \frac{b^2}{a}$

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} (a^{-1})^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 \cdot a^2 = \frac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \frac{b^3}{a}$

9 **Calcula, como en el ejemplo resuelto.**

- $\dfrac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^{10} \cdot 3^4}{3^2 \cdot 2^7} = 2^3 \cdot 3^2$

a) $\dfrac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$ **b)** $\dfrac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$ **c)** $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$ **d)** $\dfrac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$

a) $\dfrac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^{10} \cdot 3^4}{2^7 \cdot 3^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

b) $\dfrac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10} = \dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot (2^2)^2 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$

c) $\dfrac{2^{-5} \cdot 4^3}{16} = \dfrac{2^{-5} \cdot (2^2)^3}{2^4} = \dfrac{2^{-5} \cdot 2^6}{2^4} = \dfrac{2}{2^4} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

d) $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}} = \dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}} = \dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 3^4 = 81$

e) $\dfrac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2)^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot (2^2)^2} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4} = \dfrac{2^2 \cdot 3^6}{2^7 \cdot 3^2} = \dfrac{3^4}{2^5} = \dfrac{81}{32}$

Potencias de base 10

10 **Indica el valor de n en cada caso:**

a) $0{,}001 = 10^n$ **b)** $(10\,000)^2 = 10^n$ **c)** $0{,}0000001 = 10^n$ **d)** $0{,}0001^3 = 10^n$

a) $0{,}001 = 10^n \rightarrow n = -3$

b) $(10\,000)^2 = (10^4)^2 = 10^8 \rightarrow n = 8$

c) $0{,}0000001 = 10^n \rightarrow n = -7$

d) $0{,}0001^3 = (10^{-4})^3 = 10^{-12} \rightarrow n = -12$

11 **¿Verdadero o falso?**

a) $(0{,}001)^{-3} = 10^9$ **b)** $(0{,}001)^4 = 10^{12}$

c) $(0{,}01)^3 = 10^{-6}$ **d)** $(10^{-2})^5 = (0{,}1)^{10}$

a) Verdadero. $(0{,}001)^{-3} = (10^{-3})^{-3} = 10^9$

b) Falso. $(0{,}001)^4 = (10^{-3})^4 = 10^{-12} \neq 10^{12}$

c) Verdadero. $(0{,}01)^3 = (10^{-2})^3 = 10^{-6}$

d) Verdadero. $(10^{-2})^5 = 10^{-10} = (10^{-1})^{10} = (0{,}1)^{10}$

12 **Expresa como una potencia de base 10.**

a) $(0{,}01)^{-5}$ **b)** $\left(\dfrac{1}{0{,}001}\right)^4$ **c)** $\left(\dfrac{1}{10^3}\right)^{-3}$ **d)** $\left(\dfrac{0{,}1^3}{10^5}\right)^2$

a) $(0{,}01)^{-5} = (10^{-2})^{-5} = 10^{10}$

b) $\left(\dfrac{1}{0{,}001}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{10^{-3}}\right)^4 = (10^3)^4 = 10^{12}$

c) $\left(\dfrac{1}{10^3}\right)^{-3} = (10^{-3})^{-3} = 10^9$

d) $\left(\dfrac{0{,}1^3}{10^5}\right)^2 = \left(\dfrac{10^{-3}}{10^5}\right)^2 = (10^{-8})^2 = 10^{-16}$

13 **Expresa como una potencia de base 10 estos enunciados:**

a) El área en centímetros cuadrados de un cuadrado de lado 1 kilómetro.

b) El volumen en metros cúbicos de un cubo de arista 1 milímetro.

a) $1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm} \;\rightarrow\; 1 \text{ km} \times 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm} \times 10^5 \text{ cm} = (10^5)^2 \text{ cm}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$

b) $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} \;\rightarrow\; 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} =$

$= 10^{-3} \text{ m} \times 10^{-3} \text{ m} \times 10^{-3} \text{ m} = (10^{-3})^3 \text{ m}^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$

14 **Escribe, como se hace en los ejemplos, dos potencias de base 10 consecutivas entre las que estén los siguientes números:**

- $\mathbf{10^2 < 234 < 10^3}$ $\qquad$ $\mathbf{10^{-1} < 0{,}28 < 10^0}$

a) 8,35 **b) 762** **c) 13 456** **d) 1 230 022 045**

e) 0,18 **f) 0,008** **g) 0,02** **h) 0,000007**

a) $10^\circ < 8{,}35 < 10^1$ b) $10^2 < 762 < 10^3$

c) $10^4 < 13\,456 < 10^5$ d) $10^9 < 1\,230\,022\,045 < 10^{10}$

e) $10^{-1} < 0{,}18 < 10^\circ$ f) $10^{-3} < 0{,}008 < 10^{-2}$

g) $10^{-2} < 0{,}02 < 10^{-1}$ h) $10^{-6} < 0{,}000007 < 10^{-5}$

15 **¿Verdadero o falso?**

a) El exponente de una potencia no puede ser un número negativo si la base es negativa.

b) Una potencia con exponente negativo es siempre negativa.

c) Si $a^n = -1$, entonces $a = -1$ y n es impar.

d) 5^{-2} es un número negativo.

e) $6^{-1} < 1$

f) $10^{-3} \cdot 10^{-2} = 0{,}1$

g) $(-8)^{-2} = (+8)^2$

a) Falso. Por ejemplo: $(-2)^{-1} = -1/2$

b) Falso. Por ejemplo: $(10)^{-1} = 0{,}1$

c) Verdadero.

d) Falso. $5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$

e) Verdadero.

f) Falso. $10^{-3} \cdot 10^{-2} = 10^{-5} \neq 0{,}1$

g) Falso. $(-8)^{-2} = (-1)^{-2}\,(8)^{-2} = 8^{-2} \neq 8^2$

Página 55

Raíces

16 **La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos $-\sqrt{4}$ nos referimos a la raíz negativa. Es decir, $-\sqrt{4} = -2$.**

¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?

a) $-\sqrt{64}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $-\sqrt{1}$

d) $\sqrt[6]{1}$ **e)** $-\sqrt{9}$ **f)** $\sqrt[3]{-8}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ **h)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ **i)** $\sqrt[3]{-1}$

a) $-\sqrt{64} = -8$ b) $\sqrt[4]{81} = 3$ c) $-\sqrt{1} = -1$

d) $\sqrt[6]{1} = 1$ e) $-\sqrt{9} = -3$ f) $\sqrt[3]{-8} = -2$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$ i) $\sqrt[3]{-1} = -1$

17 **Justifica cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que se verifique la igualdad:**

a) $a^3 = 2^6$ **b)** $a^{-1} = 2$ **c)** $\sqrt{a} = \dfrac{4}{5}$

d) $\sqrt[4]{a} = 1$ **e)** $a^{-2} = \dfrac{1}{4}$ **f)** $a^{-5} = -1$

a) $a = 2^2$

b) $a = \dfrac{1}{2}$ porque $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

c) $a = \dfrac{16}{25}$ porque $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

d) $a = 1$ porque $\sqrt[4]{1} = 1$

e) $a = 2$ porque $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

f) $a = -1$ porque $(-1)^{-5} = \dfrac{1}{(-1)^5} = -1$

18 **Calcula las siguientes raíces:**

a) $\sqrt[5]{16\,807}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{27}{343}}$ **c)** $\sqrt[4]{1{,}6 \cdot 10^5}$

d) $\sqrt{\dfrac{289}{121}}$ **e)** $\sqrt[3]{0{,}064}$ **f)** $\sqrt[5]{0{,}00001}$

g) $\sqrt[6]{2^{12}}$ **h)** $\sqrt[5]{-1}$ **i)** $\sqrt[4]{\dfrac{5^{-2}}{5^2}}$

a) $\sqrt[5]{16807} = \sqrt[5]{7^5} = 7$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{343}} = \sqrt[3]{\dfrac{3^3}{7^3}} = \dfrac{3}{7}$

c) $\sqrt[4]{1{,}6 \cdot 10^5} = \sqrt[4]{16 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 10^4} = 2 \cdot 10 = 20$

d) $\sqrt{\dfrac{289}{121}} = \sqrt{\dfrac{17^2}{11^2}} = \dfrac{17}{11}$

e) $\sqrt[3]{0{,}064} = \sqrt[3]{64 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-1} = 0{,}4$

f) $\sqrt[5]{0{,}00001} = \sqrt[5]{10^{-5}} = 10^{-1} = 0{,}1$

g) $\sqrt[6]{2^{12}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2^6} = 2 \cdot 2 = 4$

h) $\sqrt[5]{-1} = -1$

i) $\sqrt[4]{\dfrac{5^{-2}}{5^2}} = \sqrt[4]{5^{-2} \cdot 5^{-2}} = \sqrt[4]{5^{-4}} = 5^{-1}$

19 **Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:**

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt{\frac{16}{25}}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **d)** $\sqrt[4]{-1}$

e) $\sqrt[3]{216}$ **f)** $\sqrt[7]{-128}$ **g)** $\sqrt[5]{-243}$ **h)** $\sqrt[6]{4\,096}$

i) $\sqrt[6]{64}$ **j)** $\sqrt[3]{-8}$ **k)** $\sqrt[4]{625}$

l) $\sqrt{-8}$ **m)** $\sqrt[4]{625/16}$ **n)** $\sqrt[5]{-1}$

a) 2 b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{2}$

d) No tiene solución real. e) 6 f) –2

g) –3 h) 4 i) 2

j) –2 k) 5

l) No tiene solución real. m) $\frac{5}{2}$ n) –1

20 **Las siguientes raíces no son exactas. ¿Entre qué naturales consecutivos están?**

a) $\sqrt{1,5}$ **b)** $\sqrt{130}$ **c)** $\sqrt[3]{850}$

d) $\sqrt[3]{1\,235}$ **e)** $\sqrt[4]{520}$ **f)** $\sqrt{1,5 \cdot 10^3}$

a) $1^2 < 1,5 < 2^2 \;\rightarrow\; 1 < \sqrt{1,5} < 2$

b) $11^2 < 130 < 12^2 \;\rightarrow\; 11 < \sqrt{130} < 12$

c) $9^3 < 850 < 10^3 \;\rightarrow\; 9 < \sqrt[3]{850} < 10$

d) $10^3 < 1\,235 < 11^3 \;\rightarrow\; 10 < \sqrt[3]{1235} < 11$

e) $4^4 < 520 < 5^4 \;\rightarrow\; 4 < \sqrt[4]{520} < 5$

f) $\sqrt{1,5 \cdot 10^3} = \sqrt{1500}$

$38^2 < 1\,500 < 39^2 \;\rightarrow\; 38 < \sqrt{1500} < 39$

21 **Simplifica, si se puede, como en el ejemplo.**

- $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ no se puede simplificar.

c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ no se puede simplificar.

e) $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{6}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{5}{3}\sqrt{5}$

f) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

22 **Simplifica, si es posible, teniendo en cuenta que:**

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$ **c)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ **e)** $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ **f)** $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{5 \cdot 16} = \sqrt{5 \cdot 2^4} = 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{20}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2} \rightarrow$ No tienen el mismo índice.

e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6} \rightarrow$ No tienen el mismo índice.

Notación científica

23 **Escribe estos números con todas sus cifras:**

a) $4 \cdot 10^7$ **b)** $5 \cdot 10^{-4}$ **c)** $9,73 \cdot 10^8$

d) $8,5 \cdot 10^{-6}$ **e)** $3,8 \cdot 10^{10}$ **f)** $1,5 \cdot 10^{-5}$

a) $4 \cdot 10^7 = 40\,000\,000$ b) $5 \cdot 10^{-4} = 0,0005$

c) $9,73 \cdot 10^8 = 973\,000\,000$ d) $8,5 \cdot 10^{-6} = 0,0000085$

e) $3,8 \cdot 10^{10} = 38\,000\,000\,000$ f) $1,5 \cdot 10^{-5} = 0,000015$

24 **Expresa en notación científica.**

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km **b) Caudal de una catarata: 1 200 000 L/s**

c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s **d) Emisiones de CO_2: 54 900 000 000 kg**

a) $1,5 \cdot 10^8$ km b) $1,2 \cdot 10^6$ *l*/s

c) $3 \cdot 10^8$ m/s d) $5,49 \cdot 10^{10}$ kg

25 **Escribe en notación científica:**

a) 13 800 000 **b)** 0,000005 **c)** 4 800 000 000

d) 0,0000173 **e)** $153 \cdot 10^4$ **f)** $93,8 \cdot 10^{-4}$

a) $1,38 \cdot 10^7$ b) $5 \cdot 10^{-6}$ c) $4,8 \cdot 10^9$

d) $1,73 \cdot 10^{-5}$ e) $1\,530\,000 = 1,53 \cdot 10^6$ f) $0,00938 = 9,38 \cdot 10^{-3}$

26 **Completa estas igualdades:**

a) $5,25 \cdot 10^7 = \ldots\, 10^6$ **b)** $2 \cdot 10^3 = \ldots\, 10^4$

c) $4,7 \cdot 10^{-3} = \ldots\, 10^{-2}$ **d)** $234 \cdot 10^4 = \ldots\, 10^3$

a) $52,5 \cdot 10^6$ b) $0,2 \cdot 10^4$

c) $0,47 \cdot 10^{-2}$ d) $2\,340 \cdot 10^3$

27 **Di el valor de n en cada caso:**

a) $3\,570\,000 = 3{,}57 \cdot 10^n$ **b)** $0{,}000083 = 8{,}3 \cdot 10^n$

c) $157{,}4 \cdot 10^3 = 1{,}574 \cdot 10^n$ **d)** $93{,}8 \cdot 10^{-5} = 9{,}38 \cdot 10^n$

a) $n = 6$ b) $n = -5$ c) $n = 5$ d) $n = -4$

29 **Calcula y comprueba con la calculadora.**

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$ **b)** $(1{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$ **d)** $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^7)$ **f)** $(4{,}4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-5})$

a) $6 \cdot 10^{17}$ b) $3 \cdot 10^{-12}$

c) $6{,}8 \cdot 10^9$ d) $4 \cdot 10^{-5}$

e) $3 \cdot 10^{-14}$ f) $2{,}2 \cdot 10^{13}$

30 **Efectúa y comprueba con la calculadora.**

a) $3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$ **b)** $5 \cdot 10^9 + 8{,}1 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$ **d)** $5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

a) $3{,}6 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = (36 - 4) \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3{,}2 \cdot 10^{12}$

b) $5 \cdot 10^9 + 81 \cdot 10^9 = 86 \cdot 10^9 = 8{,}6 \cdot 10^{10}$

c) $80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7{,}5 \cdot 10^{-8}$

d) $532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}$

Página 56

31 Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora:

a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5)$

c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3})$

a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3) = 2,5 \cdot 8 \cdot 10^{10} = 20 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{11}$

b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5) = (5 : 8) \cdot 10^{-8} = 0,625 \cdot 10^{-8} = 6,25 \cdot 10^{-9}$

c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) = 7,4 \cdot 5 \cdot 10^7 = 37 \cdot 10^7 = 3,7 \cdot 10^8$

d) $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3}) = (1,2 : 2) \cdot 10^{14} = 0,6 \cdot 10^{14} = 6 \cdot 10^{13}$

32 Efectúa y escribe el resultado con todas las cifras.

a) $5,3 \cdot 10^{11} - 1,2 \cdot 10^{12} + 7,2 \cdot 10^{10}$ **b)** $4,2 \cdot 10^{-6} - 8,2 \cdot 10^{-7} + 1,8 \cdot 10^{-5}$

c) $(2,25 \cdot 10^{22}) \cdot (4 \cdot 10^{-15}) : (3 \cdot 10^{-3})$ **d)** $(1,4 \cdot 10^{-7})^2 : (5 \cdot 10^{-5})$

a) –598 000 000 000 b) 0,00002138

c) 30 000 000 000 d) 0,000000000392

Resuelve problemas

33 El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6 370 km).

Una vuelta a la Tierra: $2 \cdot \pi \cdot 6370 = 12740\pi$ km ≈ 40 023,89 km

40 023,89 km = 40 023 890 000 mm

Aproximamos 40 023 890 000 mm ≈ $4,0024 \cdot 10^{10}$ mm

$$(4,0024 \cdot 10^{10}) : (5 \cdot 10^{-4}) = (4,0024 : 5) \cdot 10^{10+4} = 0,80048 \cdot 10^{14} = 8,0048 \cdot 10^{13}$$

Solución: $8,0048 \cdot 10^{13}$ virus.

34 El presupuesto en educación de una comunidad autónoma ha pasado de $8,4 \cdot 10^6$ € a $1,3 \cdot 10^7$ € en tres años. ¿Cuál ha sido el aumento neto? Escríbelo con todas las cifras.

$1,3 \cdot 10^7 - 8,4 \cdot 10^6 = (1,3 - 0,84) \cdot 10^7 = 0,46 \cdot 10^7 = 4600000$

Solución: El aumento neto ha sido de 4 600 000 €

35 En el año 2018 se consumieron en España 6,6 millones de toneladas de papel. Calcula el consumo anual por habitante en España en 2018. (Población de España: 46,7 millones).

6,6 millones de toneladas $= 6,6 \cdot 10^6$ toneladas $= 6,6 \cdot 10^9$ kg

46,7 millones de habitantes $= 46,7 \cdot 10^6$ habitantes $= 4,67 \cdot 10^7$ habitantes

$(6,6 \cdot 10^9) : (4,67 \cdot 10^7) = (6,6 : 4,67) \cdot 10^{9-2} = 1,413 \cdot 10^2 = 141,3 \cdot 10^2 = 141,3$ kg/habitante

Solución: Se consumen anualmente 141,3 kg por habitante.

36 **Expresa en notación científica el número de segundos que tiene un año. ¿Qué edad tendría una persona que haya vivido 2 000 millones de segundos?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 año tiene 365 días}\\ \text{1 día tiene 24 horas}\\ \text{1 hora tiene 3 600 segundos}\end{array}\right\} \rightarrow 365 \cdot 24 \cdot 3\,600 = 31\,536\,000$$

* si el año es bisiesto el resultado es otro.

$3{,}1536 \cdot 10^7$ segundos tiene un año.

2 000 000 000 segundos $\rightarrow$ $2 \cdot 10^9 : 3{,}1536 \cdot 10^7 = 63{,}4$ años.

37 **El velocista Usain Bolt recorre 1 m en $9{,}6 \cdot 10^{-2}$ s. El cohete Apolo X recorre 1 m en 90 microsegundos (μs). Ana dice que el Apolo X va más de 1 000 veces más rápido que Usain Bolt. ¿Es verdad esta afirmación? Justifica tu respuesta.**

Usain Bolt recorre 1 m en $9{,}6 \cdot 10^{-2}$ s.

Apolo X recorre 1 m en 90 μs = $90 \cdot 10^6$ s = $9 \cdot 10^{-5}$ s.

$(9{,}6 \cdot 10^{-2}) : (9 \cdot 10^{-5}) = (9{,}6 : 9) \cdot 10^3 = 1{,}07 \cdot 10^3$

$1{,}07 \cdot 10^3 > 1\,000 = 10^3$

Ana tiene razón; para recorrer 1 m, Usain Bolt necesita más de 1 000 veces más tiempo que el cohete Apolo X.

38 **El ordenador chino Tianhe-2 puede realizar 34 mil billones de operaciones por segundo. Calcula cuántas operaciones puede realizar en:**

a) 1 milisegundo.

b) 1 microsegundo.

c) 1 nanosegundo.

34 mil billones = $34 \cdot 10^3$ billones = $34 \cdot 10^{15}$

a) 1 segundo = 10^3 milisegundos

$(34 \cdot 10^{15}) : 10^3 = 34 \cdot 10^{12}$

Solución: En un milisegundo puede hacer $34 \cdot 10^{12}$ operaciones.

b) 1 segundo = 10^6 microsegundos

$(34 \cdot 10^{15}) : 10^6 = 34 \cdot 10^9$

Solución: En un microsegundo puede hacer $34 \cdot 10^9$ operaciones.

c) 1 segundo = 10^9 nanosegundos

$(34 \cdot 10^{15}) : 10^9 = 34 \cdot 10^6$

Solución: En un nanosegundo puede hacer $34 \cdot 10^6$ operaciones.

39 **Consulto en Internet un reloj que mide, segundo a segundo, la población mundial y observo que en el último cuarto de hora ha aumentado en 876 personas. A ese ritmo, ¿cuándo llegaremos a los ocho mil millones? (Población actual: $7{,}5 \cdot 10^9$).**

$8\,000\,000\,000 = 8 \cdot 10^9$

$8 \cdot 10^9 - 7{,}5 \cdot 10^9 = 0{,}5 \cdot 10^9 = 5 \cdot 10^8$ personas faltan.

En 15 min aumentan 876 personas $\rightarrow$ En 1 hora aumentan $876 \cdot 4 = 3\,504$ personas

$5 \cdot 10^8 : 3\,504 \approx 142\,694$ horas $\approx 5\,945{,}6$ días $\approx 16{,}3$ años.

Solución: Tardaremos unos 16,3 años en llegar a los ocho mil millones.

40 Un centímetro cúbico de agua contiene $3{,}35 \cdot 10^{22}$ moléculas de agua. Si en nuestro planeta hay, aproximadamente, $1{,}39 \cdot 10^9$ km^3 de agua, ¿cuántas moléculas de agua hay en la Tierra? ¿Y en un vaso de 2/5 de litro?

$1{,}39 \cdot 10^9 \cdot 10^{15} = 1{,}39 \cdot 10^{24}$ cm^3

$1{,}39 \cdot 10^{24} \cdot 3{,}35 \cdot 10^{22} = 4{,}6565 \cdot 10^{46}$ moléculas.

$\frac{2}{5}$ de litro $= \frac{2}{5}$ dm^3 $= \frac{2}{5} \cdot 10^3$ cm^3 $= 0{,}4 \cdot 10^3$ cm^3

$0{,}4 \cdot 10^3 \cdot 3{,}35 \cdot 10^{22} = 1{,}34 \cdot 10^{25}$ moléculas en un vaso.

41 La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. Un *año luz* es la distancia que recorre la luz en un año.

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5{,}914 \cdot 10^6$ km).

c) La estrella Alfa Centauri está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

a) 1 año = 365 días = 8 760 horas = 525 600 min = 31 536 000 s

Recorre: $31\,536\,000 \cdot (3 \cdot 10^8) = 9{,}4608 \cdot 10^{15}$ m $= 9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km

Solución: Recorre $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km en un año.

b) $5{,}914 \cdot 10^6$ km $= 5{,}914 \cdot 10^9$ m

$(5{,}914 \cdot 10^9) : (8 \cdot 10^3) = (5{,}914 : 8) \cdot 10^6 = 739\,250$ segundos

739 250 : 3 600 = 205,35 horas = 8,56 días

Solución: Tarda unos 8 días y medio en llegar.

c) 4,3 A.L. $= 4{,}3 \cdot (9{,}4608 \cdot 10^{12}) = 4{,}068 \cdot 10^{13}$ km

Solución: 4,3 años luz son $4{,}068 \cdot 10^{13}$ km.

42 De Neptuno al Sol hay $4{,}50 \cdot 10^9$ km, y de la Tierra al Sol, $1{,}50 \cdot 10^8$ km. Cuando los tres estén alineados, ¿a qué distancia se encontrará Neptuno de la Tierra? Si una nave espacial sale de la Tierra con dirección a Neptuno a 18 000 km/h, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a su destino?

Consideramos que el sol está en un extremo, entonces se restan las distancias:

$$4{,}5 \cdot 10^9 - 1{,}5 \cdot 10^8 = 4{,}4 \cdot 10^9 \text{ km}$$

$$t = \frac{e}{v} = \frac{4{,}4 \cdot 10^9}{1{,}8 \cdot 10^4} = 2{,}4 \cdot 10^5 \text{ horas.}$$

43 **La Gran Mancha de Basura en el Pacífico Norte está creciendo a gran velocidad. Una noticia afirma que esta área de residuos se expande por unos 1,6 millones de km^2 –es decir, casi tres veces el tamaño de Francia– y contiene cerca de 80 000 toneladas de plástico.**

a) Expresa los datos en notación científica.

b) Calcula, con esos datos, la superficie de Francia, y comprueba la veracidad de la noticia buscando la superficie de Francia en Internet.

a) 1,6 millones de km^2 = $1{,}6 \cdot 10{,}^6$ km^2

80 000 toneladas = $8 \cdot 10^4$ toneladas = $8 \cdot 10^7$ kg

b) Superficie de Francia según la noticia:

$(1{,}6 \cdot 10^6) : 3 = 0{,}533 \cdot 10^6 = 5{,}33 \cdot 10^5$ km ^{2}

Superficie real de Francia: 643 801 km^2 = $6{,}43801 \cdot 10^5$ km^2

44 **El proyecto *The Ocean Cleanup* espera poder limpiar la Gran Mancha de Basura del Pacífico Norte en 5 años retirando los desechos con el funcionamiento del *System 001,* formado por un tubo cilíndrico flotante (con estructura metálica interior) del que cuelga un faldón de lona. Estima la cantidad de residuos, en kilos, que será necesario recuperar cada día.**

5 años = $5 \cdot 365$ = 1 825 días

Cantidad de plástico que hay que retirar = $8 \cdot 10^7$ kg

Cada día habrá que retirar: $(8 \cdot 10^7) : 1\,825 \approx 0{,}004384 \cdot 10^7 = 4{,}384 \cdot 10^4$ kg

Solución: Cada día habrá que retirar unos 43 840 kg.

Página 57

45 **Naciones Unidas estima que durante la década de 2001-2010 se produjo en el mundo una pérdida anual de $1,3 \cdot 10^7$ hectáreas de bosques.**

Por otra parte, en cierta página web, leo que la pérdida anual ha sido superior a la superficie de diez millones de campos de fútbol de 120 m × 75 m. Comprueba si es cierta esta información.

10 millones de campos 120 × 75:

$(10 \cdot 10^6) \cdot (120 \cdot 75) = 9 \cdot 10^{10}\ \text{m}^2$

$9 \cdot 10^{10}\ \text{m}^2 = 9 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^6\ \text{hm}^2$

$9 \cdot 10^6\ \text{ha} < 1,3 \cdot 10^7\ \text{ha}$

Solución: La información es cierta, pues $9 \cdot 10^6 < 1,3 \cdot 10^7$.

46 **La galaxia M87, que está a 50 millones de años luz de la Tierra, tiene un agujero negro cuyo diámetro es 60 años luz y cuya masa es dos mil millones de veces la masa del Sol.**

a) Calcula la masa del agujero negro en kilogramos. (La masa del Sol es, aproximadamente, $2 \cdot 10^{30}$ kg).

b) Expresa en kilómetros la distancia de esa galaxia a la Tierra y el diámetro del agujero negro.

a) La masa del agujero negro es $2 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 4 \cdot 10^{39}$ kg.

b) Un año luz son $9,46 \cdot 10^{12}$ km.

Distancia = $50 \cdot 10^6 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 4,73 \cdot 10^{20}$ km

Diámetro = $60 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 5,68 \cdot 10^{14}$ km

47 Meta 11.6. **Leo en un diario la siguiente noticia:**

La cantidad anual de CO_2 emitida en 2016 por una central de carbón fue 6 930 000 toneladas, según el Registro Estatal de Emisiones y Fuentes Contaminantes. Para los coches nuevos, la emisión media es de 118,1 g CO_2/km según la Agencia Europea de Medio Ambiente y se estima que un vehículo nuevo recorre en España unos 25 000 km al año.

a) ¿La emisión de cuántas toneladas anuales de CO_2 se evitarían si suprimiéramos un vehículo nuevo?

b) ¿A cuántos coches nuevos equivale la cantidad de CO_2 emitida por la central en 2016?

c) ¿Es correcta la siguiente afirmación?

Un coche nuevo emite 2,9 t anuales de CO_2 y 2,3 millones de ellos emitirán tanto como la central.

a) $118,1 \cdot 25\,000 = 2\,952\,500$ g ≈ 2,95 toneladas de CO_2 emitidas por un coche nuevo.

b) $6\,930\,000 : 2,95 = 2\,349\,152,5$ coches nuevos.

c) Un coche nuevo emite 2,9 toneladas anuales.

2,3 millones emiten 6 785 000

Luego la afirmación es correcta.

AUTOEVALUACIÓN

Página 57

1 **Calcula.**

a) $(-2)^3$ **b)** -3^2 **c)** 2^{-3} **d)** $-(-5)^3$

e) $(-3)^{-3}$ **f)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ **g)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$ **h)** $-\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$

a) $(-2)^3 = -8$

b) $-3^2 = -9$

c) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $-(-5)^3 = -(-125) = 125$

e) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^5 = -32$

h) $-\left(\frac{1}{3}\right)^{3} = -\frac{1}{27}$

2 **Escribe como una potencia de base 2, 3 o 10.**

a) $\frac{1}{81}$ **b)** 0,001 **c)** 0,25

a) $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

b) $0{,}001 = 10^{-3}$

c) $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

3 **Calcula.**

a) $\left(\frac{3}{2} - 1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **b)** $\left(2 + \frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

b) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{49}$

4 **Calcula, expresando los radicandos como potencias.**

a) $\sqrt{0{,}01}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$ **d)** $\sqrt[5]{-1}$

a) $\sqrt{0{,}01} = \sqrt{10^{-2}} = 10^{-1} = 0{,}1$

b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$

c) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

5 **Las siguientes raíces no son exactas. ¿Entre qué naturales consecutivos están?**

a) $\sqrt[4]{2\,345}$ **b)** $\sqrt[3]{104}$

a) $6^4 < 2\,345 < 7^4 \rightarrow 6 < \sqrt[4]{2345} < 7$

b) $4^3 < 104 < 5^3 \rightarrow 4 < \sqrt[3]{104} < 5$

6 **Expresa en notación científica.**

a) $758 \cdot 10^{-5}$ **b)** $0{,}035 \cdot 10^{13}$

c) $101 \cdot 10^{11}$ **d)** $0{,}1001 \cdot 10^{-7}$

a) $7{,}58 \cdot 10^{7}$ b) $3{,}5 \cdot 10^{11}$

c) $1{,}01 \cdot 10^{13}$ d) $1{,}001 \cdot 10^{-8}$

7 **Opera y comprueba luego con la calculadora.**

a) $(3{,}5 \cdot 10^{7}) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$ **b)** $(9{,}6 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{10})$

a) $28 \cdot 10^{-6} = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$ b) $3 \cdot 10^{-18}$

8 **La reserva de gas natural más grande de Asia Central contiene $9 \cdot 10^{11}$ m^3. Si su producción anual es de $1{,}8 \cdot 10^{13}$ litros y se mantiene el mismo ritmo a lo largo del tiempo, ¿cuántos años se podrá explotar?**

$1{,}8 \cdot 10^{13}$ litros $= 1{,}8 \cdot 10^{10}$ m^3

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } 1{,}8 \cdot 10^{10} \text{ m}^3 \ \to \ 1 \text{ años} \\ \text{Entonces } 9 \cdot 10^{11} \text{ m}^3 \ \to \ x \text{ años} \end{array}\right\} \to \ x = \frac{9 \cdot 10^{11}}{1{,}8 \cdot 10^{10}} = 50 \text{ años}$$

4 PROBLEMAS ARITMÉTICOS

1 RAZONES Y PROPORCIONES

Página 59

1 Escribe la razón de cada pareja de números:

a) 6 y 7 **b) 6 y 10** **c) 20 y 30** **d) 12 y 48**

a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ c) $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ d) $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

2 Elige la respuesta correcta en cada caso:

a) La razón de 3 y 18 es: $\frac{3}{8}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$

b) La razón de 18 y 24 es: $\frac{3}{4}, \frac{6}{12}, \frac{1}{9}$

a) $\frac{1}{6}$ porque $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{4}$ porque $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

3 Laura tiene 15 años, y su hermano, 18. ¿Cuál es la razón de sus edades?

La razón entre las edades de Laura y su hermano es $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

4 Escribe tres parejas de números que estén en razón de 2 a 3.

Por ejemplo: 2 y 3, 4 y 6, 10 y 15, 12 y 18

5 Calcula el término desconocido en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\frac{5}{9} = \frac{65}{x}$ **b)** $\frac{52}{8} = \frac{x}{10}$ **c)** $\frac{49}{x} = \frac{28}{60}$

a) $\frac{5}{9} = \frac{65}{x} \rightarrow x = \frac{65 \cdot 9}{5} = 117$

b) $\frac{52}{8} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{52 \cdot 10}{8} = 65$

c) $\frac{49}{x} = \frac{28}{60} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 49}{28} = 105$

6 Mi peso y el de mi hermana pequeña están en razón de 5 a 4. Si yo peso 60 kilos, ¿cuánto pesa mi hermana pequeña?

x = peso de mi hermana

$\frac{5}{4} = \frac{60}{x} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 4}{5} = 48$

Mi hermana pequeña pesa 48 kg.

2 PROPORCIONALIDAD SIMPLE

Página 60

1 Resuelve mentalmente.

a) En la fuente, hemos tardado 40 segundos en llenar un bidón de 20 litros. ¿Cuántos litros arroja la fuente por minuto?

b) Hemos pagado 220 € por una estancia de hotel de cuatro días. ¿Cuánto habríamos pagado si hubiéramos permanecido un día más?

c) Un caminante ha recorrido 7,5 km en hora y media. Si sigue al mismo ritmo, ¿qué distancia recorrerá en dos horas?

d) Una ciclista ha recorrido 10 km en 40 minutos. Si continúa a la misma velocidad, ¿cuánto tardará en recorrer otros 12 kilómetros?

e) Un melón de dos kilos y medio ha costado 5 €. ¿Cuánto costará otro melón de tres kilos?

f) Un aparcamiento cobra 2,40 euros la hora. ¿Cuánto pagaré por una estancia de dos horas y quince minutos?

a) (20 : 40) · 60 = 30 litros

b) (220 : 4) · 5 = 275 €

c) (7,5 : 1,5) · 2 = 10 km

d) (40 : 10) · 12 = 48 min

e) (5 : 2,5) · 3 = 6 kg

f) 2,4 · 2,25 = 5,4 €

2 Pablo ha pagado 3 € por 2,5 kg de peras. ¿Cuánto le costarán a Alicia 3,8 kg de esas mismas peras?

$$\left.\begin{array}{l} 2,5 \text{ kg} \rightarrow 3\text{ €} \\ 3,8 \text{ kg} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2,5}{3,8} = \frac{3}{x} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 3,8}{2,5} = 4,56\text{ €}$$

3,8 kilos de esas mismas peras costarán 4,56 €

3 Una bomba que extrae agua de un pozo llena una cisterna de 7 000 litros en 1 h 10 min. ¿Cuánto tardará en llenar otra cisterna de 11 000 litros?

$$\left.\begin{array}{l} 7\,000\ l \rightarrow 70 \text{ min} \\ 11\,000\ l \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7\,000}{11\,000} = \frac{70}{x} \rightarrow x = \frac{70 \cdot 11\,000}{7\,000} = 110 \text{ min}$$

110 min = 1 hora y 50 min

Tardará 1 hora y 50 minutos en llenar otra cisterna de 11 000 litros.

4 **El peaje de un tramo de autopista contabilizó el lunes el paso de 13 584 vehículos y recaudó 98 891,52 €. ¿Cuántos vehículos se estima que pasaron el martes, que tuvo una recaudación de 105 427,59 €?**

$$\left.\begin{array}{ll} 13\,584 \text{ vehículos} & \to \ 98\,891,52 \text{ €} \\ x & \to \ 105\,427,59 \text{ €} \end{array}\right\} \to \frac{13\,584}{x} = \frac{98\,891,52}{105\,427,59} \to$$

$$\to x = \frac{13\,584 \cdot 105\,427,59}{98\,891,52} = 14\,481,81 \approx 14\,482 \text{ vehículos}$$

Se estima que el martes pasaron 14 482 vehículos.

5 **La tabla informa del precio (€) de ciertas piedras preciosas según su masa (quilates):**

QUILATES	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5
€	375	560	1 265	2 850	6 500	14 500

Está claro que, a más masa, más precio, pero… ¿se trata de una relación de proporcionalidad? Explica tu respuesta.

Calculamos las razones entre cada par de datos y las comparamos:

$$\frac{0,25}{375} = \frac{1}{1\,500} \neq \frac{0,5}{560} = \frac{1}{1\,120} \neq \frac{1}{1\,265} \neq \frac{1,5}{2\,850} = \frac{1}{1\,900} \neq \frac{2}{6\,500} = \frac{1}{3\,250} \neq$$

$$\neq \frac{2,5}{14\,500} = \frac{1}{5\,800}$$

No se trata de una relación de proporcionalidad, pues las razones de proporcionalidad entre los pares de datos son diferentes.

Página 61

6 **Resuelve mentalmente. Si no sale, utiliza lápiz y papel.**

a) Alberto tiene un álbum de fotos, de 30 páginas, con 4 fotos en cada página. ¿Cuántas páginas habría ocupado colocando 6 fotos en cada una?

b) Una granjera tiene pienso para alimentar a sus 8 terneros durante 30 días. ¿Cuánto le duraría el pienso si fueran 10 terneros?

c) Una cuadrilla de 10 personas recolecta un huerto de frutales en 6 horas. ¿Cuántas horas habrían tardado con una persona menos?

d) Para servir un pedido de pañuelos, un taller de confección prepara 36 cajas con 15 pañuelos en cada una. ¿Cuántas habría necesitado si hubiera puesto 20 pañuelos en cada caja?

e) Un grifo con un caudal de tres litros por segundo llena un depósito en 12 horas. ¿Cuál debería ser el caudal para llenar el depósito en solo 9 horas?

f) Una ciclista, a 10 km/h, tarda 30 minutos en ir desde su casa al pueblo vecino.

¿Cuánto tardaría si fuera a 15 km/h?

¿A qué velocidad debería ir para cubrir ese mismo recorrido en 40 minutos?

a) $(30 \cdot 4) : 6 = 20$ páginas

b) $(8 \cdot 30) : 10 = 24$ días

c) $(10 \cdot 6) : (10 - 1) = 60 : 9 = \frac{60}{9} = 6 + \frac{2}{3} = 6$ horas y 40 min

d) $(36 \cdot 15) : 20 = 540 : 20 = 27$ cajas

e) $(12 \cdot 3) : 9 = 4$ litros por segundo

f) $(10 \cdot 30) : 15 = 20$ minutos

$(10 \cdot 30) : 40 = 7{,}5$ km/h

7 **Un granjero envasa su producción de huevos en 150 cajas de 10 unidades. ¿Cuántas cajas habría necesitado si hubieran sido de 12 unidades?**

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ huevos} \ \rightarrow \ 150 \text{ cajas} \\ 12 \text{ huevos} \ \rightarrow \ x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{10} = \frac{150}{x} \rightarrow x = \frac{150 \cdot 10}{12} = 125 \text{ cajas}$$

Habría necesitado 125 cajas.

8 **Una empresa de fruta compra 1 700 kg de manzanas a 0,40 €/kg. ¿Cuántos kilos habría podido adquirir con el mismo presupuesto pagando las manzanas a 35 céntimos el kilo?**

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}40 \text{ €/kg} \ \rightarrow \ 1700 \text{ kg} \\ 0{,}35 \text{ €/kg} \ \rightarrow \ x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{0{,}35}{0{,}40} = \frac{1700}{x} \rightarrow x = \frac{1700 \cdot 0{,}40}{0{,}35} = 1\,942{,}86 \text{ kg de manzanas}$$

Con el mismo presupuesto habría podido adquirir 1 942,86 kg

9 **Un camión, a 80 km/h, realiza un trayecto en cuatro horas y media. ¿Qué velocidad debería llevar para hacer el trayecto en cuatro horas?**

$$\left.\begin{array}{l} 80 \text{ km/h} \ \rightarrow \ 4{,}5 \text{ horas} \\ \quad x \quad\ \ \rightarrow \ 4 \text{ horas} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4}{4{,}5} = \frac{80}{x} \rightarrow x = \frac{80 \cdot 4{,}5}{4} = 90 \text{ km/h}$$

Debería llevar una velocidad de 90 km/h.

10 **En un pueblo agrícola, que padece sequía, cada regante tiene asignada una cuota fija de agua. Un hortelano hace esta cuenta: si riego mi huerta completa, tengo agua para 60 días. ¿Podrá regar todo el verano si solo riega las tres cuartas partes?**

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \text{ huerta} & \rightarrow 160 \text{ días} \\ \frac{3}{4} \text{ de huerta} & \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{60}{x} \rightarrow x = \frac{60}{\frac{3}{4}} = 60 : \frac{3}{4} = (60 : 3) \cdot 4 = 80 \text{ días}$$

Si riega las tres cuartas partes del huerto tendría agua para 80 días, por tanto, no podría regar todo el verano.

11 **La tabla informa de los puntos que se obtienen en un juego de ordenador según los fallos cometidos:**

FALLOS	0	1	2	3	4 o más
PUNTOS	1 000	500	100	10	0

A más fallos, menos puntos, pero… ¿se trata de una relación de proporcionalidad? Explica tu respuesta.

No, no es una relación de proporcionalidad porque $0 \cdot 1\,000 \neq 1 \cdot 500 \neq 2 \cdot 100 \neq 3 \cdot 10$.

3 PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Página 62

Resuelve

- **Transportar 1 kg a 1 km cuesta 0,032 €.**
- **Transportar 15 kg a 1 km cuesta … euros.**
- **Transportar 15 kg a 120 km cuesta … euros.**

- Transportar 15 kg a 1 km cuesta $15 \cdot 0{,}032 = 0{,}48$ euros.
- Transportar 15 kg a 120 km cuesta $(15 \cdot 0{,}032) \cdot 120 = 57{,}60$ euros.

Resuelve

- **Un caballo, con un kilo de pienso, come 0,8 días.**
- **Un caballo, con 450 kilos de pienso, come … días.**
- **18 caballos, con 450 kilos de pienso, comen … días.**

- Un caballo, con 450 kilos de pienso, come $450 \cdot 0{,}8 = 360$ días.
- 18 caballos, con 450 kilos de pienso, comen $(450 \cdot 0{,}8) : 18 = 20$ días.

Página 63

Resuelve

- **Una pala, trabajando una hora al día, tarda 180 días.**
- **Una pala, trabajando 12 horas al día, tarda … días.**
- **Tres palas, trabajando 12 horas al día, tardan … días.**

- Una pala, trabajando 12 horas al día, tarda 180 : 12 = 15 días.
- Tres palas, trabajando 12 horas al día, tardan (180 : 12) : 13 = 5 días

1 Resuelve mentalmente.

a) Dos operarias pintan 12 metros de pared en tres horas. ¿Cuántos metros pintan cuatro operarias en tres horas?

¿Y cuatro operarias en una hora?

b) Para alimentar a 12 vacas durante 4 días, se necesitan 4 cargas de heno. ¿Cuántas cargas se necesitan para alimentar a 6 vacas durante 8 días?

c) Tres máquinas cosechadoras, trabajando jornadas de 10 horas, recolectan un campo de cebada en 4 días. ¿Cuántas horas al día deberían trabajar para hacer el trabajo en solo dos días?

¿Y para hacerlo en dos días con cuatro máquinas?

a) Cuatro operarios pintan (4 : 2) · 12 = 24 m de pared en 3 horas. Y, en una hora pintan 24 : 3 = 8 m de pared.

b) Para alimentar a una vaca durante un día se necesita (4 : 12): 3 = $\frac{1}{9}$ de carga de heno.

Por tanto, para alimentar a 6 vacas durante 8 días se necesitan $\frac{1}{9} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{16}{3}$ cargas.

c) Para hacer el trabajo en solo dos días debería trabajar 10 · 2 = 20 horas al día.

P. INVERSA — P. INVERSA

Máquinas	Horas	Días
3	10	4
4	x	2

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{10}{x} \to x = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15 \text{ horas}$$

Y, para hacerlo en cuatro días con cuatro máquinas, deberían trabajar 15 horas al día.

2 500 gallinas, en una semana, han dado una producción de 3 045 huevos. ¿Qué producción se puede esperar de 700 gallinas en 15 días?

P. DIRECTA — P. DIRECTA

Gallinas	Días	Huevos
500	7	3 045
700	15	x

$$\frac{500}{700} \cdot \frac{7}{15} = \frac{3\,045}{x} \to x = \frac{3\,045 \cdot 700 \cdot 153}{500 \cdot 7} = 9\,135 \text{ huevos}$$

Con 700 gallinas en 15 días, se producirán 9135 huevos.

3 **Un vehículo, a la velocidad de 3 m/s, da 14 vueltas a un circuito en 4 horas. ¿Cuántas vueltas dará a ese mismo circuito, en 6 horas, si va a una velocidad de 5 metros por segundo?**

P. DIRECTA — P. DIRECTA

m/s	Vueltas	Horas
3	14	4
5	x	6

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{14}{x}\ \rightarrow\ x=\frac{14\cdot 5\cdot 6}{3\cdot 4}=35 \text{ vueltas}$$

A 5m/s durante 6 horas, dará 35 vueltas a ese mismo circuito.

4 **Para alimentar a 250 terneros durante un mes, se necesitan 240 sacos de leche en polvo de 40 kilos. ¿Cuántos sacos de 25 kilos, de ese mismo producto, se necesitarían para alimentar a 100 terneros durante el mismo tiempo?**

P. DIRECTA — P. INVERSA

Terneros	Sacos	kg/saco
250	240	40
100	x	25

$$\frac{250}{100}\cdot\frac{25}{40}=\frac{240}{x}\ \rightarrow\ x=\frac{240\cdot 100\cdot 40}{250\cdot 25}=153{,}6 \text{ sacos}$$

Para alimentar a 100 terneros con sacos de 25 kg se necesitan 154 sacos.

5 **18 personas invierten 18 horas de trabajo en cosechar un huerto de melocotones de 2,1 hectáreas. ¿Cuántas personas habrá que contratar para recolectar otro huerto de similares características, con una superficie de 3,5 hectáreas, si se desea realizar la cosecha en 20 horas?**

P. DIRECTA
P. INVERSA

Personas	Horas	Hectáreas
18	18	2,1
x	20	3,5

$$\frac{18}{x}=\frac{20}{18}\cdot\frac{2{,}1}{3{,}5}\ \rightarrow\ x=\frac{18\cdot 18\cdot 3{,}5}{20\cdot 2{,}1}=27 \text{ personas}$$

Para recolectar 3,5 hectáreas en 20 horas habrá que contratar a 27 personas.

6 **Tres bocas de riego, con un caudal de 15 litros/segundo, llenan el depósito de abastecimiento de agua de una población en 45 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el depósito si los grifos tuvieran un caudal de 1,8 litros/segundo y se abrieran solo dos grifos?**

P. INVERSA
P. INVERSA

Bocas de riego	Caudal (*l*/s)	Tiempo (min)
3	15	45
2	1,8	x

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1,8}{15} = \frac{45}{x} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 15 \cdot 3}{2 \cdot 1,8} = 562,5 \text{ min} = 9 \text{ horas y } 22,5 \text{ minutos}$$

El depósito tardaría en llenarse 9 horas y 22,5 minutos

7 **Una granja necesita 50 pacas de alfalfa para alimentar a 85 vacas durante 30 días.**

a) ¿Cuántas pacas necesita para alimentar a 20 vacas durante 45 días?

b) ¿Cuántos días podrá alimentar a 25 vacas con 35 pacas?

a)

P. DIRECTA
P. DIRECTA

Pacas de alfalfa	Vacas	Días
50	85	30
x	20	45

$$\frac{50}{x} = \frac{85}{20} \cdot \frac{30}{45} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 20 \cdot 45}{85 \cdot 30} = 17,65 \text{ pacas}$$

Necesitará 18 pacas de alfalfa para alimentar a 20 vacas durante 45 días.

b)

P. DIRECTA
P. INVERSA

Pacas de alfalfa	Vacas	Días
50	85	30
35	25	x

$$\frac{50}{35} \cdot \frac{25}{85} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 35 \cdot 85}{50 \cdot 25} = 71,4 \text{ días}$$

Podrá alimentar a 25 vacas con 35 pacas durante 71,4 días.

8 **Una población de 50 000 habitantes consume 150 000 m^3 de agua en cuatro meses.**

a) ¿Cuántos metros cúbicos se prevé que consumirá en tres meses otra población, de características similares, con 40 000 habitantes?

b) ¿Para cuántos meses tiene asegurado el abastecimiento de agua una población de 40 000 habitantes que tiene unas reservas de 90 000 m^3?

a)

P. DIRECTA — P. DIRECTA

Habitantes	Agua (m^3)	Meses
50 000	150 000	4
40 000	x	3

$$\frac{150\,000}{x} = \frac{50\,000}{40\,000} \cdot \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{150\,000 \cdot 40\,000 \cdot 3}{50\,000 \cdot 4} = 90\,000 \text{ m}^3 \text{ de agua}$$

Se prevé que se consumirán 90 000 m^3 de agua.

b)

P. INVERSA

P. DIRECTA

Habitantes	Agua (m^3)	Meses
50 000	150 000	4
40 000	90 000	x

$$\frac{40\,000}{50\,000} \cdot \frac{150\,000}{90\,000} = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 50\,000 \cdot 90\,000}{40\,000 \cdot 150\,000} = 3 \text{ meses}$$

Durante 3 meses tendrán el abastecimiento asegurado.

4 PORCENTAJES

Página 64

Resuelve con una regla de tres

- $\left.\begin{array}{l}\textbf{De 100 … hay reservadas … 88}\\ \textbf{De } \boldsymbol{x} \textbf{ … hay reservadas … 418}\end{array}\right\}$
- $\rightarrow x = \dfrac{100 \cdot 418}{88} = 475$

Página 65

Resuelve con una regla de tres

- $\left.\begin{array}{l}\textbf{De 475 … hay reservadas … 418}\\ \textbf{De 100 … hay reservadas …} \boldsymbol{x}\end{array}\right\}$
- $\to x = \dfrac{100 \cdot 418}{475} = 88$

1 **Escribe el número decimal asociado a cada porcentaje:**

a) 29 % **b) 83 %** **c) 7 %**
d) 2 % **e) 3,5 %** **f) 130 %**
g) 165 % **h) 200 %** **i) 350 %**

a) 29 % = 0,29 b) 83 % = 0,83 c) 7 % = 0,07
d) 2 % = 0,02 e) 3,5 % = 0,035 f) 130 % = 1,3
g) 165 % = 1,65 h) 200 % = 2 i) 350 % = 3,5

2 **¿Qué porcentaje asocias a cada uno de estos números decimales?**

a) 0,25 **b) 0,44** **c) 0,05**
d) 0,064 **e) 1,7** **f) 1,80**
g) 1,06 **h) 2,5** **i) 3,01**

a) 0,25 = 25 % b) 0,44 = 44 % c) 0,05 = 5 %
d) 0,064 = 6,4 % e) 1,7 = 170 % f) 1,80 = 180 %
g) 1,06 = 106 % h) 2,5 = 250 % i) 3,01 = 301 %

3 **Calcula mentalmente.**

a) 50 % de 428 **b) 75 % de 444** **c) 10 % de 63**
d) 40 % de 250 **e) 150 % de 150** **f) 150 % de 64**

a) 50 % de 428 = 214 b) 75 % de 444 = 333 c) 10 % de 63 = 6,3
d) 40 % de 250 = 100 e) 150 % de 150 = 225 f) 150 % de 64 = 96

4 **Calcula.**

a) 22 % de 1 450 **b) 58 % de 120** **c) 2,5 % de 140**
d) 11 % de 416 **e) 14 % de 2 380** **f) 120 % de 685**

a) 22 % de 1450 = $\dfrac{22 \cdot 1450}{100} = 319$ b) 58 % de 120 = $\dfrac{58 \cdot 120}{100} = 69{,}6$

c) 2,5 % de 140 = $\dfrac{2{,}5 \cdot 140}{100} = 3{,}5$ d) 11 % de 416 = $\dfrac{11 \cdot 416}{100} = 45{,}76$

e) 14 % de 2 380 = $\dfrac{14 \cdot 2\,380}{100} = 333{,}2$ f) 120 % de 685 = $\dfrac{120 \cdot 685}{100} = 822$

5 Calcula aproximando a las décimas.

a) 27 % de 41 **b) 42 % de 216** **c) 79 % de 348**

d) 14,8 % de 146 **e) 5,3 % de 324** **f) 112 % de 56**

a) 27 % de 41 = $\dfrac{27 \cdot 41}{100}$ = 11,07 ≈ 11,1

b) 42 % de 216 = $\dfrac{42 \cdot 216}{100}$ = 90,72 ≈ 90,7

c) 79 % de 348 = $\dfrac{79 \cdot 348}{100}$ = 274,92 ≈ 274,9

d) 14,8 % de 146 = $\dfrac{14{,}8 \cdot 146}{100}$ = 21,608 ≈ 21,6

e) 5,3 % de 324 = $\dfrac{5{,}3 \cdot 324}{100}$ = 17,172 ≈ 17,2

f) 112 % de 56 = $\dfrac{112 \cdot 56}{100}$ = 62,72 ≈ 62,7

6 En una población que tiene 30 000 habitantes, el 27 % de ellos puede acceder a Internet desde su propio domicilio. ¿Cuántos habitantes disfrutan de dicho servicio?

$$27\,\% \text{ de } 30\,000 \text{ habitantes} = \frac{27 \cdot 30\,000}{100} = 8\,100 \text{ habitantes}$$

8 100 habitantes disfrutan de internet en su domicilio.

7 Una jugadora de baloncesto ha lanzado 18 veces a canasta y ha encestado 13. ¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

$$\left.\begin{array}{r} \text{Ha encestado … } 13 \text{ de } 18 \\ x \text{ de } 100 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{13 \cdot 100}{18} = 72{,}2\,\%$$

La jugadora de baloncesto acierta un 72,2 % de las veces.

8 Un comerciante del mercadillo abre su puesto, por la mañana, con 350 pares de calcetines y 240 pañuelos. Al cerrar, al mediodía, le quedan 210 pares de calcetines y 174 pañuelos. ¿Qué tanto por ciento ha vendido de cada mercancía?

Al cerrar, ha vendido 350 – 210 = 140 pares de calcetines y 240 – 174 = 66 pañuelos.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Ha vendido … } 140 \text{ de } 350 \\ x \text{ de } 100 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{140 \cdot 100}{350} = 40\,\%$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Ha vendido … } 66 \text{ de } 240 \\ x \text{ de } 100 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{66 \cdot 100}{240} = 27{,}5\,\%$$

El comerciante ha vendido 40 % de calcetines y 27,5 % de pañuelos.

9 Según las estadísticas de cierta región, el 44 % de los accidentes de tráfico tienen relación con el consumo de alcohol u otras drogas. ¿En cuántos de los 987 accidentes registrados el trimestre pasado se encontró presencia de alcohol u otro tipo de drogas?

$$44\,\% \text{ de } 987 = \frac{44 \cdot 987}{100} = 434{,}28 \text{ accidentes}$$

Se encontró presencia de alcohol u otro tipo de drogas en 434 accidentes.

10 **Por el control del peaje de una autopista han pasado hoy 322 camiones, lo que supone un 18,4 % del total de vehículos contabilizados. ¿Cuántos vehículos han pasado hoy ese control?**

Vehículos que han pasado hoy el control $\rightarrow x$

$$18{,}4\,\% \text{ de } x = 322 \rightarrow x = \frac{322 \cdot 100}{18{,}4} = 1\,750$$

Hoy han pasado ese control 1 750 vehículos.

11 **Un portero de balonmano ha recibido en un partido 21 goles, con un porcentaje de paradas del 58 %. ¿Cuántos tiros le han lanzado?**

Tiros que le han lanzado al portero $\rightarrow x$

$$42\,\% \text{ de } x = 21 \rightarrow x = \frac{21 \cdot 100}{42} = 50$$

Durante el partido han lanzado 50 tiros al portero.

12 **Un *ferry* presta su servicio de enlace entre dos ciudades costeras. De las 8 340 personas transportadas este mes, 2 650 eran turistas foráneos, y el resto, residentes en la zona. ¿Qué porcentaje de quienes utilizan el *ferry* reside en la zona?**

Los usuarios del ferry que residen en la zona son 8 340 – 2 650 = 5 690 personas.

$$\left.\begin{array}{l} \text{De } 8\,340 \ldots \text{ son residentes} \ldots 5\,690 \\ \text{De } 100 \ldots \text{ son residentes} \ldots x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{5\,690 \cdot 100}{8\,340} = 68{,}23\,\%$$

El 68,23 % de los usuarios del ferry reside en la zona.

13 **El 67 % del aceite que vende un supermercado es de oliva; el 21 %, de girasol, y el resto, de soja. Si se han vendido 132 litros de soja, ¿qué cantidad se ha vendido de las otras dos clases?**

El porcentaje de aceite de soja que se ha vendido es un 100 % – (67 % + 21 %) = 12 %.

Litros totales de aceite $\rightarrow x$

$$12\,\% \text{ de } x = 132 \rightarrow x = \frac{132 \cdot 100}{12} = 1\,100$$

En total hay 1 100 litros de aceite entre todas las clases.

$$21\,\% \text{ de } 1\,100 = \frac{21 \cdot 1100}{100} = 231$$

$$67\,\% \text{ de } 1\,100 = \frac{67 \cdot 1100}{100} = 737$$

Se han vendido 737 litros de aceite de oliva y 231 litros de aceite de girasol.

14 **De las 635 ovejas que tiene un rebaño, 286 de ellas dieron a luz un corderito en la pasada primavera. ¿Qué tanto por ciento de las ovejas del rebaño tuvieron un corderito la última primavera?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{De } 635 \ldots \text{ dieron a luz} \ldots 286 \\ \text{De } 100 \ldots \text{ dieron a luz} \ldots x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{286 \cdot 100}{635} = 45{,}04\,\%$$

Un 45 % de las ovejas dieron a luz a un corderito la última primavera.

5 AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Página 66

Resuelve mentalmente

- **¿Qué obtengo al…**

a) … aumentar 80 en un 10 %? **b) … aumentar 300 en un 15 %?**

c) … aumentar 50 en un 60 %? **d) … aumentar 500 en un 20 %?**

- a) $80 \cdot 1,1 = 88$ b) $300 \cdot 1,15 = 345$

c) $50 \cdot 1,6 = 80$ d) $500 \cdot 1,2 = 600$

Resuelve mentalmente

- **¿Qué obtengo al…**

a) … disminuir 60 en un 10 %? **b) … disminuir 200 en un 15 %?**

c) … disminuir 10 en un 60 %? **d) … disminuir 500 en un 20 %?**

- a) $60 \cdot 0,9 = 54$ b) $200 \cdot 0,85 = 170$

c) $10 \cdot 0,4 = 4$ d) $500 \cdot 0,8 = 400$

Página 67

Resuelve mentalmente

- **Me gasto 5 € en una entrada para el cine, lo que supone el 25 % de mi paga. ¿Cuál es mi paga completa?**
- (5 : 25) · 100 = 20

  Mi paga completa son 20 €.

Resuelve mentalmente

- **Pago 9 € por una camiseta que costaba 12 €. ¿Qué tanto por ciento me han rebajado?**
- (9 : 12) = 0,75

  Me han rebajado un 25 %.

1 **Un jugador juvenil de baloncesto mide 1,87 m y aún espera crecer un 10 % más. ¿Cuánto espera medir cuando esté en el campeonato sénior?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \to 1{,}87\ \text{m}\\ \text{Índice de variación} \to 1{,}1\\ \text{Cantidad final} \to x\end{array}\right\}\ x = 1{,}87 \cdot 1{,}1 = 2{,}057$$

Cuando esté en el campeonato senior, medirá 2,057 m.

2 **Un bosque, que tenía el año pasado medio millón de árboles aproximadamente, ha sufrido un incendio en el último verano que ha arrasado el 30 % de su superficie. ¿Cuántos árboles quedan en el bosque, aproximadamente?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \to 500\,000\ \text{árboles}\\ \text{Índice de variación} \to 0{,}7\\ \text{Cantidad final} \to x\end{array}\right\}\ x = 500\,000 \cdot 0{,}7 = 350\,000$$

En el bosque quedan aproximadamente 350 000 árboles.

3 **A una asalariada, que ganaba 1 400 euros al mes, le suben el suelo un 5 %. ¿Cuánto ganará a partir de ahora?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \to 1\,400\ \text{€}\\ \text{Índice de variación} \to 1{,}05\\ \text{Cantidad final} \to x\end{array}\right\}\ x = 1\,400 \cdot 1{,}05 = 1\,470$$

A partir de ahora ganará 1 470 euros.

4 **Un centro escolar, que tenía el curso pasado 780 alumnas y alumnos, ha registrado este año un descenso de su matrícula de un 10 %. ¿Cuántos alumnos y alumnas se han matriculado este año?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \to 780\ \text{alumnos}\\ \text{Índice de variación} \to 0{,}9\\ \text{Cantidad final} \to x\end{array}\right\}\ x = 780 \cdot 0{,}9 = 702$$

Este año se han matriculado 702 alumnos y alumnas.

5 **Una empresa facturó el año pasado 2,8 millones de euros, y este año, 3,5 millones. ¿En qué tanto por ciento ha aumentado la facturación respecto al año pasado?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow 2{,}8 \text{ millones}\\ \text{Índice de variación} \rightarrow x\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 3{,}5 \text{ millones}\end{array}\right\} 2\,800\,000 \cdot x = 3\,500\,000 \rightarrow x = 1{,}25$$

La facturación ha aumentado un 125 % – 100 % = 25 % respecto al año pasado.

6 **Un estudio sobre la población de buitres leonados en la comarca informa de que en la actualidad hay 180 parejas, lo que supone un descenso de un 35 % respecto a la población de hace veinticinco años. ¿Cuál era la población hace veinticinco años?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow x\\ \text{Índice de variación} \rightarrow 0{,}65\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 360 \text{ ejemplares}\end{array}\right\} x \cdot 0{,}65 = 360 \rightarrow x = 553{,}8$$

Hace veinticinco años había 554 buitres leonados.

7 **Una persona gruesa, que pesaba 110 kg, se pone a régimen por orden del médico, y en dos meses baja a 95 kg. ¿Qué tanto por ciento del peso ha perdido?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow 110 \text{ kg}\\ \text{Índice de variación} \rightarrow x\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 95 \text{ kg}\end{array}\right\} 110 \cdot x = 95 \rightarrow x = 0{,}86 \rightarrow 86\,\%$$

Ha perdido un 100 % – 86 % = 14 % de su peso.

8 **Marta comprueba que, tras una salida de vacaciones de varios días, el saldo de su cuenta ha descendido un 15 %, quedando en 3 179 €. ¿Cuál era el saldo antes de los días de descanso?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow x\\ \text{Índice de variación} \rightarrow 0{,}85\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 3\,179\text{ €}\end{array}\right\} x \cdot 0{,}85 = 3\,179 \rightarrow x = 3\,740$$

Antes de los días de descanso el saldo de Marta era de 3 740 €.

9 **Un edificio, presupuestado inicialmente en un millón y medio de euros, costó finalmente dos millones cien mil euros. ¿En qué tanto por ciento el coste real superó al presupuestado?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow 1{,}5 \text{ millones}\\ \text{Índice de variación} \rightarrow x\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 2{,}1 \text{ millones}\end{array}\right\} 1\,500\,000 \cdot x = 2\,100\,000 \rightarrow x = 1{,}4$$

El coste real superó en un 140 % – 100 % = 40 % al presupuestado.

10 **El litro de gasolina ha subido un 2,5 % al inicio del periodo estival, llegando a 1,54 € el litro. ¿Cuál era el precio de la gasolina antes de la subida?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow x\\ \text{Índice de variación} \rightarrow 1{,}025\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 1{,}54\text{ €}/l\end{array}\right\} x \cdot 1{,}025 = 1{,}54 \rightarrow x = 1{,}50$$

Antes de la subida, la gasolina costaba 1,50 €/*l*.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 68

Practica

Cálculo mental

1 **Reflexiona y responde.**

a) ¿Cuál es la razón de 6 y 9?

b) ¿Qué número está con 15 en razón de dos a cinco?

c) La razón de dos números es $\frac{2}{3}$. El segundo es 15. ¿Cuál es el primero?

a) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ b) 6 c) 10

2 **Copia y completa en tu cuaderno.**

	16	80	160	600
50 %	8			
25 %				
75 %		60		
10 %				
20 %			32	
1 %				6

	16	80	160	600
50 %	8	40	80	300
25 %	4	20	40	150
75 %	12	60	120	450
10 %	1,6	8	16	60
20 %	3,2	16	32	120
1 %	0,16	0,8	1,6	6

3 **Calcula el 30 % de los números de cada serie:**

a) 100 - 50 - 25 **b) 150 - 250 - 350**

c) 10 - 20 - 30 **d) 500 - 1 000 - 1 500**

a) 30 – 15 – 7,5 b) 45 – 75 – 105

c) 3 – 6 – 9 d) 150 – 300 – 450

4 **¿Cuál es el valor de x en cada caso?**

a) 50 % de x = 8 **b) 25 % de x = 15** **c) 75 % de x = 30**

d) 10 % de x = 40 **e) 5 % de x = 6** **f) 20 % de x = 10**

a) $x = 16$ b) $x = 60$ c) $x = 40$

d) $x = 400$ e) $x = 120$ f) $x = 50$

5 **Resuelve.**

a) Aumenta 60 en un 25 %.
b) Aumenta 250 en un 40 %.
c) Disminuye 380 en un 10 %.
d) Disminuye 300 en un 5 %.
e) Disminuye 400 en un 90 %.

a) $1,25 \cdot 60 = 75$
b) $1,4 \cdot 250 = 350$
c) $0,9 \cdot 380 = 342$
d) $0,95 \cdot 300 = 285$
e) $0,1 \cdot 400 = 40$

6 **¿Verdadero o falso?**

a) Multiplicar por 1,9 es aumentar un 9 %.
b) Multiplicar por 0,75 es rebajar un 25 %.
c) Calcular el 10 % es lo mismo que rebajar un 10 %.
d) Para disminuir un 1 %, se multiplica por 0,99.

a) Falso. Para un aumento del 9 % habría que multiplicar por 1,09.
b) Verdadero.
c) Falso. Para calcular el 10 % se multiplica por 0,1. Para rebajar un 10 % se multiplica por 0,9.
d) Verdadero.

Razones, proporciones y porcentajes

7 **Calcula tres pares de números…**

a) … que estén en razón de 4 a 7.
b) … que estén en razón de 7 a 4.
c) … cuya razón sea igual a 0,75.
d) … cuya razón sea 1,5.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) 4 y 7; 8 y 11; 12 y 21
b) 7 y 4; 14 y 8; 21 y 12
c) 3 y 4; 6 y 8; 9 y 12
d) 3 y 2; 6 y 4; 9 y 6

8 **Calcula la razón de las edades, los pesos y las estaturas de Diana y Hércules, levantadores de peso.**

	EDAD (años)	PESO (kg)	ALTURA (cm)
DIANA	28	65	160
HÉRCULES	21	78	180

Edad $\rightarrow \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$ Peso $\rightarrow \frac{65}{78} = \frac{5}{6}$ Altura $\rightarrow \frac{160}{180} = \frac{8}{9}$

9 **Copia y completa las siguientes tablas en tu cuaderno, teniendo en cuenta que las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales y que las magnitudes *P* y *Q* son inversamente proporcionales:**

A	1	2	3	6	10	40
B		3				

P	1	2	3	6	10	40
Q		30				

A	1	2	3	6	10	40
B	1,5	3	4,5	9	15	60

Cálculos: $3 : 2 = 1{,}5$; $1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$; $1{,}5 \cdot 6 = 9$; $1{,}5 \cdot 10 = 15$; $1{,}5 \cdot 40 = 60$

P	1	2	3	6	10	40
Q	60	30	20	10	6	1,5

Cálculos: $30 \cdot 2 = 60$; $60 : 3 = 20$; $60 : 6 = 10$; $60 : 10 = 6$; $60 : 40 = 1{,}5$

10 **Calcula cada término desconocido:**

a) $\frac{18}{40} = \frac{x}{24}$ **b)** $\frac{15}{21} = \frac{35}{x}$

c) $\frac{x}{56} = \frac{27}{63}$ **d)** $\frac{72}{x} = \frac{30}{45}$

a) $\frac{18}{40} = \frac{x}{24} \rightarrow x = \frac{18 \cdot 24}{40} = \frac{432}{40} = \frac{54}{5}$

b) $\frac{15}{21} = \frac{35}{x} \rightarrow x = \frac{21 \cdot 35}{15} = \frac{735}{15} = 49$

c) $\frac{x}{56} = \frac{27}{63} \rightarrow x = \frac{56 \cdot 27}{63} = \frac{1\,512}{63} = 24$

d) $\frac{72}{x} = \frac{30}{45} \rightarrow x = \frac{72 \cdot 45}{30} = \frac{3\,240}{30} = 108$

11 **Escribe el número decimal asociado a cada porcentaje:**

a) 87 % **b) 16 %** **c) 1 %** **d) 9 %**
e) 2,6 % **f) 14,4 %** **g) 138 %** **h) 215 %**

a) 87 % = 0,87 b) 16 % = 0,16 c) 1 % = 0,01 d) 9 % = 0,09
e) 2,6 % = 0,026 f) 14,4 % = 0,144 g) 138 % = 1,38 h) 215 % = 2,15

12 **¿Qué porcentaje asocias a cada número decimal?**

a) 0,23 **b) 0,04** **c) 0,048** **d) 0,146**
e) 1,25 **f) 1,05** **g) 1,1** **h) 2,00**

a) 23 % b) 4 % c) 4,8 % d) 14,69 %
e) 125 % f) 105 % g) 110 % h) 200 %

13 **Copia y completa esta tabla en tu cuaderno:**

50 %	25 %		10 %	5 %		1 %
1/2		3/4			1/5	

50 %	25 %	75 %	10 %	5 %	20 %	1 %
1/2	1/4	3/4	1/10	1/20	1/5	1/100

14 **Calcula.**

a) 25 % de 3 574 **b) 7 % de 930**

c) 5,8 % de 600 **d) 17 % de 290**

e) 10 % de 14,90 **f) 150 % de 2 300**

a) 25 % de 3 574 = $\frac{25 \cdot 3574}{100}$ = 893,5

b) 7 % de 930 = $\frac{7 \cdot 930}{100}$ = 65,1

c) 5,8 % de 600 = $\frac{5{,}8 \cdot 600}{100}$ = 34,8

d) 17 % de 290 = $\frac{17 \cdot 290}{100}$ = 49,3

e) 10 % de 14,90 = $\frac{10 \cdot 14{,}90}{100}$ = 1,49

f) 150 % de 2 300 = $\frac{150 \cdot 2\,300}{100}$ = 3 450

15 **¿Qué porcentaje representa?**

a) 16 respecto a 200 **b) 18 respecto a 300**

c) 120 respecto a 400 **d) 25 respecto a 500**

e) 45 respecto a 150 **f) 21 respecto a 350**

g) 294 respecto a 840 **h) 448 respecto a 1 400**

a) 16 : 200 = 0,08 → 8 %

b) 18 : 300 = 0,06 → 6 %

c) 120 : 400 = 0,3 → 30 %

d) 25 : 500 = 0,05 → 5 %

e) 45 : 150 = 0,3 → 30 %

f) 21 : 350 = 0,06 → 6 %

g) 294 : 840 = 0,35 → 35 %

g) 448 : 1 400 = 0,32 → 32 %

Página 69

Resuelve problemas

16 Reflexiona y calcula.

a) Los sueldos de Borja y Silvia están en razón de 8 a 9. Silvia gana 1 908 €. ¿Cuánto gana Borja?

b) Ayer jugué un partido de baloncesto. La razón entre la duración oficial del partido (40 minutos) y el tiempo real, contando descansos, tiempos muertos, etc., fue de 4 a 7. ¿Cuánto duró realmente el partido?

a) $\frac{8}{9} = \frac{x}{1908} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 1908}{9} = 1696$

Borja gana 1 696 €.

b) $\frac{4}{7} = \frac{40}{x} \rightarrow x = \frac{40 \cdot 7}{4} = 70$

El partido duró 70 minutos en realidad.

17 ¡En una población de 350 000 habitantes se venden 82 500 periódicos cada día. Estima el número de periódicos que se venderán en otra población de características similares con 275 000 habitantes.

Es una relación de proporcionalidad directa.

$$\left.\begin{array}{lcl} 350\,000 \text{ habitantes} & \rightarrow & 82500 \text{ periódicos} \\ 275\,000 \text{ habitantes} & \rightarrow & x \end{array}\right\}$$

$$\frac{350\,000}{275\,000} = \frac{82\,500}{x} \rightarrow x = \frac{275\,000 \cdot 85\,000}{350\,000} = 64\,821{,}43 \approx 64\,821 \text{ periódicos}$$

En una población de características similares con 270 000 habitantes se venderán unos 64 821 periódicos.

18 Veinticinco vacas comen una carga de heno en 12 días. ¿Durante cuánto tiempo abastecerá de heno esa misma carga a 30 vacas?

Es una relación de proporcionalidad inversa.

$$\left.\begin{array}{lcl} 25 \text{ vacas} & \rightarrow & 12 \text{ días} \\ 30 \text{ vacas} & \rightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{30}{25} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 25}{30} = 10$$

Esa misma carga de heno podrá abastecerlas durante 10 días.

19 Una empresa de transporte cobra, por cada envío, un tanto fijo más una cantidad por kilogramo. Si por un paquete de 7 kg cobra 23,40 €, y por uno de 10 kg cobra 30 €, ¿cuánto cuesta un envío de 5 kg?

Si restamos ambos costes, obtenemos lo que cuesta transportar 3 kilos sin el coste fijo:

$$30 - 23{,}40 = 6{,}6 \text{ €}$$

Cada kilo cuesta $\rightarrow$ 6,6 : 3 = 2,2 €

Coste fijo $\rightarrow$ 30 – 10 ·2,2 = 30 – 22 = 8 €

Por tanto, transportar un envío de 5 kg tendrá un coste de costará 8 + 2,2 ·5 = 8 + 11 =19 €.

20 **Un tren de mercancías, a una media de 70 km/h, cubre un recorrido en 2 h 24 min. ¿Cuál ha sido la velocidad media de otro tren que ha hecho el mismo recorrido en 2 h 48 min?**

$2\ h\ 24\ min = \left(2 + \frac{24}{60}\right) h = (2 + 0{,}4)\ h = 2{,}4\ h$

$$2 \text{ horas y } 24 \text{ min} = 2 + \frac{24}{60} = 2{,}4 \text{ horas}$$

$$2 \text{ horas y } 48 \text{ min} = 2 + \frac{48}{60} = 2{,}8 \text{ horas}$$

Es una relación de proporcionalidad inversa.

$$\left.\begin{array}{lcl} 70 \text{ km/h} & \rightarrow & 2{,}4 \text{ h} \\ x & \rightarrow & 2{,}8 \text{ h} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{70}{x} = \frac{2{,}8}{2{,}4} \rightarrow x = \frac{2{,}4 \cdot 70}{2{,}8} = 60 \text{ km/h}$$

La velocidad media habrá sido de 60 km/h.

21 **Una industria harinera comercializa sus productos en sacos de dos tamaños. La capacidad de un saco pequeño equivale a 2/3 de la capacidad de uno grande. ¿Cuántos sacos pequeños necesita para envasar la producción de un día, si cuando lo hace en los grandes utiliza 850 unidades?**

Un saco grande equivale a 3/2 sacos pequeños.

Por tanto, 850 sacos grandes equivalen a $850 \cdot \frac{3}{2} = 1\,275$ sacos pequeños.

La industria harinera necesita 1 275 sacos pequeños.

22 **Tres compañeros de piso pagan los gastos de agua de forma proporcional a lo que usan la ducha. Ana se ducha cada día; Pedro, cada 2 días, y Bego, cada 3. ¿Cómo tienen que repartirse el pago de los 23 € del recibo del agua?**

En 6 días, Ana se ducha 6 veces; Pedro, 3, y Bego, 2, que son en total 11 duchas. ¿Qué fracción del total debe pagar cada uno?

Ana debe pagar $\frac{6}{11}$ de 23 € = 12,55 €.

Pedro debe pagar $\frac{3}{11}$ de 23 € = 6,27 €.

Bego debe pagar $\frac{2}{11}$ de 23 € = 4,18 €.

23 **Un mayorista de frutas compra una partida de *k* kilos de manzanas a 0,40 €/kg. ¿Qué cantidad habría adquirido con el mismo presupuesto si las hubiera pagado a 0,30 €/kg?**

Es una relación de proporcionalidad inversa.

$$\left.\begin{array}{lcl} k \text{ kilos} & \rightarrow & 0{,}40\ € \\ x & \rightarrow & 0{,}30\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{k}{x} = \frac{0{,}30}{0{,}40} \rightarrow x = \frac{0{,}40 \cdot k}{0{,}30} = \frac{4}{3}k$$

El mayorista habría adquirido $\frac{4}{3}k$ si hubiera pagado las manzanas a 0,30 €/kg, es decir, un tercio más de manzanas.

24 **Un taller metalúrgico produce 4 800 tapacubos al día trabajando con cinco máquinas en dos turnos de 8 horas.**

a) ¿Cuántos tapacubos producirá cada día, si se añade una máquina más y se aumenta a 10 el número de horas de cada turno?

b) ¿Cuántas horas debería durar cada turno para cubrir un cupo de 7 320 piezas al día con seis máquinas en funcionamiento?

a)

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Tapacubos	Máquinas	Horas
4 800	5	8
x	6	10

$$\frac{4\,800}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{10} \to x = \frac{4\,800 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8} = 7\,200 \text{ tapacubos}$$

Cada día producirá 7 200 tapacubos.

b)

P. DIRECTA

P. INVERSA

Tapacubos	Máquinas	Horas
4 800	5	8
7 320	6	x

$$\frac{4\,800}{7\,320} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{x} \to x = \frac{8 \cdot 7\,320 \cdot 5}{4\,800 \cdot 6} = \frac{61}{6} = 10 \text{ horas y } 10 \text{ min}$$

Cada turno debería durar 10 horas y 10 min.

25 **En un comedor de empresa, con 113 comensales, se han consumido 840 yogures en 20 días laborables.**

¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales/día?

P. DIRECTA P. DIRECTA

Comensales	Yogures	Días
113	840	20
120	x	5

$$\frac{113}{120} \cdot \frac{20}{5} = \frac{840}{x} \to x = \frac{840 \cdot 5 \cdot 120}{113 \cdot 20} = 223 \text{ yogures}$$

Para los próximos cinco días el comedor de empresa necesitará 223 yogures, por tanto, 200 yogures no serán suficientes.

26 **Una piara de 23 cerdos se come, en 50 días, 2 990 kg de pienso. ¿Cuántos días durarán 6 240 kg de pienso a 75 cerdos?**

P. INVERSA P. DIRECTA

Cerdos	Días	Pienso
23	50	2 990
75	x	6 240

$$\frac{50}{x} = \frac{75}{23} \cdot \frac{2990}{240} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 23 \cdot 6240}{75 \cdot 2990} = 32 \text{ días}$$

El pienso durará 32 días.

27 **Para recoger las olivas de una finca, se necesitan 10 personas a 8 h al día durante 40 días. ¿Cuántos días tardarán 4 personas a 5 h diarias?**

P. INVERSA
P. INVERSA

Personas	Horas	Días
10	8	40
4	5	x

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{40}{x} \rightarrow x = \frac{40 \cdot 10 \cdot 8}{4 \cdot 5} = 160 \text{ días}$$

Tardarán 160 días.

28 **Para subir la temperatura de una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C, se han necesitado 18 228 cal.**

¿Cuantas calorías se necesitarán para subir una pieza de hierro de 3 480 g de 0 °C a 210 °C?

P. DIRECTA
P. DIRECTA

Peso	Aumento de °C	Calorías
1 240	140	18 228
3 480	210	x

$$\frac{1240}{3480} \cdot \frac{140}{210} = \frac{18228}{x} \rightarrow x = \frac{18228 \cdot 3480 \cdot 210}{1240 \cdot 140} = 76734 \text{ calorías}$$

Se necesitarán 76 734 calorías.

29 Resuelve.

a) Un ganadero vende el 20 % de su rebaño, que tenía 640 ovejas ¿Cuántas ovejas ha vendido?

$$640 \cdot 0{,}20 = x \rightarrow x = \ldots$$

b) Pablo tenía ahorrados 640 € y se ha gastado 128 € en un videojuego. ¿Qué tanto por ciento de sus ahorros ha gastado?

$$640 \cdot \frac{P}{100} = 128 \rightarrow P\,\% = \ldots$$

c) En un pueblo hay 128 menores de edad, lo que supone el 20 % de la población total. ¿Cuántos habitantes hay en total?

$$T \cdot 0{,}20 = 128 \rightarrow T = \ldots$$

a) $640 \cdot 0{,}20 = x \rightarrow x = 128$

Ha vendido 128 ovejas.

b) $640 \cdot \frac{P}{100} = 128 \rightarrow P\% = \frac{128}{640} \cdot 100 = 20$

Ha gastado un 20 % de sus ahorros.

c) $T \cdot 0{,}20 = 128 \rightarrow T = 128 : 0{,}20 = 640$

En total hay 640 habitantes.

Página 70

30 Dos sociedades tienen el 28,82 % y el 39,91 % de cierta compañía, y una tercera, el resto.

a) ¿Qué porcentaje tiene la tercera?

b) Si se han obtenido unos beneficios de 327 842 €, ¿cuánto le toca a la tercera?

a) $100 - 28{,}82 - 39{,}91 = 31{,}27$

La tercera sociedad tiene un 31,27 %

b) $327\,842 \cdot 0{,}3127 = 102\,516{,}20$ €

A la tercera sociedad le tocan 102 516,20 €

31 En un partido de baloncesto, el equipo de casa ha lanzado 52 tiros y ha encestado 39. El equipo visitante ha lanzado 45 veces y ha conseguido 35 canastas. ¿Cuál de los dos ha tenido mejor porcentaje de aciertos?

El equipo de casa:

$$\textit{De 52 tiros} \xrightarrow{\textit{encesta}} 39$$

$$\textit{De 100 tiros} \xrightarrow{\textit{encesta}} \ldots$$

El equipo de casa ha encestado 39 de 52 tiros $\to \dfrac{39}{52} \cdot 100 = 75\,\%$

El equipo visitante ha encestado 35 de 45 tiros $\to \dfrac{35}{45} \cdot 100 = 77{,}78\,\%$

El equipo de casa ha acertado un 75 % de las veces, y el equipo visitante ha acertado un 77,78 % de las veces, por tanto, han tenido mejor porcentaje de aciertos el equipo visitante.

32 La familia García ha pagado ya 39 de las mensualidades acordadas con la financiera para la compra de un coche. Así han abonado ya el 65 % del total. ¿Cuántas mensualidades quedan aún pendientes?

Ha pagado un 65 %, que son → 39 mensualidades

Le queda un … %, que son → … mensualidades

Mensualidades totales $\to x$

$$65\,\% \text{ de } x = 39 \to x = \frac{39 \cdot 100}{65} = 60$$

Quedan, aún pendientes, $60 - 39 = 21$ mensualidades.

33 En una población de 3 000 personas, 600 hacen deporte regularmente. ¿Qué porcentaje del total representan?

x % de 3 000 = 600

$\dfrac{600}{3000} = 0{,}2 \to 20\%$

Representan un 20 %

34 **Un cartero ha repartido el 36 % de las cartas que tenía. Si aún le quedan 1 184, ¿cuántas tenía antes de empezar el reparto?**

64 % de x = 1 184

100 – 36 = 64 → Se queda el 64 % por repartir, que son 1 184 cartas.

$0{,}64 \cdot x = 1\,184 \rightarrow x = 1\,184 : 0{,}64 = 1\,850$

Antes de empezar el reparto tenía 1 850 cartas.

35 **La tabla informa del caudal de un río, en m³/s, a lo largo de un semestre.**

E	F	M	A	My	J
5,2	5,9	6,5	8,3	9,1	6,3

Calcula la variación porcentual:

a) De enero a marzo. **b) Entre marzo y mayo.** **c) De mayo a junio.**

a) Índice de variación: $\dfrac{6{,}5}{5{,}2} = 1{,}25 \rightarrow$ Aumento del 25 %

b) Índice de variación: $\dfrac{9{,}1}{6{,}5} = 1{,}4 \rightarrow$ Aumento del 40 %

c) Índice de variación: $\dfrac{6{,}3}{9{,}1} = 0{,}69 \rightarrow$ Disminución del 31 %

36 **El parque de atracciones ha recibido en julio 18 300 visitantes, y en agosto, un 12 % más que en julio. ¿Cuántas personas han visitado el parque en agosto?**

Aumento de un 12 %:

Índice % → 100 % + 12 % = 112 % → 1,12

$C_{\text{inicial}} \cdot I_{\%} = C_{\text{final}}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow 18\,300 \text{ visitantes}\\ \text{Índice de variación} \rightarrow 1{,}12\\ \text{Cantidad final} \rightarrow x\end{array}\right\}\ 18\,000 \cdot 1{,}12 = x \rightarrow x = 20\,496$$

En agosto han visitado el parque de atracciones 20 496 personas.

37 **Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35 %. ¿Cuánto valen ahora?**

$13{,}70 \cdot 1{,}35 = 18{,}495$

Ahora valen 18,495 €

38 **En una ciudad había 69 580 personas desempleadas. Si han disminuido un 15 %, ¿cuántas hay ahora?**

Disminución de un 15 %:

Índice % → 100 % – 15 % = 85 % → 0,85

$C_{inicial} \cdot I_{\%} = C_{final}$

100 – 15 = 85 → 0,85

$69\,580 \cdot 0{,}85 = 59\,143$

Ahora hay 59 143 personas desempleadas.

39 **La entrada para el cine cuesta 7,50 €, y para las personas jubiladas, un 40 % menos. ¿Cuánto le cuesta una entrada a una persona jubilada?**

$100 - 40 = 60 \rightarrow 0{,}60$

$7{,}50 \cdot 0{,}60 = 4{,}50$

La entrada a una persona jubilada le cuesta 4,50 €

40 **El agua recogida en un pantano, 690 hm³, ha disminuido un 23 %. ¿Cuánta agua hay ahora?**

$100 - 23 = 77 \rightarrow 0{,}77$

$690 \cdot 0{,}77 = 531{,}3$

Ahora hay 531,3 hm³ de agua. €

41 **Calcula el importe final de estas facturas, tras cargarles el 21 % de IVA:**

800 € | 32 € | 57,40 € | 361,28 €

Un aumento del 21 % → Índice de variación 1,21

$800 \cdot 1{,}21 = 968$ € $\quad 32 \cdot 1{,}21 = 38{,}72$ €

$57{,}40 \cdot 1{,}21 = 69{,}45$ € $\quad 361{,}28 \cdot 1{,}21 = 437{,}15$ €

42 **Calcula el nuevo precio de estos artículos al aplicarles una rebaja del 30 %:**

$8 \cdot 0{,}7 = 19{,}6$ € $\quad 120 \cdot 0{,}7 = 84$ € $\quad 35 \cdot 0{,}7 = 24{,}5$ € $\quad 50{,}80 \cdot 0{,}7 = 35{,}56$ €

43 **Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30 % y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?**

Índice % → 1 + 0,30 = 1,30

$C_{inicial} \cdot I_{\%} = C_{final}$

$30\% \rightarrow 0{,}30 \rightarrow 1{,}30$

$x \cdot 1{,}30 = 104 \rightarrow x = 104 : 1{,}30 = 80$

La goma mide 80 cm sin estirar.

44 **En unas rebajas en las que se hace el 30 % de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?**

Índice % → 1 – 0,30 = 0,70

$C_{inicial} \cdot I_{\%} = C_{final}$

$100 - 30 = 70 \rightarrow 0{,}7$

$x \cdot 0{,}7 = 50{,}40 \rightarrow x = 50{,}40 : 0{,}7 = 72$

El precio inicial era 72 €.

45 **Mañana se celebra el día sin IVA en una tienda de productos tecnológicos. Sabiendo que el IVA es del 21 %, indica en cuánto se quedará cada uno de los artículos siguientes:**

a) Televisor: 992,20 €

b) Tableta: 199,65 €

c) Patinete eléctrico: 302,50 €

Sin IVA ***Con IVA***

$32\text{ €} \xrightarrow{\cdot 1,21} 38,72\text{ €}$

$32\text{ €} \xleftarrow{:1,21} 38,72\text{ €}$

a) $x \cdot 1,21 = 992,20 \;\rightarrow\; x = 992,20 : 1,21 = 820$

El televisor se queda en 820 €

b) $x \cdot 1,21 = 199,65 \;\rightarrow\; x = 199,65 : 1,21 = 165$

La tableta se queda en 165 €

a) $x \cdot 1,21 = 302,50 \;\rightarrow\; x = 302,50 : 1,21 = 250$

El patinete eléctrico se queda en 250 €

46 El precio de una batidora, después de cargarle un 21 % de IVA, es de 72,60 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle ese impuesto?

$x \cdot 1{,}21 = 72{,}60 \;\rightarrow\; x = 72{,}60 : 1{,}21 = 60$

Su precio era de 60 €

47 Un hospital registra, por término medio, un descenso de un 60 % en la atención de urgencias cuando hay un partido de fútbol de la selección. Hoy ha habido partido y el servicio de urgencias ha registrado 148 actuaciones. Con ese dato, estima el número de actuaciones en un día normal.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \;\rightarrow\; x\\ \text{Índice de variación} \;\rightarrow\; 0{,}4\\ \text{Cantidad final} \;\rightarrow\; 148 \text{ actuaciones}\end{array}\right\}\; x \cdot 0{,}4 = 148 \;\rightarrow\; x = 370$$

El número de actuaciones en un día normal es 370.

48 A finales de agosto, un pantano tiene un 20 % menos de agua que en julio. Y a finales de julio, un 15 % menos que en junio. ¿Qué porcentaje ha descendido en total?

Disminución del 20 % $\rightarrow$ Índice de variación 0,8

Disminución del 15 % $\rightarrow$ Índice de variación 0,85

$0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$ $\rightarrow$ Disminución del 32 %

Ha descendido un 32 % en los dos meses.

49 Un vehículo realiza un viaje de ida y vuelta. En la ida hace una media de 85 km/h, y en la vuelta, con más tráfico, una media de 68 km/h. ¿En qué tanto por ciento la velocidad de vuelta ha sido inferior a la velocidad de ida?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \;\rightarrow\; 85 \text{ km/h}\\ \text{Índice de variación} \;\rightarrow\; x\\ \text{Cantidad final} \;\rightarrow\; 68 \text{ km/h}\end{array}\right\}\; 85 \cdot x = 68 \;\rightarrow\; x = 0{,}8$$

La velocidad de vuelta ha sido un 100 % – 80 % = 20 % inferior que la velocidad de ida.

50 Un comerciante aumenta el precio de sus productos un 30 % y, después, pretendiendo dejarlos al precio inicial, los rebaja un 30 %.

a) Un ordenador que inicialmente costaba 1 000 €, ¿cuánto costará en cada paso del proceso?

b) ¿Cuál es la variación porcentual total que sufren los artículos respecto al precio inicial?

a) Aumento del 30 % $\rightarrow$ $1\,000 \cdot 1{,}30 = 1\,300$ €

Descuento del 30 % $\rightarrow$ $1\,300 \cdot 0{,}70 = 910$ €

b) $1{,}30 \cdot 0{,}70 = 0{,}91$ $\rightarrow$ Descuento del 9 %

AUTOEVALUACIÓN

Página 71

1 **Escribe dos números, comprendidos entre 50 y 100, que estén en razón de 5 a 8.**

Respuesta abierta. Por ejemplo 55 y 88.

2 **Calcula el término desconocido en cada proporción:**

a) $\frac{15}{24} = \frac{35}{x}$ **b)** $\frac{55}{30} = \frac{x}{18}$

a) $\frac{15}{24} = \frac{35}{x} \rightarrow x = \frac{35 \cdot 24}{15} = 56$

b) $\frac{55}{30} = \frac{x}{18} \rightarrow x = \frac{55 \cdot 18}{30} = 33$

3 **Calcula.**

a) 24 % de 375 **b) 115 % de 240**

c) 6 % de 835 **d) 8,5 % de 984**

a) 375 · 0,24 = 90 b) 240 · 1,154 = 276

c) 835 · 0,06 = 50,1 d) 984 · 0,085 = 83,64

4 **¿Qué porcentaje representa?**

a) 90 respecto a 200 **b) 15 respecto a 300**

c) 91 respecto a 260 **c) 360 respecto a 300**

a) 90 : 200 = 0,45 → 45 % b) 15 : 300 = 0,05 → 5 %

c) 91 : 260 = 0,35 → 35 % d) 360 : 300 = 1,2 → 120 %

5 **Las ventas de una gasolinera suben en un 35 % durante el fin de semana. Si en un día normal vende, por término medio, 14 800 litros, ¿cuáles son, redondeando a los miles de litros, las ventas en un día del fin de semana?**

35 % → 1,35

14 800 · 1,35 = 19 980 ~ 20 000

En un día de fin de semana vende unos 20 000 L

6 **Una población de 150 000 habitantes tiene 98 000 coches matriculados. Estima el número de coches matriculados en otra población, de características similares, con 180 000 habitantes.**

$\frac{98000}{150000} = \frac{x}{180000} \rightarrow x = \frac{98000 \cdot 180000}{150000} = 117600$

Habrá unos 117 600 coches matriculados.

7 **Resuelve.**

a) He tirado 40 veces a canasta y he encestado 28. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aciertos?

b) Las 13 chicas que estamos en el equipo de ajedrez somos el 55 % del total. ¿Cuántas personas formamos el equipo?

c) Marta ha pagado 484,50 € por un ordenador que estaba rebajado un 15 %. ¿Cuánto costaba sin rebaja?

a) $28 : 40 = 0{,}7 \rightarrow 70\,\%$

b) $x \cdot 0{,}55 = 13 \rightarrow x = 13 : 0{,}55 \approx 23{,}63$

El equipo lo forman 24 personas.

c) $x \cdot 0{,}85 = 484{,}50 \rightarrow x = 484{,}50 : 0{,}85 = 570$

Costaba 570 € sin rebajar.

8 **Hemos empleado 5 días y 2 horas en hacer una ruta en bicicleta de 384 km, pedaleando 6 h al día. Si siempre vamos a la misma velocidad media:**

a) ¿Qué distancia recorrimos cada día?

b) Si pedaleamos 5 h al día, ¿cuántos días necesitaremos para hacer 600 km?

Para hacer 384 km hemos empleado $6 \cdot 5 + 2 = 32$ horas.

a) $384 : 32 = 12 \rightarrow$ Cada hora recorrimos 12 km.

Durante los cinco primeros días, recorrimos $12 \cdot 6 = 72$ km cada día. El sexto día recorrimos $12 \cdot 2 = 24$ km.

b) Cada día haremos $5 \cdot 12 = 60$ km.

Por tanto, necesitaremos $600 : 60 = 10$ días para recorrer 600 km.

9 **Una fábrica de automóviles con cuatro cadenas de montaje, funcionando en jornadas de 18 horas, tiene previsto cubrir un cupo de producción en quince días. ¿Cuánto tardará en cubrir ese mismo cupo si se estropea una de las cadenas de montaje y las otras tres aumentan su jornada a 20 horas?**

P. INVERSA

P. INVERSA

Cadenas	Horas	Días
4	18	15
3	20	x

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{20}{18} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 4 \cdot 18}{3 \cdot 20} = 18 \text{ días}$$

Tardarán 18 días en cubrir el pedido.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Página 71

¡No es lo mismo!

- **En un equipo de fútbol de primera división, el portero titular cobra 800 000 €, y el delantero estrella, 1 000 000 €.**

a) **¿Qué tanto por ciento tendría que aumentar el sueldo del portero para que ganara lo mismo que el delantero?**

b) **¿Qué tanto por ciento tendría que disminuir el sueldo del delantero para que ganara lo mismo que el portero?**

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \to 800\,000 \text{ €}\\ \text{Índice de variación} \to x\\ \text{Cantidad final} \to 1\,000\,000 \text{ €}\end{array}\right\}\ 800\,000 \cdot x = 1\,000\,000 \to x = 1{,}25$

Para ganar lo mismo que la estrella del equipo, debería aumentar un 25 % su ficha.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \to 1\,000\,000 \text{ €}\\ \text{Índice de variación} \to x\\ \text{Cantidad final} \to 800\,000 \text{ €}\end{array}\right\}\ 1\,000\,000 \cdot x = 800\,000 \to x = 0{,}8$

Para ganar lo mismo que el guardamenta titular debería rebajar un 20 % su ficha.

5 SECUENCIAS NUMÉRICAS

1 SUCESIONES

Página 73

1 Añade los tres términos siguientes en cada una de estas sucesiones:

a) 10, 15, 20, 25, 30, …
b) 80, 70, 60, 50, 40, …
c) 3, 6, 12, 24, 48, …
d) 1, 3, 4, 6, 7, …
e) 2, 5, 7, 12, 19, …
f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

a) 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45
b) 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10
c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384
d) 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12
e) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81
f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 8, 10

2 Describe el criterio con el que se ha formado cada una de las seis sucesiones del ejercicio anterior.

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 10 y sumando 5 a cada termino para obtener el siguiente.

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 80 y restando 10 a cada término para obtener el siguiente.

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 3 y multiplicando por 2 cada término para obtener el siguiente.

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 1 y alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener el siguiente.

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

Los dos primeros términos son 2 y 5 y, a partir de ahí, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

El primer término de la sucesión es 4 y se construye alternando la suma de 2 y la resta de 1 a cada término para obtener el siguiente.

3 Forma seis sucesiones que empiecen por 6 y que se construyan con los mismos criterios que las del ejercicio 1.

a) 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, …
b) 6, –4, –14, –24, –34, –44, …
c) 6, 12, 24, 48, 96, 192, …
d) 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, …
e) 6, 5, 11, 16, 27, 43, …
f) 6, 8, 7, 9, 8, 10, 9, …

4 **Añade a esta sucesión los cuatro términos siguientes, y describe el criterio con el que se ha formado:**

10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, …

Los cuatro términos siguientes $\rightarrow$ 22, 23, 25, 26

El primer término de la sucesión es el 10 y se ha formado alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener así el siguiente.

Página 74

5 Asocia cada sucesión con su término general, y exprésalo como en el ejemplo:

- **k) 4, 9, 14, 19, 24, … → $k_n = 5n - 1$**

a) 7, 8, 9, 10, 11, …
b) –2, –1, 0, 1, 2, …
c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; …
d) 0, 2, 4, 6, 8, …
e) 3, 6, 9, 12, …
f) 4, 7, 10, 13, …
g) 0, 3, 8, 15, 24, …

$\boxed{\begin{array}{l} n^2 - 1 \\ n : 2 \\ 3n + 1 \\ n - 3 \\ 2(n - 1) \\ 3n \\ n + 6 \end{array}}$

a) 7, 8, 9, 10, 11, … → $a_n = n + 6$
b) –2, –1, 0, 1, 2, … → $b_n = n - 3$
c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; … → $c_n = n : 2$
d) 0, 2, 4, 6, 8, … → $d_n = 2(n - 1)$
e) 3, 6, 9, 12, … → $e_n = 3n$
f) 4, 7, 10, 13, … → $f_n = 3n + 1$
g) 0, 3, 8, 15, 24, … → $g_n = n^2 - 1$

6 Halla el término general de cada una de las sucesiones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 6, …
b) 0, 1, 2, 3, 4, …
c) 4, 8, 12, 16, 20, …
d) 4, 7, 10, 13, 16, …
e) 10, 20, 30, 40, 50, …
f) 12, 22, 32, 42, 52, …
g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, …
h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, …

a) 2, 3, 4, 5, 6, … → $a_n = n + 1$
b) 0, 1, 2, 3, 4, … → $b_n = n - 1$
c) 4, 8, 12, 16, 20, … → $c_n = 4n$
d) 4, 7, 10, 13, 16, … → $d_n = 3n + 1$
e) 10, 20, 30, 40, 50, … → $e_n = 10n$
f) 12, 22, 32, 42, 52, … → $f_n = 10n + 2$
g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, … → $g_n = 10^n$
h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, … → $h_n = 10^n + n$

Página 75

7 **Para construir estas sucesiones, se han utilizado, no consecutivamente, los criterios que ves debajo:**

a) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, …

c) 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, …

d) 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; …

e) 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, …

— Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, …

— Sumar los dos términos anteriores.

— Sumar los tres términos anteriores.

— Restar los dos términos anteriores.

— Promediar los dos términos anteriores.

Identifica cuál corresponde a cada una y continúalas hasta el término s_{10}.

a) Sumar los dos términos anteriores → 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123

b) Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, … → 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46

c) Restar los dos términos anteriores → 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, –54, 88, –142

d) Promediar los dos términos anteriores → 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; 4,625; 4,6875; 4,65625

e) Sumar los tres términos anteriores → 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, 115, 212, 390

8 **Asocia cada sucesión con una de las igualdades que ves a la derecha, y describe verbalmente el criterio con el que se han construido:**

a) 40, 39, 37, 34, 30, …

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, …

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, …

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1} \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1} \\ a_{n+1} = a_n - n \end{array}}$$

a) 40, 39, 37, 34, 30, … → $a_{n+1} = a_n - n$

a_{n+1} es el término anterior menos la posición que ocupa este último.

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, … → $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$

a_{n+2} es el doble del término que ocupa dos lugares menos más el término anterior.

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, … → $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$

a_{n+2} es el término que ocupa dos lugares menos, menos el término anterior.

9 **Observa esta sucesión y calcula los tres términos siguientes:**

$$1 \xrightarrow{+2\cdot 1} 3 \xrightarrow{+2\cdot 2} 7 \xrightarrow{+2\cdot 3} 13 \xrightarrow{+2\cdot 4} 21 \quad \dots$$

Escribe una igualdad que exprese la relación entre dos términos consecutivos, a_n y a_{n+1}.

Los tres términos siguientes son 31, 43, 57.

La relación entre dos términos consecutivos es $a_{n+1} = a_n + 2n$.

2 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Página 77

1 Escribe los diez primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y cuya diferencia es 7. Calcula su suma.

$a_1 = 8$ $\qquad d = 7$

8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(8 + 71) \cdot 10}{2} = 395$$

2 En una progresión aritmética, $a_1 = 10$ y $a_{12} = 54$. Halla:

a) La suma de los doce primeros términos, S_{12}.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

a) $S_{12} = \dfrac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \dfrac{(10 + 54) \cdot 12}{2} = 384$

b) $a_{12} = a_1 + (12 - 1)d \to 54 = 10 + 11d \to d = \dfrac{(54 - 10) \cdot 12}{11} = 4$

$a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 10 + (n - 1)4 \to a_n = 6 + 4n$

3 El término general de una progresión aritmética es $a_n = 10 + 2{,}5n$. Halla a_1, a_{50} y S_{50} (la suma de los 50 primeros términos).

$d = 2{,}5$

$a_1 = 12{,}5$

$a_{50} = 12{,}5 + 2{,}5 \cdot 50 = 135$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(12{,}5 + 135) \cdot 50}{2} = 3\,687{,}5$$

4 En una progresión aritmética, $a_1 = 84$ y $a_2 = 79$.

a) Halla d y escribe los ocho primeros términos.

b) Halla el término general.

c) Obtén a_{20} y S_{20}.

a) $d = a_2 - a_1 = 79 - 84 = -5$

Los ocho primeros términos son $\to$ 84, 79, 74, 69, 64, 59, 54, 49

b) $a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 84 - 5 \cdot (n - 1) = 89 - 5n$

c) $a_{20} = 89 - 5 \cdot 20 = -11$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(84 - 11) \cdot 20}{2} = 730$$

3 ▸ PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Página 79

1 Halla los seis primeros términos de las progresiones geométricas definidas así:

a) Primer término: 5 000; razón: 1,2

b) Primer término: 8; razón: 2,5

c) Primer término: 1 000 000; razón: 0,2

d) Primer término: 1; razón: 10

a) 5 000; 6 000; 7 200; 8 640; 10 368; 12 441,6

b) 8; 20; 50; 125; 312,5; 781,25

c) 1 000 000, 200 000, 40 000, 8 000, 1 600, 320

d) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000

2 Considera la progresión 1, 2, 4, 8, 16, …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) ¿Cuál es la razón?

c) ¿Qué lugar ocupa el término $2^7 = 128$?

d) Expresa con una potencia de base 2 el término a_{10} de la progresión.

a) Los cuatro términos siguientes son 32, 64, 128, 256.

b) La razón de esta progresión es $r = 2$.

c) $2^7 = 128$ ocupa la posición 8.

d) $a_{10} = 2^9 = 512$

3 Escribe los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

b) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

c) $c_n = 5 \cdot 10^{n-1}$

d) $d_n = 5 \cdot (-0,1)^{n-1}$

a) 5, 10, 20, 40

b) 2, 6, 18, 54

c) 5, 50, 500, 5 000

d) 5; –0,5; 0,05; –0,005

4 Asocia en tu cuaderno cada progresión geométrica con su término general:

a) 3, 6, 12, 24, …

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; …

c) 3, 30, 300, 3 000, …

d) 2, 6, 18, 54, …

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 0,1^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

a) 3, 6, 12, 24, … $\rightarrow$ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; … $\rightarrow$ $a_n = 3 \cdot 0,1^{n-1}$

c) 3, 30, 300, 3 000, … $\rightarrow$ $a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$

d) 2, 6, 18, 54, … $\rightarrow$ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

5 **Considera la siguiente progresión:**

1; 0,2; 0,04; 0,008; …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) Escribe en forma de potencia el término a_{15} de la progresión.

a) 0,0016; 0,00032; 0,000064; 0,0000128

b) $a_n = 0{,}2^{(n-1)}$

$a_{15} = 0{,}2^{(15-1)} \rightarrow a_{15} = 0{,}2^{14}$

6 **¿En cuánto se convierte un capital de 5 000 €, colocado al 3 % anual durante 10 años, si los intereses se suman al capital al final de cada año?**

Al final de cada año, el capital se multiplica por 1,03.

En diez años, el capital inicial se habrá multiplicado diez veces por 1,03:

$$5\,000 \cdot 1{,}03^{10} = 6\,719{,}58 \text{ €}$$

El capital, al cabo de 10 años, es de 6 719,58 €.

7 **Averigua a partir de qué término la progresión geométrica 3, 6, 12, … supera el valor 1 000 000.**

El término general de esta progresión es $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$, entonces, hay que averiguar para que n se cumple que $3 \cdot 2^{(n-1)} > 1\,000\,000 \rightarrow 2^{(n-1)} > \dfrac{1\,000\,000}{3} \approx 333\,333{,}3$.

$2^{10} = 1\,024 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Se queda muy corto, probamos con otro.

$2^{15} = 32\,768 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Sigue estando por debajo pero bastante próximo.

…

$2^{18} = 262\,144 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es muy próximo al número buscado

$2^{19} = 524\,288 > 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es el primero que supera 333 333,3.

Por tanto, $n - 1 = 19 \rightarrow n = 19 + 1 \rightarrow n = 20$

$$a_{20} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$$

A partir de $a_{20} = 1\,572\,864$ los términos de la progresión superan 1 000 000.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Practica

Sucesiones

1 **Escribe los seis primeros términos de estas sucesiones:**

a) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es 5.

b) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es –10.

c) El primer término es 5, y el segundo, 7. A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

d) El primer término es 16. Los demás se obtienen dividiendo el anterior por 2.

e) El primer término es 36, el segundo, 12, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

a) 5, 8, 11, 14, 17, 20

b) –10, –7, –4, –1, 2, 5

c) 5, 7, 12, 19, 31, 50

d) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5

e) 36; 12; 24; 18; 21; 19,5

2 **Averigua el criterio de formación de estas sucesiones y escribe tres términos más de cada una:**

a) **1, 3, 5, 7, …**

b) **7, 5, 3, 1, …**

c) **2, 4, 8, 16, …**

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

e) **1,5; 1,9; 2,3; 2,7; …**

f) **30, 25, 20, 15, …**

g) **1, 4, 9, 16, …**

h) **2, 5, 10, 17, …**

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

j) **1, 3, 6, 10, …**

a) El primer término es 1 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

b) El primer término es 7 y cada término se obtiene restando 2 al anterior.

7, 5, 3, 1, –1, –3, –5

c) El primer término es 2 y cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

d) El primer término es $\frac{1}{2}$ y cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$$

e) El primer término es 1,5 y cada término se obtiene sumando 0,4 al anterior.

1,5; 1,9; 2,3; 2,7; 3,1; 3,5; 3,9

f) El primer término es 30 y cada término se obtiene restando 5 al anterior.

30, 25, 20, 15, 10, 5, 0

g) El primer término es 1 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

h) El primer término es 2 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa en la sucesión y sumándole 1.

2, 5, 10, 17, 26, 37, 50

i) El primer término es 1 y cada término es la unidad dividida por el lugar que ocupa en la sucesión.

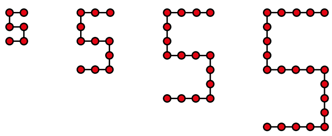
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$$

j) El primer término es 1 y, a partir de ahí, se va sumando la posición que ocupa en la sucesión al término anterior.

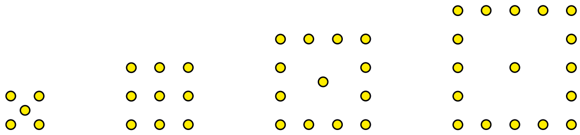
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

3 **Dibuja las dos siguientes figuras de cada sucesión:**

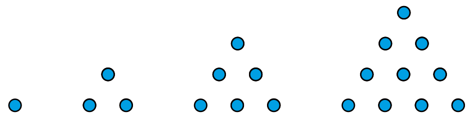
a)



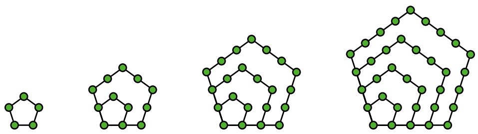
b)



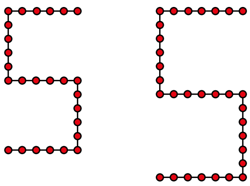
c)



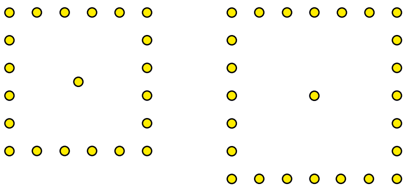
d)



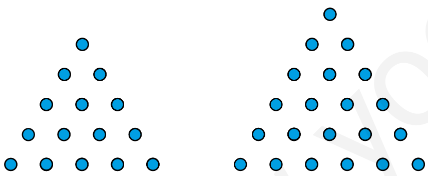
a)



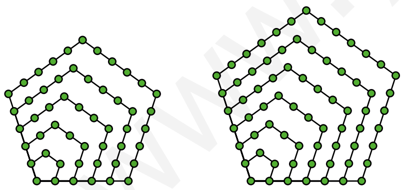
b)



c)



d)



4 **Observa que el número de puntos de cada término de la sucesión del apartado a) del ejercicio anterior es 6, 11, 16, 21, … . Escribe los seis primeros términos de esta y de las demás sucesiones.**

a) 6, 11, 16, 21, 26, 31

b) 5, 9, 13, 17, 21, 25

c) 1, 3, 6, 10, 15, 21

d) 5, 12, 22, 35, 51, 70

Término general y forma recurrente

5 **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:**

a) $n^2 - n$ **b)** $n^2 + n$ **c)** $2^n + 1$

d) $\frac{n-1}{n+1}$ **e)** $\frac{n^2+1}{n}$ **f)** $\frac{2n-1}{n+1}$

a) 0, 2, 6, 12, 20 b) 2, 6, 12, 20, 30 c) 3, 5, 9, 17, 33

d) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e) $0, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}$ f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

6 **a) Comprueba que los términos de la sucesión $a_n = (-1)^n$ son –1, 1, –1, 1, –1, …**

b) Escribe los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es $b_n = 1 + (-1)^n$.

c) Indica el término general de 1, –1, 1, –1, 1, …

a) $a_1 = (-1)^1 = -1$; $a_2 = (-1)^2 = 1$; $a_3 = (-1)^3 = -1$; $a_4 = (-1)^4 = 1$; $a_5 = (-1)^5 = -1$; …

b) $b_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$; $b_2 = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$; $b_3 = 1 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$;
$b_4 = 1 + (-1)^4 = 1 + 1 = 2$; $b_5 = 1 + (-1)^5 = 1 - 1 = 0$

c) $c_n = (-1)^{n+1}$

7 **Escribe los seis primeros términos de cada una de estas sucesiones definidas de forma recurrente:**

a) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ **b)** $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

c) $a_1 = 64$, $a_2 = 8$, $a_n = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$ **d)** $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) 1, –1, 0, –1, –1, –2 b) 3, 5, 2, –3, –5, –2

c) $64, 8, 8, 1, 8, \frac{1}{8}$ d) 2, 4, 4, 8, 16, 64

8 **Escribe los seis primeros términos de cada una de estas sucesiones:**

a) $a_n = \frac{n}{10^{n-1}}$ **b)** $b_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$ **c)** $c_n = 2^{3-n}$

d) $d_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1$ **e)** $e_n = \frac{n - n^2}{2}$ **f)** $f_n = \frac{n-1}{n+1}$

a) $a_1 = \frac{1}{10^0} = 1$; $a_2 = \frac{2}{10^1} = 0,2$; $a_3 = \frac{3}{10^2} = 0,03$; $a_4 = \frac{4}{10^3} = 0,004$; $a_5 = \frac{5}{10^4} = 0,0005$;
$a_6 = \frac{6}{10^5} = 0,00006$

b) $b_1 = 3 \cdot 2^0 = 3$; $b_2 = 3 \cdot 2^1 = 6$; $b_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$; $b_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$; $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$;
$b_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$

c) $c_1 = 2^2 = 4$; $c_2 = 2^3 = 8$; $c_3 = 2^4 = 16$; $c_4 = 2^5 = 32$; $c_5 = 2^6 = 64$; $c_6 = 2^7 = 128$

d) $d_1 = \frac{(-1)^1}{1} + 1 = 0$; $d_2 = \frac{(-1)^2}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; $d_3 = \frac{(-1)^3}{3} + 1 = \frac{2}{3}$; $d_4 = \frac{(-1)^4}{4} + 1 = \frac{5}{4}$;
$d_5 = \frac{(-1)^5}{5} + 1 = \frac{4}{5}$; $d_6 = \frac{(-1)^6}{5} + 1 = \frac{6}{5}$

e) $e_1 = \frac{1-1^2}{2} = 0$; $e_2 = \frac{2-2^2}{2} = -1$; $e_3 = \frac{3-3^2}{2} = -3$; $e_4 = \frac{4-4^2}{2} = -6$; $e_5 = \frac{5-5^2}{2} = -10$;

$e_6 = \frac{6-6^2}{2} = -15$

f) $f_1 = \frac{1-1}{1+1} = 0$; $f_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$; $f_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $f_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$; $f_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;

$f_6 = \frac{6-1}{6+1} = \frac{5}{7}$

9 **Asocia cada sucesión con su término general:**

a) 5, 10, 15, 20, 25, … — **i)** $\frac{4}{n}$

b) 6, 9, 14, 21, 30, … — **ii)** $\frac{10}{10^n}$

c) 4, 2, $\frac{4}{3}$**, 1,** $\frac{4}{5}$**, …** — **iii)** $n^2 + 5$

d) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; … — **iv)** $\frac{n}{n+1}$

e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ — **v)** $5n$

a) → v) b) → iii) c) → i) d) → ii) e) → iv)

10 **Escribe el término general de estas sucesiones:**

a) 1, 2, 3, 4, … **b) 0, 1, 2, 3, …** **c) 1, 4, 9, 16, …**

d) 0, 3, 8, 15, … **e) 2, 4, 6, 8, …** **f) 1, 3, 5, 7, …**

g) 3, 5, 7, 9, … **h) 12, 14, 16, 18, …** **i) 2, 4, 8, 16, …**

j) 3, 5, 9, 17, … **k) 100, 200, 300, 400, …** **l) 5, 25, 125, 625, …**

a) $a_n = n$ b) $b_n = n - 1$ c) $c_n = n^2$

d) $d_n = n^2 - 1$ e) $e_n = 2n$ f) $f_n = 2n - 1$

g) $g_n = 2n + 1$ h) $h_n = 2(n + 5) = 2n + 10$ i) $i_n = 2^n$

j) $j_n = 2^n + 1$ k) $k_n = 100n$ l) $l_n = 5^n$

Página 81

Progresiones aritméticas

11 **De las sucesiones siguientes, definidas por sus términos generales, hay tres que son progresiones aritméticas. Identifícalas y di cuál es la diferencia en cada una de ellas:**

a) $5n - 4$ **b)** $5 - 3n$ **c)** $10 - 0{,}5n$ **d)** $n^2 + 1$

a) $5n - 4$ → Progresión aritmética con $d = 5$.

b) $5 - 3n$ → Progresión aritmética con $d = -3$.

c) $10 - 0{,}5n$ → Progresión aritmética con $d = -0{,}5$.

d) n^{2+1} → No es progresión aritmética.

12 **Escribe los seis primeros términos y el término general de estas progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = -13,\ d = 5$ **b)** $b_1 = \frac{2}{3},\ d = 1$ **c)** $c_1 = 5,\ d = -\frac{1}{2}$

d) $d_1 = 3,\ d = 0{,}5$ **e)** $e_1 = 5,\ d = -1{,}2$ **f)** $f_1 = \frac{1}{7},\ d = 0$

a) $-13, -8, -3, 2, 7, 12$. $a_n = -13 + (n-1)\,5 = 5n - 18$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3}$. $b_n = \frac{2}{3} + (n-1)\cdot 1 = n - \frac{1}{3}$

c) $5, \frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}$. $c_n = 5 + (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-n}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11-n}{2}$

d) $3;\ 3{,}5;\ 4;\ 4{,}5;\ 5;\ 5{,}5$. $d_n = 3 + (n-1)\cdot 0{,}5 = 0{,}5n + 2{,}5$

e) $5;\ 3{,}8;\ 2{,}6;\ 1{,}4;\ 0{,}2;\ -1$. $e_n = 5 + (n-1)\,(-1, 2) = -1, 2n + 6{,}2$

f) $\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}$. $f_n = \frac{1}{7} + (n-1)\cdot 0 = \frac{1}{7}$

13 **Halla el término general en cada caso:**

a) **3, 14, 25, 36, 47, …** **b)** **–5, –2, 1, 4, 7, …**

c) **–7, –3, 1, 5, 9, …** **d)** **2; 3,5; 5; 6,5; 8; …**

e) **3; 5,8; 8,6; 11,4; …** **f)** **7; 5,7; 4,4; 3,1; …**

g) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}, \dots$ **h)** $\frac{15}{8}, \frac{11}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \dots$

a) $a_1 = 3,\ d = 11 \rightarrow a_n = 3 + (n-1)\cdot 11 = 11_n - 8$

b) $b_1 = -5,\ d = 3 \rightarrow b_n = -5 + (n-1)\cdot 3 = 3_n - 8$

c) $c_1 = -7,\ d = 4 \rightarrow c_n = -7 + (n-1)\cdot 4 = 4_n - 11$

d) $d_1 = 2,\ d = 1{,}5 \rightarrow d_n = 2 + (n-1)\cdot 1{,}5 = 1{,}5n + 0{,}5$

e) $e_1 = 3;\ d = 2{,}8 \rightarrow e_n = 3 + (n-1)\cdot 2{,}8 = 2{,}8n + 0{,}2$

f) $f_1 = 7;\ d = -1{,}3 \rightarrow f_n = 7 + (n-1)\cdot(-1{,}3) = -1{,}3n + 8{,}3$

g) $g_1 = \frac{1}{2},\ d = \frac{3}{4} \rightarrow g_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3n}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3n-1}{4}$

h) $h_1 = \frac{15}{8},\ d = -\frac{4}{8} \rightarrow h_n = \frac{15}{8} + (n-1)\cdot\left(-\frac{4}{8}\right) = \frac{-4n}{8} + \frac{19}{8} = \frac{19-4n}{8}$

15 Calcula los elementos que se te piden en estas progresiones aritméticas. Escribe sus términos generales:

a) a_{19} **y** d**, sabiendo que** $a_1 = 4$ **y** $a_2 = 7$**.**

b) a_1**,** a_{40} **y** d**, sabiendo que** $a_5 = 17$ **y** $a_6 = 22$**.**

c) a_1**, sabiendo que** $a_{35} = 104$ **y** $d = 27$**.**

d) a_1**,** a_{100} **y** d**, sabiendo que** $a_{15} = 43$ **y** $a_{16} = 35$**.**

e) a_{20} **y** d**, sabiendo que** $a_1 = 16$ **y** $a_{10} = 43$**.**

f) a_1 **y** a_{15}**, sabiendo que** $a_{10} = 4$ **y** $d = 6$**.**

a) $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$

$a_{19} = 4 + (19 - 1) \cdot 3 = 4 + 54 = 58$

b) $d = a_6 - a_5 = 22 - 17 = 5$

$a_5 = a_1 + 4d \rightarrow 17 = a_1 + 20 \rightarrow a_1 = -3$

$a_{40} = -3 + (40 - 1) \cdot 5 = -3 + 195 = 192$

c) $a_{35} = a_1 + 34 \cdot d \rightarrow 104 = a_1 + 34 \cdot 27 \rightarrow a_1 = -814$

d) $d = a_{16} - a_{15} = 35 - 43 = -8$

$a_{15} = a_1 + 14 \cdot d \rightarrow 43 = a_1 + 14 \cdot (-8) \rightarrow a_1 = 155$

$a_{100} = 155 + 99 \cdot (-8) = -637$

e) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \rightarrow 43 = 16 + 9 \cdot d \rightarrow d = 3$

$a_{20} = 16 + 19 \cdot 3 = 73$

f) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \rightarrow 4 = a_1 + 9 \cdot 6 \rightarrow a_1 = -50$

$a_{15} = -50 + 14 \cdot 6 = 34$

16 Halla la suma de los 20 primeros términos de cada una de las progresiones aritméticas de la actividad anterior.

Aplicamos en cada caso la fómula $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = (a_1 + a_{20}) \cdot 10$

a) $a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61 \rightarrow S_{20} = (4 + 61) \cdot 10 = 650$

b) $a_{20} = -3 + 19 \cdot 5 = 92 \rightarrow S_{20} = (-3 + 92) \cdot 10 = 890$

c) $a_{20} = -814 + 19 \cdot 27 = -301 \rightarrow S_{20} = (-814 - 301) \cdot 10 = -11\,150$

d) $a_{20} = 155 + 19 \cdot (-8) = 3 \rightarrow S_{20} = (155 + 3) \cdot 10 = 1\,580$

e) $a_{20} = 73 \rightarrow S_{20} = (16 + 73) \cdot 10 = 890$

f) $a_{20} = -50 + 19 \cdot 6 = 64 \rightarrow S_{20} = (-50 + 64) \cdot 10 = 140$

17 El término general de una progresión aritmética es $a_n = 4 + 3n$**. Halla** a_1**,** a_{100} **y** S_{100}**.**

$a_n = 4 + 3n$

$a_1 = 4 + 3 \cdot 1 = 7$

$a_{100} = 4 + 3 \cdot 100 = 304$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 304) \cdot 100}{2} = 15\,550$$

18 **Halla la suma indicada en cada caso:**

a) S_{40} **sabiendo que** $a_n = 3 - 4n$.

b) S_{25} **sabiendo que** $b_n = -7 + 9n$.

c) S_{10} **sabiendo que** $c_n = 1 + \frac{2}{3}n$.

d) S_{100} **sabiendo que** $d_n = \frac{3}{8} - 4n$.

e) S_{70} **sabiendo que** $e_n = \frac{1}{5} + \frac{7}{3}n$.

a) $a_1 = -1;\ a_{40} = -157$

Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = -1$ y $d = -4$

$$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} = \frac{(-1-157) \cdot 40}{2} = -3160$$

b) $b_1 = 2;\ b_{25} = 218$

Se trata de una progresión aritmética con $b_1 = 2$ y $d = 9$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2+218) \cdot 25}{2} = 2\,750$$

c) $c_1 = \frac{5}{3};\ c_{10} = \frac{23}{3}$

Se trata de una progresión aritmética con $c_1 = \frac{5}{3}$ y $d = \frac{2}{3}$

$$S_{10} = \frac{(c_1 + c_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{\left(\frac{5}{3} + \frac{23}{3}\right) \cdot 10}{2} = \frac{140}{3}$$

d) $d_1 = -\frac{29}{8};\ d_{100} = -\frac{3197}{8}$

Se trata de una progresión aritmética con $d_1 = -\frac{29}{8}$ y $d = -4$

$$S_{100} = \frac{(d_1 + d_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{\left(-\frac{29}{8} + \frac{3197}{8}\right) \cdot 100}{2} = \frac{-161\,300}{8} = 20162,5$$

e) $e_1 = \frac{38}{15};\ e_{70} = \frac{2\,453}{15}$

Se trata de una progresión aritmética con $e_1 = \frac{38}{15}$ y $d = \frac{7}{3}$

$$S_{70} = \frac{(e_1 + e_{70}) \cdot 70}{2} = \frac{\left(\frac{38}{15} + \frac{2\,453}{15}\right) \cdot 70}{2} = \frac{87\,185}{15} = \frac{17\,437}{3}$$

19 **En una progresión aritmética, $a_1 = 6$ y $a_{15} = 41$. Halla:**

a) La suma de los 15 primeros términos.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

c) El término centésimo, a_{100}.

$a_1 = 6$; $a_{15} = 41$

a) $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(6 + 41) \cdot 15}{2} = 352{,}5$

b) $a_{15} = a_1 + (15 - 1)d \to 41 = 6 + 14d \to d = \dfrac{41 - 6}{14} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

$a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 6 + 2{,}5(n - 1) \to a_n = 3{,}5 + 2{,}5n$

c) $a_{100} = 3{,}5 + 2{,}5 \cdot 100 = 253{,}5$

20 **En una progresión aritmética, $a_1 = 103$ y $a_2 = 99$.**

a) Halla la diferencia, d, y escribe los 10 primeros términos.

b) Obtén el término general.

c) Halla a_{30} y S_{30}.

$a_1 = 103$; $a_2 = 99$

a) $d = a_2 - a_1 = 99 - 103 = -4$

Los diez primeros términos son 103, 99, 95, 91, 87, 83, 79, 75, 71, 67.

b) $a_n = a_1 + (n - 1)d \to a_n = 103 - 4 \cdot (n - 1) = 107 - 4n$

El término general de esta progresión aritmética es $a_n = 107 - 4n$.

c) $a_{30} = 107 - 4 \cdot 30 = -13$

$S_{30} = \dfrac{(a_1 + a_{30})}{2} = \dfrac{(103 + (-13)) \cdot 30}{2} = 1\,350$

Progresiones geométricas

21 **Escribe los cinco primeros términos de cada una de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $a_1 = 3$; $r = 2$

b) $a_1 = 64$; $r = 0{,}5$

c) $a_1 = 10\,000$; $r = 0{,}1$

d) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

e) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot 3^{n-1}$

f) $a_n = 0{,}2 \cdot 10^n$

a) 3, 6, 12, 24, 48

b) 64, 32, 16, 8, 4

c) 10 000, 1 000, 100, 10, 1

d) 3, –6, 12, –24, 48

e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, \dfrac{27}{2}, \dfrac{81}{2}$

f) 2, 20, 200, 2 000, 20 000

22 **Calcula la razón de cada una de estas progresiones geométricas y halla el término a_8:**

a) 5, 15, 45, 135, 405, …

b) 640, –320, 160, –80, 40, …

c) 3; 4,5; 6,75; 10,125; 15,1875; …

d) 1,2; 3,6; 10,8; 32,4; 97,2; …

a) $r = 15 : 5 = 3$; $a_8 = 5 \cdot (3)^7 = 10\,935$

b) $r = -320 : 640 = -0{,}5$; $a_8 = 640 \cdot (-0{,}5)^7 = -5$

c) $r = 4{,}5 : 3 = 1{,}5$; $a_8 = 3 \cdot (1{,}5)^7 = 51{,}2578125$

d) $r = 3{,}6 : 1{,}2 = 3$; $a_8 = 1{,}2 \cdot (3)^7 = 2\,624{,}4$

23 **Asocia cada progresión con su término general:**

a) 1, 2, 4, 8, 16, … **I)** $a_n = 4 \cdot 3^n$

b) 30; 3; 0,3; 0,03; 0,003; … **II)** $a_n = 1\,000 \cdot 0{,}2^n$

c) 12, 36, 108, 324, 972, … **III)** $a_n = 240 \cdot (-0{,}5)^n$

d) –120; 60; –30; 15; –7,5; … **IV)** $a_n = 300 \cdot 0{,}1^n$

e) 200; 40; 8; 1,6; 0,32; … **V)** $a_n = 0{,}5 \cdot 2^n$

a) → V) b) → IV) c) → I) d) → III) e) → II)

Página 82

Resuelve problemas

24 **Calcula, con ayuda de la calculadora, cuál es el primer término mayor que 100 de cada una de estas progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 23,\ d = 8$ **b)** $b_1 = \frac{2}{3},\ d = \frac{43}{3}$

c) $c_1 = 39,\ d = \frac{7}{5}$ **d)** $d_1 = -27,\ d = 1{,}43$

a) a_{11} b) b_7 c) c_{45} d) d_{90}

25 **En una progresión geométrica, $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

$a_1 = 64;\ r = 0{,}75$

a) $a_1 = 64$

$a_2 = 64 \cdot 0{,}75 = 48$

$a_3 = 48 \cdot 0{,}75 = 36$

$a_4 = 36 \cdot 0{,}75 = 27$

$a_5 = 27 \cdot 0{,}75 = 20{,}25$

El primer término no entero es $a_5 = 20{,}25$.

b) Con la calculadora: 0,75 ⊠ ⊠ 64 ⊜ ⊜ … ⊜

Para que el resultado sea un número menor que 1 hay que dar 15 veces al botón ⊜.

Por tanto, $a_{15} = 0{,}85526$ es el primer término menor que 1.

26 **De las siguientes sucesiones, dadas por sus términos generales, unas son progresiones aritméticas, otras, progresiones geométricas, y otras, ni lo uno ni lo otro. Identifica cada una de ellas:**

a) $3n + 5$ **b)** $n^2 + 5$ **c)** $3^n + 5$ **d)** $3^n \cdot 5$

e) $n^2 + n$ **f)** $n + 2$ **g)** $n/2$ **h)** $2/n$

a) $3n + 5 \to$ Progresión aritmética

b) $n^2 + 5 \to$ No es progresión aritmética ni geométrica

c) $3^n + 5 \to$ No es progresión aritmética ni geométrica

d) $3^n \cdot 5 \to$ Progresión geométrica

e) $n^2 + n \to$ No es progresión aritmética ni geométrica

f) $n + 2 \to$ Progresión aritmética

g) $\frac{n}{2} \to$ Progresión aritmética

h) $\frac{2}{n} \to$ No es progresión aritmética ni geométrica

27

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

a) Esta es la tabla de multiplicar. Observa en ella cada fila o columna. ¿Qué tipos de sucesiones son? Escribe el término general de cada una.

b) Obtén el término general de la diagonal principal: 1, 4, 9, 16, …

c) La diagonal 2, 6, 12, 20, … se formó multiplicando cada número natural por su siguiente. ¿Cuál es el término general?

a) En la tabla de multiplicar podemos observar que cada fila o columna son progresiones aritméticas.

Los términos generales de cada fila o columna son:

1ª fila o columna: $a_n = n$

2ª fila o columna: $a_n = 2n$

3ª fila o columna: $a_n = 3n$

4ª fila o columna: $a_n = 4n$

5ª fila o columna: $a_n = 5n$

6ª fila o columna: $a_n = 6n$

7ª fila o columna: $a_n = 7n$

8ª fila o columna: $a_n = 8n$

9ª fila o columna: $a_n = 9n$

b) El término general de la diagonal principal es $a_n = n^2$.

c) El término general de la diagonal 2, 6, 12, 20, … es $a_n = n(n + 1) = n^2 + n$.

28 **a) ¿Cuántos números impares menores que 100 hay? Halla su suma.**

b) Halla la suma de todos los números pares menores que 100.

a) Hay 100 : 2 = 50 números impares menores que 100.

La sucesión de los números impares menores de 100 es 1, 3, 5, 7, …, 99.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 1$ y $a_{50} = 99$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

b) En este caso también hay 100 : 2 = 50 números pares menores que 100.

La sucesión de los números pares menores de 100 es 2, 4, 6, 8, …, 98.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 2$ y $a_{50} = 98$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

29 Jimena recibe en su móvil 8 mensajes cada 5 minutos. A este ritmo, ¿cuántos mensajes recibirá en 3 h?

a) 3h = 3 · 60 = 180 min

180 : 5 = 36

Jimena recibe 8 mensajes en el minuto 5; 8 + 8 = 16 mensajes en el minuto 10; 8 + 8 + 8 = 24 mensajes en el minuto 15; … Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = 8$ y $d = 8$ en la que tenemos que calcular el término a_{36}: $a_{36} = 8 + 35 \cdot 8 = 288$.

Jimena recibirá 288 mensajes en 3 h.

30 Un padre, cuando nace su hijo, abre a su nombre una cuenta bancaria, al 6 % anual, con un capital de 5 000 €, indicando que los intereses se vayan sumando al capital al final de cada año. El hijo podrá disponer del dinero cuando cumpla dieciocho años. ¿A cuánto ascenderá la cuenta en ese momento?

El capital aumenta en un 6 % anual. Es decir, al finalizar cada año se multiplica el capital que tenga en la cuenta bancaria por 1,6.

Como el hijo puede disfrutar del capital que tenga acumulado en la cuenta bancaria a los 18 años, el capital inicial se habrá multiplicado dieciocho veces por 1,06:

$$5\,000 \cdot 1{,}06^{18} = 14\,271{,}69 \text{ €}$$

Por tanto, cuando el hijo cumpla 18 años la cuenta ascenderá a 14 271,69 €.

31 He recibido un préstamo de 1 000 € de un banco que me cobra unos intereses del 4 % anual (con la suma de los intereses al final de cada año). ¿Cuánto tendré que devolver al cabo de 5 años?

La cantidad que tengo que devolver aumenta un 4 % anual. Es decir, el finalizar cada año se multiplica por 1,04.

Si lo devuelvo al cabo de 5 años:

$$1\,000 \cdot (1{,}04)^5 = 1\,216{,}65 \text{ €}$$

Al cabo de cinco años tendré que devolver 1 216,65 €

32 ¿Cuánto tardará en duplicarse un euro, colocado en el banco al 5 % anual, si los intereses se van acumulando al final de cada anualidad?

El euro colocado en el banco aumenta un 5 % anual. Es decir, al finalizar cada año el euro que está en la cuenta bancaría se multiplica por 1,05.

n son el número de años necesarios para duplicar el euro, por tanto, $1 \cdot 1{,}05^n \geq 2$.

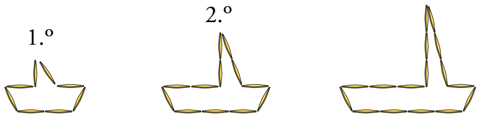
Con la calculadora:

1,05 $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ … $\boxed{=}$ → Damos a $\boxed{=}$ hasta que aparezca un número mayor o igual que 2.

Para que salga un número mayor o igual a 2 debemos dar a $\boxed{=}$ 15 veces, $1 \cdot 1{,}05^{15} = 2{,}08 \geq 2$.

Por tanto, el euro colocado en el banco tardará 15 años en duplicarse.

33 Pedro construye barquitos con palillos como ves en esta figura:



¿Cuántos palillos necesita para construir el barco número 100? ¿Cuántos habrá utilizado para formar todos los barquitos hasta el 100?

1.er barquito $\rightarrow$ 8 palillos $\rightarrow$ $a_1 = 8$

2.º barquito $\rightarrow$ 12 palillos $\rightarrow$ $a_2 = 12$

3.er barquito $\rightarrow$ 16 palillos $\rightarrow$ $a_3 = 16$

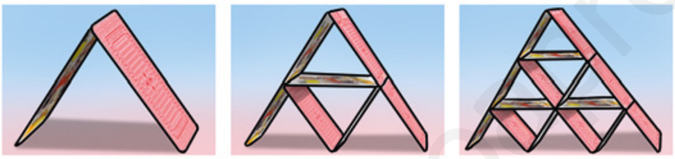
El número de palillos forma una progresión aritmética con $a_1 = 8$ y $d = 4$.

Por tanto, para construir el barquito número 100 necesita $a_{100} = 8 + 99 \cdot 4 = 404$ palillos.

Para construir todos los barquitos hasta el 100 habrá utilizado:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(8 + 404) \cdot 100}{2} = 20\,600 \text{ palillos}$$

34 Observa el número de naipes necesarios para formar un piso, dos pisos, tres pisos…



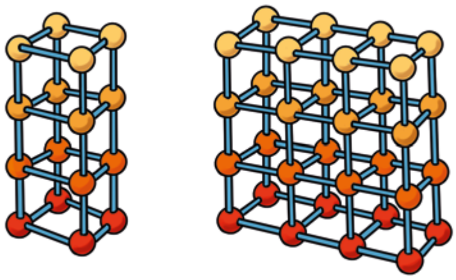
Indica cuál de estos es el término general:

I) $a_n = n + n^2$ II) $a_n = 2n^2 - 1$ III) $a_n = \dfrac{3n^2 + n}{2}$

¿Cuántos naipes se necesitan para uno de 10 pisos?

- El término general es el III) $a_n = \dfrac{3n^2 + n}{2}$.
- Para un castillo de naipes de 10 pisos se necesitan $a_{10} = \dfrac{3 \cdot 10^2 + 10}{2} = 62$ naipes.

35 Observa estas dos estructuras formadas por palos y bolas engarzables:



Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una estructura como la de la figura A, pero de n pisos. ¿Y para la figura B?

— Para la estructura A, se necesitan 4 bolas, 4 palos por cada piso y 4 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, en una estructura de n pisos se necesitan $4n$ bolas y $4n + 4(n - 1)$ palos, es decir, $8n - 4$ palos.

— Para la estructura B, se necesitan 8 bolas, 10 palos por cada piso y 8 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, para una estructura como la B, pero de n pisos, se necesitan $8n$ bolas y $10n + 8(n - 1)$ palos, es decir, $18n - 8$ palos.

Página 83

36 Una pelota de goma se lanza a 10 metros de altura y al caer rebota perdiendo el 40 % de altura en cada bote. ¿Cuántos botes da antes de pararse, si al caer desde una altura inferior a 4 centímetros ya no tiene suficiente energía para volver a subir y deja de botar?

Se lanza la pelota de goma $10 \cdot 100 = 1\,000$ cm hacia arriba y al caer rebota perdiendo 40 % de altura en cada bote, entonces, el índice de variación es 0,6.

Por cada bote que da la pelota hay que multiplicar la altura por 0,6.

Sea n el número de botes que da la pelota antes de pararse, por tanto, hay que calcular n para que $1000 \cdot 0{,}6^n \le 4$.

Con la calculadora:

0,6 $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ 1 000 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ … $\rightarrow$ Damos a $\boxed{=}$ hasta que aparezca un número menor o igual que 4.

Para que salga un número menor o igual que 4 debemos dar a $\boxed{=}$ 11 veces, $1\,000 \cdot 0{,}6^{11} = 3{,}63 \le 4$.

Por tanto, la pelota dará 11 botes antes de pararse.

37 Un tipo de bacterias se reproduce por bipartición cada 10 minutos.

Si en un cultivo tenemos 150 millones de bacterias, ¿cuántas habrá después de 8 horas? Expresa el resultado en notación científica.

Cada 10 minutos, las bacterias se multiplican por 2.

8 horas son 480 minutos $\rightarrow$ 48 períodos de 10 minutos.

Partiendo de 150 millones de bacterias = $1{,}5 \cdot 10^8$ bacterias:

$$1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 2^{48} \approx 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 2{,}82 \cdot 10^{14} = 4{,}23 \cdot 10^{22}$$

Después de 8 horas habrá $4{,}23 \cdot 10^{22}$ bacterias, aproximadamente.

AUTOEVALUACIÓN

Página 83

1 **Escribe los seis primeros términos de estas sucesiones:**

a) $a_n = n^2 + n$

b) $b_n = 15 - 3(n - 1)$

c) $c_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$

d) $d_n = \frac{(-1)^n}{2} + n$

e) $e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_n = e_{n-1} - 2e_{n-2}$

a) 2, 6, 12, 20, 30, 42

b) 15, 12, 9, 6, 3, 0

c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}$

e) 1, 2, 0, –4, –4, 4

2 **Escribe el término general de cada sucesión:**

a) **4, 11, 18, 25, 32, …**

b) **3, 12, 48, 192, 768, …**

c) **0, 3, 8, 15, 24, …**

d) **9; 3,5; –2; –7,5; –13; …**

a) $a_n = 4 + (n - 1)7 = 7n - 3$

b) $b_n = 3 \cdot (4)^{n-1}$

c) $c_1 = 0,\ c_n = c_{n-1} + (2n - 1)$

d) $d_n = 9 + (n - 1)\,(-5{,}5) = -5{,}5n + 14{,}5$

3 **Escribe el término general de estas progresiones aritméticas:**

a) **54, 65, 76, 87, …**

b) **114, 91, 68, 45, 22, …**

c) **3, –2, –7, –12, …**

d) **18,2; 20; 21,8; 23,6, …**

e) $a_1 = 7,\ d = -2{,}3$

f) $a_2 = 4,\ d = 4{,}5$

a) $a_n = 54 + (n - 1)11 = 11n + 43$

b) $b_n = 114 + (n - 1)23 = 23n + 91$

c) $c_n = 3 + (n - 1)\,(-5) = -5n + 8$

d) $d_n = 18{,}2 + (n - 1) \cdot 1{,}8 = 1{,}8n + 16{,}4$

e) $a_n = 7 + (n - 1)\,(-2{,}3) = -2{,}35n + 9{,}3$

f) $a_1 = 4 - 4{,}5 = -0{,}5 \ \rightarrow\ a_n = -0{,}5 + (n - 1) \cdot 4{,}5 = 4{,}5n - 5$

4 **Halla las sumas de los 10 primeros términos de estas progresiones aritméticas:**

a) **12, 26, 40, 54, 68, …** **b)** **9; 8,5; 8; 7,5; 7; …**

c) $\boldsymbol{a_1 = 4,\ d = 10}$ **d)** $\boldsymbol{a_1 = 60,\ d = -3}$

e) $\boldsymbol{a_1 = 64,\ a_3 = 48}$ **f)** $\boldsymbol{a_2 = -3,\ a_7 = 17}$

En todos los casos aplicaremos la fórmula $S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$

a) $a_1 = 12$; $d = 26 - 12 = 14$; $a_{10} = 12 + 9 \cdot 14 = 138$

$S_{10} = (12 + 132) \cdot 5 = 750$

b) $a_1 = 9$; $d = 8{,}5 - 9 = -0{,}5$; $a_{10} = 9 + 9 \cdot (-0{,}5) = 4{,}5$

$S_{10} = (9 + 4{,}5) \cdot 5 = 67{,}5$

c) $a_1 = 4$; $d = 10$; $a_{10} = 4 + 9 \cdot 10 = 94$

$S_{10} = (4 + 94) \cdot 5 = 490$

d) $a_1 = 60$; $d = -3$; $a_{10} = 60 + 9 \cdot (-3) = 33$

$S_{10} = (60 + 33) \cdot 5 = 465$

e) $a_1 = 64$; $a_3 = a_1 + 2 \cdot d \rightarrow 48 = 64 + 2 \cdot d \rightarrow d = -8$

$a_{10} = 64 + 9 \cdot (-8) = -8$

$S_{10} = (64 - 8) \cdot 5 = 280$

f) $a_7 = a_2 + 5 \cdot d \rightarrow 17 = -3 + 5 \cdot d \rightarrow d = \dfrac{14}{5}$

$a_1 = a_2 - d \rightarrow a_1 = -3 - \dfrac{14}{5} = -\dfrac{29}{5} = -5{,}8$

$a_{10} = -5{,}8 + 9 \cdot \left(\dfrac{14}{5}\right) = \dfrac{97}{5} = 19{,}4$

$S_{10} = (-5{,}8 + 19{,}4) \cdot 5 = 68$

5 **Calcula los seis primeros términos de estas progresiones geométricas:**

a) $\boldsymbol{a_1 = 5,\ r = 2}$ **b)** $\boldsymbol{a_1 = 48,\ r = 0{,}5}$

c) $\boldsymbol{a_1 = -2,\ r = -3}$ **d)** $\boldsymbol{a_1 = 1\,250,\ r = 0{,}2}$

e) $\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 5^{n-1}}$ **f)** $\boldsymbol{a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

g) $\boldsymbol{a_n = 6 \cdot (-2)^{n-1}}$ **h)** $\boldsymbol{a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

a) 5, 10, 20, 40, 80, 160

b) 48; 24; 12; 6; 3; 1,5

c) –2, 6, –18, 54, –162, 486

d) 1 250; 250; 50; 10; 2; 0,4

e) 2, 10, 50, 250, 1 250, 6 250

f) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{243}$

g) 6, –12, 24, –48, 96, –192

h) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{128}$

6 **Asocia cada progresión geométrica con su término general:**

a) 2, 8, 32, 128, 512, …	**I)** $a_n = (-2)^{n-1}$
b) 80, 40, 20, 10, 5, …	**II)** $a_n = 0{,}07 \cdot 100^n$
c) 1, –2, 4, –8, 16, …	**III)** $a_n = 160 \cdot 0{,}5^n$
d) 7, 700, 70 000, …	**IV)** $a_n = 840 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{n-1}$
e) 840; 42; 2,1; 0,105; …	**V)** $a_n = 0{,}5 \cdot 4^n$

a) → V)   b) → III)   c) → I)   d) → II)   e) → IV)

7 **Una persona que estaba de vacaciones gastó 100 € el primer día, y en cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. El dinero le duró 12 días. ¿Cuánto dinero llevó para sus vacaciones?**

La persona se gasta 100 € el primer día → $a_1 = 100$

—Cada día gasta 5 euros → $d = -5$

—El dinero le dura 12 días → la progresión tiene 12 términos, a_1, a_2, a_3, …, a_{12}, cada término es un día.

—El último día se gastó $a_{12} = 100 - 5(12 - 1)$ → $a_{12} = 100 - 55 = 45$ €.

—Para saber el dinero que llevó para sus vacaciones solo hace falta calcular S_{12}.

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ €}.$$

Para sus vacaciones llevó 870 €.

6 EL LENGUAJE ALGEBRAICO

1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Página 87

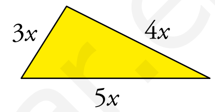
1 Expresa en lenguaje algebraico.

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c) La edad de Alberto ahora y dentro de siete años.

d) El perímetro de este triángulo:



e) Eva tiene cuatro años menos que Óscar. (Expresa la edad de cada uno).

a) $2x - \frac{x}{3}$

b) $2(x + 3)$

c) La edad de Alberto ahora $\rightarrow$ x

La edad de Alberto dentro de 7 años $\rightarrow$ $x + 7$

d) $3x + 4x + 5x = 12x$

e) La edad de Oscar $\rightarrow$ x

La edad de Eva $\rightarrow$ $x - 4$

2 MONOMIOS

Página 88

1 Indica el coeficiente y el grado de cada monomio:

a) $-2x^7$ **b)** x^9 **c)** x **d)** 5

a) $-2x^2 \rightarrow$ coeficiente $= -2$ y grado 2
b) $x^9 \rightarrow$ coeficiente $= 1$ y grado 9
c) $x \rightarrow$ coeficiente $= 1$ y grado 1
d) $5 \rightarrow$ coeficiente $= 5$ y grado 0

2 Di cuáles de los siguientes monomios son semejantes a $5x^2$:

$$7x^2 \quad 5x^3 \quad 5x \quad 5xy \quad x^2 \quad 3x^2y$$

Los monomios que son semejantes a $5x^2$ son $7x^2$ y x^2.

3 Escribe dos monomios semejantes a cada uno de los siguientes:

a) $-5xy$ **b)** $2x^4$ **c)** x **d)** $3xy^2$

a) Cualquier monomio que tenga parte literal xy.
Por ejemplo: $3xy$, xy, $5xy$

b) Cualquier monomio que tenga parte literal x^4.
Por ejemplo: $3x^4$, x^4, $5x^4$

c) Cualquier monomio que tenga parte literal x.
Por ejemplo: $3x$, $-x$, $5x$

d) Cualquier monomio que tenga parte literal xy^2.
Por ejemplo: $-3xy^2$, xy^2, $5xy^2$

4 Halla el valor numérico para $x = 3$, $y = -2$:

a) $5x^3$ **b)** $2xy$ **c)** xy^2 **d)** $-xy$

a) El valor numérico de $5x^3$ para $x = 3$ es $5 \cdot 3^3 = 135$.
b) El valor numérico de $2xy$ para $x = 3$, $y = -2$ es $2 \cdot 3 \cdot (-2) = -12$.
c) El valor numérico de xy^2 para $x = 3$, $y = -2$ es $3 \cdot (-2)^2 = 12$.
d) El valor numérico de $-xy$ para $x = 3$, $y = -2$ es $(-3) \cdot (-2) = 6$.

5 **Efectúa las siguientes sumas de monomios:**

a) $5x - 3x + 4x + 7x - 11x + x$

b) $3x^2y - 5x^2y + 2x^2y + x^2y$

c) $7x^3 - 11x^3 + 3y^3 - y^3 + 2y^3$

a) $5x - 3x + 4x + 7x - 11x + x = 3x$

b) $3x^2y - 5x^2y + 2x^2y + x^2y = x^2y$

c) $7x^3 - 11x^3 + 3y^3 - y^3 + 2y^3 = -4x^3 + 4y^3$

6 **Opera.**

a) $(3x^2) \cdot (5x^4)$ **b)** $(x^2) \cdot (x)$ **c)** $(5x^3)^2$ **d)** $(2x)^4$

a) $(3x^2) \cdot (5x^4) = 15x^6$ b) $(x^2) \cdot (x) = x^3$

c) $(5x^3)^2 = 25x^6$ d) $(2x)^4 = 16x^4$

7 **Reduce.**

a) $(5x - 4) - (2x + 3)$

b) $(x^2 + 5x) - (4x - 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 4)$

a) $(5x - 4) - (2x + 3) = 5x - 4 - 2x - 3 = 3x - 7$

b) $(x^2 + 5x) - (4x - 1) = x^2 + 5x - 4x + 1 = x^2 + x + 1$

c) $(2x^3 - x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 4) = 2x^3 - x^2 + x - 1 - x^2 - x + 4 = 2x^3 - 2x^2 + 3$

8 **Divide los monomios de cada caso:**

a) $10x^2 : 5x$ **b)** $4x^3 : 6x^5$**c)** $4xy^2 : 6xy^2$ **d)** $8x^3y : 4x^5y^3$

a) $\dfrac{10x^2}{5x} = 2x$ b) $\dfrac{4x^3}{6x^5} = \dfrac{2}{3x^2}$ c) $\dfrac{4xy^2}{6xy^2} = \dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{8x^3y}{4x^5y^3} = \dfrac{2}{x^2y^2}$

3 ▶ POLINOMIOS

Página 90

1 Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de un número más su cubo.

b) La suma de dos números naturales consecutivos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles (llama x al lado desigual e y a cada uno de los otros dos lados).

a) $x + x^3$ b) $x + (x + 1)$ c) $x + 2y$

2 Di el grado de cada uno de los polinomios siguientes:

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$

b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$

c) $x^2 + 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 3 - 4x^3$

d) $2x^2 - 3x - x^2 + 2x - x^2 + x - 3$

e) $3x + 2xy - x^2y^3 - xy + 3x^2y^3 - xy$

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$ tiene grado 5.

b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$ tiene grado 6.

c) $x^2 + 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 3 - 4x^3 = -4x^2 - 3$ tiene grado 2.

d) $2x^2 - 3x - x^2 + 2x - x^2 + x - 3 = -3$ tiene grado 0.

e) $3x + 2xy - x^2y^3 - xy + 3x^2y^3 - xy = 2x^2y^3 + 3x$ tiene grado 5.

Página 91

3 **Sean $P = x^4 - 3x^3 + 5x + 3$, $Q = 5x^3 + 3x^2 - 1$. Halla $P + Q$ y $P - Q$.**

$P = x^4 - 3x^3 + 5x + 3 \qquad Q = 5x^3 + 3x^2 - 1$

$P + Q = (x^4 - 3x^3 + 5x + 3) + (5x^3 + 3x^2 - 1) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$

$P - Q = (x^4 - 3x^3 + 5x + 3) - (5x^3 + 3x^2 - 1) = x^4 - 3x^3 + 5x + 3 - 5x^3 - 3x^2 + 1 =$
$= x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 5x + 4$

4 **Efectúa estos productos:**

a) $2x(3x^2 - 4x)$ **b)** $5(x^3 - 3x)$ **c)** $4x^2(-2x + 3)$

d) $-2x(x^2 - x + 1)$ **e)** $-6(x^3 - 4x + 2)$ **f)** $-x(x^4 - 2x^2 + 3)$

a) $2x(3x^2 - 4x) = 6x^3 - 8x^2$

b) $5(x^3 - 3x) = 5x^3 - 15x$

c) $4x^2(-2x + 3) = -8x^3 + 12x^2$

d) $-2x(x^2 - x + 1) = -2x^3 + 2x^2 - 2x$

e) $-6(x^3 - 4x + 2) = -6x^3 + 24x - 12$

f) $-x(x^4 - 2x^2 + 3) = -x^5 + 2x^3 - 3x$

5 **Halla los productos siguientes:**

a) $x(2x + y + 1)$ **b)** $2a^2(3a^2 + 5a^3)$

c) $ab(a + b)$ **d)** $5(3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y(x + y + 1)$ **f)** $5xy^2(2x + 3y)$

g) $6x^2y^2(x^2 - x + 1)$ **h)** $-2(5x^3 + 3x^2 - 8)$

i) $3a^2b^3(a - b + 1)$ **j)** $-2x(3x^2 - 5x + 8)$

a) $x(2x + y + 1) = 2x^2 + xy + x$

b) $2a^2(3a^2 + 5a^3) = 6a^4 + 10a^5$

c) $ab(a + b) = a^2b + ab^2$

d) $5(3x^2 + 7x + 11) = 15x^2 + 35x + 55$

e) $x^2y(x + y + 1) = x^3y + x^2y^2 + x^2y$

f) $5xy^2(2x + 3y) = 10x^2y^2 + 15xy^3$

g) $6x^2y^2(x^2 - x + 1) = 6x^4y^2 - 6x^3y^2 + 6x^2y^2$

h) $-2(5x^3 + 3x^2 - 8) = -10x^3 - 6x^2 + 16$

i) $3a^2b^3(a - b + 1) = 3a^3b^3 - 3a^2b^4 + 3a^2b^3$

j) $-2x(3x^2 - 5x + 8) = -6x^3 + 10x^2 - 16x$

Página 92

6 **Dados los polinomios $P = 3x^2 - 5$, $Q = x^2 - 3x + 2$, $R = -2x + 5$, calcula:**

a) $P \cdot Q$ **b)** $P \cdot R$ **c)** $Q \cdot R$

$P = 3x^2 - 5$ $Q = x^2 - 3x + 2$ $R = -2x + 5$

a) $P \cdot Q = (3x^2 - 5) \cdot (x^2 - 3x + 2) = 3x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 5x^2 + 15x - 10 = 3x^4 - 9x^3 + x^2 + 15x - 10$

b) $P \cdot R = (3x^2 - 5) \cdot (-2x + 5) = -6x^3 + 15x^2 + 10x - 25$

c) $Q \cdot R = (x^2 - 3x + 2) \cdot (-2x + 5) = -2x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 15x - 4x + 10 = -2x^3 + 11x^2 - 19x + 10$

7 **Opera y simplifica.**

a) $2x(3x^2 - 2) + 5(3x - 4)$

b) $(x^2 - 3)(x + 1) - x(2x^2 + 5x)$

c) $(3x - 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 4x)$

a) $2x(3x^2 - 2) + 5(3x - 4) = 6x^3 - 4x + 15x - 20 = 6x^3 + 11x - 20$

b) $(x^2 - 3)(x + 1) - x(2x^2 + 5x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 - 2x^3 - 5x^2 = -x^3 - 4x^2 - 3x - 3$

c) $(3x - 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 4x) = 6x^2 + 3x - 4x - 2 - 2x^2 - 8x = 4x^2 - 9x - 2$

8 **Extrae factor común en cada caso:**

a) $2xy + 3xy^2$ **b)** $2x^2 + 2x + 2y$

c) $2x^2 + 2x + 4$ **d)** $3x^2 + 4x$

e) $5x^2 + 10x$ **f)** $4x^2 + 8x$

g) $3x^2 + 3x + 3$ **h)** $6x^2 + 9x - 3$

i) $5xy + 4x^2$ **j)** $x^3 + x^2 + x$

k) $2y^3 - 8x^2y$ **l)** $4x^2 + 16x^2y - 8$

a) $2xy + 3xy^2 = xy(2 + 3y)$ b) $2x^2 + 2x + 2y = 2(x^2 + x + y)$

c) $2x^2 + 2x + 4 = 2(x^2 + x + 2)$ d) $3x^2 + 4x = x(3x + 4)$

e) $5x^2 + 10x = 5x(x + 2)$ f) $4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$

g) $3x^2 + 3x + 3 = 3(x^2 + x + 1)$ h) $6x^2 + 9x - 3 = 3(x^2 + 3x - 1)$

i) $5xy + 4x^2 = x(5y + 4x)$ j) $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$

k) $2y^3 - 8x^2y = 2y(y^2 - 4x^2)$ l) $4x^2 + 16x^2y - 8 = 4(x^2 + 4x^2y - 2)$

4 IDENTIDADES

Página 93

1 **Completa para que se cumplan estas igualdades:**

a) $(x+2)^2 = x^2 + \square x + 4$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 10x + \square$

c) $(x+7)(x-7) = x^2 - \square$

d) $(2x-3)^2 = \square x^2 - \square x + 9$

e) $(-x+3)^2 = x^2 \square 6x \square 9$

f) $(2x-1)(2x+1) = \square x^2 - 1$

a) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

c) $(x+7)(x-7) = x^2 - 49$

d) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

e) $(-x+3)^2 = x^2 - 6x + 9$

f) $(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$

2 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $(x+1)^2$

b) $(x+3)^2$

c) $(x-3)^2$

d) $(x+1)(x-1)$

e) $(x+3)(x-3)$

f) $(2x-1)^2$

g) $(5x+2)^2$

h) $(5x+2y)^2$

i) $(2x-5)(2x+5)$

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

c) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

d) $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

e) $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$

f) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

g) $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$

h) $(5x+2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$

i) $(2x+5)(2x-5) = 4x^2 - 25$

Página 95

3 Expresa como una suma por una diferencia.

a) $x^2 - 49$ **b)** $x^2 - 81$ **c)** $x^2 - 100$

d) $4x^2 - 36$ **e)** $9x^2 - 1$ **f)** $16x^2 - \frac{1}{4}$

a) $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$

b) $x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$

c) $x^2 - 100 = (x + 10)(x - 10)$

d) $4x^2 - 36 = (2x + 6)(2x - 6)$

e) $9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$

f) $16x^2 - \frac{1}{4} = \left(4x + \frac{1}{2}\right)\left(4x - \frac{1}{2}\right)$

4 Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia.

a) $x^2 + 16 + 8x$ **b)** $x^2 + 25 - 10x$ **c)** $x^2 + 36 - 12x$

d) $x^2 + 36 + 12x$ **e)** $9x^2 + 4 + 12x$ **f)** $25x^2 + 1 - 10x$

a) $x^2 + 16 + 8x = (x + 4)^2$

b) $x^2 + 25 - 10x = (x - 5)^2$

c) $x^2 + 36 - 12x = (x - 6)^2$

d) $x^2 + 36 + 12x = (x + 6)^2$

e) $9x^2 + 4 + 12x = (3x + 2)^2$

f) $25x^2 + 1 - 10x = (5x - 1)^2$

5 Expresa en forma de producto.

a) $x^2 - 1$ **b)** $x^2 - 4$ **c)** $4x^2 - 25$

d) $x^2 + 4 + 4x$ **e)** $x^2 + 2x + 1$ **f)** $4x^2 + 9 - 12x$

g) $4x^2 + 4x + 1$ **h)** $x^2 - 2x + 1$ **i)** $\frac{x^2}{4} + x + 1$

a) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

b) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

c) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

d) $x^2 + 4 + 4x = (x + 2)^2$

e) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

f) $4x^2 + 9 - 12x = (2x - 3)^2$

g) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

h) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

i) $\frac{x^2}{4} + x + 1 = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

6 Simplifica.

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4)$ **b)** $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50)$ **d)** $(2x - 4)^2 - (2x + 4)(2x - 4)$

a) $(x - 2)(x + 2) - (x^2 + 4) = x^2 - 4 - x^2 - 4 = -8$

b) $(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1 - (9x^2 + 6x + 1) = 9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 = -12x$

c) $2(x - 5)^2 - (2x^2 + 3x + 50) = 2(x^2 - 10x + 25) - (2x^2 + 3x + 50) =$
$= 2x^2 - 20x + 50 - 2x^2 - 3x - 50 = -23x$

d) $(2x - 4)^2 - (2x + 4)(2x - 4) = 4x^2 + 16 - 16x - (4x^2 - 16) = 4x^2 + 16 - 16x - 4x^2 + 16 =$
$= 32 - 16x$

7 **Simplifica.**

a) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40)$

b) $3x^2 - 2(x + 5) - (x + 3)^2 + 19$

c) $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2]$

a) $3(x^2 + 5) - (x^2 + 40) = 3x^2 + 15 - x^2 - 40 = 2x^2 - 25$

b) $3x^2 - 2(x + 5) - (x + 3)^2 + 19 = 3x^2 - 2x - 10 - (x^2 + 6x + 9) + 19 =$
$= 3x^2 - 2x - 10 - x^2 - 6x - 9 + 19 = 2x^2 - 8x$

c) $(x + 3)^2 - [x^2 + (x - 3)^2] = x^2 + 6x + 9 - (x^2 + x^2 - 6x + 9) =$
$= x^2 + 6x + 9 - (2x^2 - 6x + 9) = x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 6x - 9 = -x^2 + 12x$

8 **Saca factor común en el numerador y en el denominador y simplifica.**

a) $\dfrac{5x - 5}{2x^2 - 2x}$ **b)** $\dfrac{3x^3 - 3x^2}{6x^3 - 12x^2}$ **c)** $\dfrac{4x^3 - 2x}{6x^4 - 3x^2}$

a) $\dfrac{5x - 5}{2x^2 - 2x} = \dfrac{5(x - 1)}{2x(x - 1)} = \dfrac{5}{2x}$

b) $\dfrac{3x^3 - 3x^2}{6x^3 - 12x^2} = \dfrac{3x^2(x - 1)}{6x^2(x - 2)} = \dfrac{x - 1}{2(x - 2)}$

c) $\dfrac{4x^3 - 2x}{6x^4 - 3x^2} = \dfrac{2x(2x^2 - 1)}{3x^2(2x^2 - 1)} = \dfrac{2}{3x}$

9 **Utiliza las identidades notables para factorizar y, después, simplifica.**

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ **b)** $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$ **c)** $\dfrac{9x^2 - 4}{9x^2 + 4 - 12x}$

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} = \dfrac{x + 3}{x - 3}$

c) $\dfrac{9x^2 - 4}{9x^2 + 4 - 12x} = \dfrac{(3x - 2)(3x + 2)}{(3x - 2)^2} = \dfrac{3x + 2}{3x - 2}$

10 **Reduce.**

a) $\dfrac{15x + 15}{3x^2 + 6x + 3}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 5x}{x^3 - 10x^2 + 25x}$ **c)** $\dfrac{3x^3 - 12x}{6x^3 - 12x^2}$

a) $\dfrac{15x + 15}{3x^2 + 6x + 3} = \dfrac{15(x + 1)}{3(x^2 + 2x + 1)} = \dfrac{15(x + 1)}{3(x + 1)^2} = \dfrac{5}{x + 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 5x}{x^3 - 10x^2 + 25x} = \dfrac{x(x - 5)}{x(x^2 - 10x + 25)} = \dfrac{x(x - 5)}{x(x - 5)^2} = \dfrac{1}{x - 5}$

c) $\dfrac{3x^3 - 12x}{6x^3 - 12x^2} = \dfrac{3x(x^2 - 4)}{6x^2(x - 2)} = \dfrac{3x(x + 2)(x - 2)}{6x^2(x - 2)} = \dfrac{x + 2}{2x}$

11 **Multiplica por 8 la siguiente expresión y simplifica el resultado:**

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$$

$$8\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{8x}{2} + \frac{8x}{4} + \frac{8x}{8} - \frac{24x}{4} - \frac{8}{4} = 4x + 2x + x - 6x - 2 = x - 2$$

12 Multiplica por 9 la expresión siguiente y simplifica el resultado:

$$\boldsymbol{x - \frac{2x-3}{9} - \frac{x-1}{3} - \frac{12x+4}{9}}$$

$$9\left(x - \frac{2x-3}{9} - \frac{x-1}{3} - \frac{12x+4}{9}\right) = 9x - \frac{9(2x-3)}{9} - \frac{9(x-1)}{3} - \frac{9(12x+4)}{9} =$$

$= 9x - (2x - 3) - 3(x - 1) - (12x + 4) = 9x - 2x + 3 - 3x + 3 - 12x - 4 = -8x + 2$

13 Multiplica cada expresión por el mínimo común múltiplo de sus denominadores y simplifica:

a) $\boldsymbol{x - \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6} - \frac{2x-3}{9}}$ **b)** $\boldsymbol{\frac{x+1}{5} - \frac{x}{3} + \frac{2x-5}{15} + 2x}$

a) Mín.c.m $(2, 6, 9) = 18$

$$18\left(x - \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6} - \frac{2x-3}{9}\right) = 18x - \frac{18x}{2} + \frac{18(x-1)}{6} - \frac{18(2x-3)}{9} =$$

$= 18x - 9x + 3(x - 1) - 2(2x - 3) = 18x - 9x + 3x - 3 - 4x + 6 = 8x + 3$

b) Mín.c.m $(5, 3, 15) = 15$

$$15\left(\frac{x+1}{5} - \frac{x}{3} + \frac{2x-5}{15} + 2x\right) = \frac{15(x+1)}{5} - \frac{15x}{3} + \frac{15(2x-5)}{15} + 30x =$$

$= 3(x + 1) - 5x + (2x - 5) + 30x = 3x + 3 - 5x + 2x - 5 + 30x = 30x - 2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 96

Practica

Traducción al lenguaje alebraico

1 **Asocia a cada uno de los siguientes enunciados una de las expresiones algebraicas:**

a) A un número se le quita 7.

b) El doble de un número más su cuadrado.

c) Un múltiplo de 3 menos 1.

d) El 20 % de un número.

e) Cuatro veces un número menos sus dos tercios.

f) El precio de un pantalón aumentado en un 10 %.

g) Un número impar.

$0,2x$
$2x + 1$
$2x + x^2$
$1,1x$
$4x - \frac{2x}{3}$
$3x - 1$
$x - 7$

a) A un número se le quita 7 $\to$ $x - 7$

b) El doble de un número más su cuadrado $\to$ $2x + x^2$

c) Un múltiplo de 3 menos 1 $\to$ $3x - 1$

d) El 20 % de un número $\to$ $0,2x$

e) Cuatro veces un número menos sus dos tercios $\to$ $4x - \frac{2x}{3}$

f) El precio de un pantalón aumentado un 10 % $\to$ $1,1x$

g) Un número impar $\to$ $2x + 1$

2 **Llamando x a un número entero, expresa en lenguaje algebraico estos enunciados:**

a) Los tres quintos del número, menos 1.

b) Los tres quintos de su anterior.

c) La suma del número con su anterior y su siguiente.

d) El producto del número por su siguiente.

e) La suma del número con los dos que le preceden.

f) La suma del número con su cuadrado.

a) $\frac{3x}{5} - 1$ b) $\frac{3}{5}(x - 1)$ c) $(x - 1) + x + (x + 1)$

d) $x(x + 1)$ e) $x + (x - 1) + (x - 2)$ f) $x + x^2$

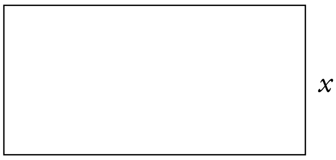
3 **Llama x al ancho de un rectángulo y expresa su altura en cada caso:**

a) La altura es la mitad del ancho.

b) La altura es 20 cm menor que el ancho.

c) La altura es los tres cuartos del ancho.

d) La altura es un 20 % menor que su ancho.



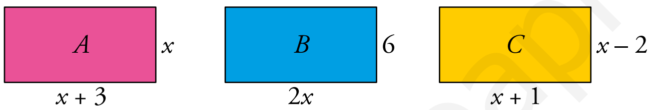
$x \rightarrow$ ancho del rectángulo

a) $\frac{x}{2}$ b) $x - 20$ c) $\frac{3x}{4}$ d) $0{,}8x$

4 **Asocia cada una de las siguientes expresiones al perímetro y al área de los rectángulos A, B y C que tienes debajo:**

a) $12x$ **b)** $4x - 2$ **c)** $4x + 6$

d) $4x + 12$ **e)** $x^2 + 3x$ **f)** $x^2 - x - 2$



a) $12x$ es el área de B

b) $4x - 2$ es el perímetro de C.

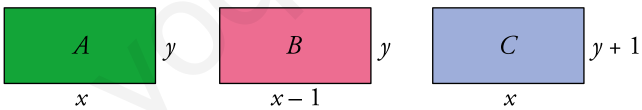
c) $4x + 6$ es el perímetro de A.

d) $4x + 12$ es el perímetro de B.

e) $x^2 + 3x$ es el área de A.

f) $x^2 - x - 2$ es el área de C.

5 **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:**

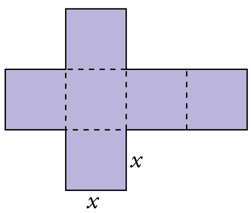


a) $A \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy \end{cases}$

b) $B \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y \end{cases}$

c) $C \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x \end{cases}$

6 **Observa la figura y expresa con un monomio cada uno de los conceptos que tienes debajo:**



a) Su perímetro.

b) Su área.

c) El volumen del cubo que se puede formar con esos seis cuadrados.

a) $14x$ b) $6x^2$ c) x^3

8 **Llamando x a la edad de Elvira e y a la de su marido, expresa algebraicamente:**

a) La edad de la hija mayor, que tiene tres años más de los que su padre le saca a su madre.

b) La edad de la hija menor, que tiene tres años menos que su hermana.

c) Las edades de Elvira, su marido y sus dos hijas suman 85 años.

a) $(y - x) + 3$ b) $y - x$ c) $x + y + (y - x) + 3 + y - x = 85$

9 **Traduce a lenguaje algebraico, utilizando dos incógnitas:**

a) El cuadrado de la suma de dos números.

b) El doble del producto de dos números.

c) La semisuma de dos números.

$x \rightarrow$ número, $y \rightarrow$ otro número

a) $(x + y)^2$ b) $2xy$ c) $\frac{x + y}{2}$

Página 97

Monomios

10 **Indica el grado de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:**

a) $-5xy$ **b)** $(-7x)^3$ **c)** $8x$ **d)** $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{4}{5}x^3$ **g)** $\frac{-3xy}{5}$ **h)** $\frac{1}{2}x$

a) Grado 2. b) Grado 3. c) Grado 1. d) Grado 4.

e) Grado 0. f) Grado 3. g) Grado 2. h) Grado 1.

Son semejantes: a) y g); b) y f); c) y h)

11 **Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.**

a) $-5 \cdot (-1) \cdot (3) = 15$

b) $\left(-7 \cdot (-1)\right)^3 = 343$

c) $8 \cdot (-1) = -8$

d) $\left((-1) \cdot (3)\right)^2 = 9$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{4}{5}(-1)^3 = -\frac{4}{5}$

g) $\frac{-3 \cdot (-1) \cdot (3)}{5} = \frac{9}{5}$

h) $\frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$

12 **Reduce.**

a) $3a + 5a - a - 6a$

b) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$

c) $2a + 7b - 3a + b - 2b$

d) $6x^2y - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

a) $3a + 5a - a - 6a = 8a - 7a = a$

b) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2 = 6x^2 - 4x + 2$

c) $2a + 7b - 3a + b - 2b = -a + 6b$

d) $6x^2y - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2 = 4x^2y - 4xy^2$

13 **Efectúa los siguientes productos de monomios:**

a) $(6x^2) \cdot (-3x)$

b) $(2xy^2) \cdot (4x^2y)$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^3\right)$

d) $\left(\frac{1}{4}xy\right) \cdot \left(\frac{3}{2}xy\right)$

a) $6x^2\,(-3x) = -18x^3$

b) $(2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$

d) $\left(\frac{1}{4}xy\right) \cdot \left(\frac{3}{2}xy\right) = \frac{3}{8}x^2y^2$

14 **Resuelve estos cocientes:**

a) $15x^2 : 5x^2$ **b)** $6x^5 : 9x^2$ **c)** $4x^2y : 12xy^2$

d) $\frac{4x^4}{12x^4}$ **e)** $\frac{15x^2y^3}{3xy^2}$ **f)** $\frac{7xy^3}{14x^2y^2}$

a) $15x^2 : 5x^2 = 3$

b) $6x^5 : 9x^2 = \frac{2}{3}x^3$

c) $4x^2y : 12xy^2 = \frac{x}{3y}$

d) $\frac{4x^4}{12x^4} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{15x^2y^3}{3xy^2} = 5xy$

f) $\frac{7xy^3}{14x^2y^2} = \frac{y}{2x}$

15 **Observa el ejemplo y resuelve.**

- $\left(\frac{1}{5}x^3y\right):\left(\frac{1}{10}x^2\right) = \frac{x^3y}{5} : \frac{x^2}{10} = \frac{10x^3y}{5x^2} = 2xy$

a) $\left(\frac{1}{2}x^2\right):\left(\frac{1}{4}x\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{3}x^4\right):\left(\frac{1}{6}x^3\right)$

c) $\left(\frac{1}{6}x^2y^2\right):\left(\frac{2}{3}x^2y\right)$ **d)** $\left(\frac{3}{5}x^2y\right):\frac{x^3y}{6}$

a) $\left(\frac{1}{2}x^2\right):\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{x^2}{2} : \frac{x}{4} = \frac{4x^2}{2x} = 2x$

b) $\left(\frac{1}{3}x^4\right):\left(\frac{1}{6}x^3\right) = \frac{x^4}{3} : \frac{x^3}{6} = \frac{6x^4}{3x^3} = 2x$

c) $\left(\frac{1}{6}x^2y^2\right):\left(\frac{2}{3}x^2y\right) = \frac{x^2y^2}{6} : \frac{2x^2y}{3} = \frac{3x^2y^2}{12x^2y} = \frac{1}{4}y$

d) $\left(\frac{3}{5}x^2y\right):\frac{x^3y}{6} = \frac{3x^2y}{5} : \frac{x^3y}{6} = \frac{18x^2y}{5x^3y} = \frac{18}{5x}$

Polinomios

16 **Considera estos polinomios:**

$A = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ $B = 2x^2 - 6x + 3$ $C = 2x^4 + x^3 - x - 4$

Calcula: $A + B$ $A + C$ $A + B + C$ $A - B$ $C - B$

$A + B = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) + (2x^2 - 6x + 3) = x^4 - x^2 - x + 2$

$A + C = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) + (2x^4 + x^3 - x - 4) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

$A + B + C = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) + (2x^2 - 6x + 3) + (2x^4 + x^3 - x - 4) = 3x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

$A - B = (x^4 - 3x^2 + 5x - 1) - (2x^2 - 6x + 3) = x^4 - 3x^2 + 5x - 1 - 2x^2 + 6x - 3 =$
$= x^4 - 5x^2 + 11x - 4$

$C - B = (2x^4 + x^3 - x - 4) - (2x^2 - 6x + 3) = 2x^4 + x^3 - x - 4 - 2x^2 + 6x - 3 =$
$= 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

17 **Simplifica estas expresiones:**

a) $2x^3 - 5x + 3 - 1 - 2x^3 + x^2$ **b)** $(2x^2 + 5x - 7) - (x^2 - 6x + 1)$

c) $3x - (2x + 8) - (x^2 - 3x)$ **d)** $7 - 2(x^2 + 3) + x(x - 3)$

a) $2x^3 - 5x + 3 - 1 - 2x^3 + x^2 = x^2 - 5x + 2$

b) $(2x^2 + 5x - 7) - (x^2 - 6x + 1) = 2x^2 + 5x - 7 - x^2 + 6x - 1 = x^2 + 11x - 8$

c) $3x - (2x + 8) - (x^2 - 3x) = 3x - 2x - 8 - x^2 + 3x = -x^2 + 4x - 8$

d) $7 - 2(x^2 + 3) + x(x - 3) = 7 - 2x^2 - 6 + x^2 - 3x = -x^2 - 3x + 1$

18 **Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante en cada caso:**

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$ **b)** $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$
$= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \rightarrow$ Grado 3.

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$
$= -12x^3 + 3x^2 - 6x \rightarrow$ Grado 3.

19 **Multiplica.**

a) $(x + 1) \cdot (x + 3)$ **b)** $(x - 2) \cdot (2x - 1)$

c) $(3x + 1) \cdot (5x - 3)$ **d)** $3(x + 2) \cdot (x - 4)$

a) $(x + 1) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + x + 3 = x^2 + 4x + 3$

b) $(x - 2) \cdot (2x - 1) = 2x^2 - x - 4x + 2 = 2x^2 - 5x + 2$

c) $(3x + 1) \cdot (5x - 3) = 15x^2 - 9x + 5x - 3 = 15x^2 - 4x - 3$

d) $3(x + 2) \cdot (x - 4) = 3(x^2 - 4x + 2x - 8) = 3(x^2 - 2x -8) = 3x^2 - 6x - 24$

20 **Opera y simplifica.**

a) $(2x^2 - x + 3) \cdot (x - 3)$ **b)** $(x^2 - 5x - 1) \cdot (x - 2)$

c) $(3x^3 - 5x^2 + 6) \cdot (2x + 1)$ **d)** $(2x^2 + x - 3) \cdot (x^2 - 2)$

a) $(2x^2 - x + 3) \cdot (x - 3) = 2x^3 - 6x^2 - x^2 + 3x + 3x - 9 = 2x^3 - 7x^2 + 6x - 9$

b) $(x^2 - 5x - 1) \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 10x - x + 2 = x^3 - 7x^2 + 9x + 3$

c) $(3x^3 - 5x^2 + 6) \cdot (2x + 1) = 6x^4 + 3x^3 - 10x^3 - 5x^2 + 12x + 6 = 6x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 12x + 6$

d) $(2x^2 + x - 3) \cdot (x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2 + x^3 - 2x - 3x^2 + 6 = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 6$

21 **Piensa y sustituye en tu cuaderno los huecos por los números que faltan.**

a) $(\square x + 3) \cdot (x + \square) = 2x^2 + 5x + 3$

b) $(2x^2 - \square x) \cdot (\square x + 2) = 10x^3 - 11x^2 - 6x$

a) $(2x + 3) \cdot (x + 1) = 2x^2 + 5x + 3$

b) $(2x^2 - 3x) \cdot (5x + 2) = 10x^3 - 11x^2 - 6x$

Factor común

22 **Extrae factor común, teniendo en cuenta el ejemplo, cuando corresponda.**

- $2x^2 - 6x^3 = 2x^2 \cdot (1 - 3x)$

a) $3x + 3y$ **b)** $5x - 10y$ **c)** $2xy - 3x$

d) $2x - 3x^2$ **e)** $2x - x^2$ **f)** $10xy^2 + 15x^2y$

g) $x + x^2$ **h)** $3x^2 + 6x^3$ **i)** $12xy^3 + 4xy$

a) $3x + 3y = 3(x + y)$

b) $5x - 10y = 5(x - 2y)$

c) $2xy - 3x = x(2y - 3)$

d) $2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$

e) $2x - x^2 = x(2 - x)$

f) $10xy^2 + 15x^2y = 5xy\,(2y + 3x)$

g) $x + x^2 = x(1 + x)$

h) $3x^2 + 6x^3 = 3x^2(1 + 2x)$

i) $12xy^3 + 4xy = 4xy(3y^2 +1)$

23 **Extrae factor común.**

a) $5x + 5y + 5z$ **b)** $5x + 3xy$ **c)** $3x^2 + 4x$

d) $5x^3 + 3x^2$ **e)** $2x^4 - 6x^2$ **f)** $2x^3 + 3x^2 + 5x$

g) $x^6 + x^4 + x$ **h)** $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x$ **i)** $2x^2y - 2xy$

a) $5x + 5y + 5z = 5(x + y + z)$

b) $5x + 3xy = x(5 + 3y)$

c) $3x^2 + 4x = x(3x + 4)$

d) $5x^3 + 3x^2 = x^2(5x + 3)$

e) $2x^4 - 6x^2 = 2x^2(x^2 - 3)$

f) $2x^3 + 3x^2 + 5x = x(2x^2 + 3x + 5)$

g) $x^6 + x^4 + x = x(x^5 + x^3 + 1)$

h) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x^3 + 1)$

i) $2x^2y - 2xy = 2xy(x - 1)$

24 **Copia y completa en tu cuaderno.**

a) $5x(\square + \square) = 5x^2 + 5x$

b) $3x^2(\square + \square) = 9x^3 - 6x^2$

c) $\square(3x - 1) = 6x^3 - 2x^2$

d) $\square(x + y) = x^2y + xy^2$

a) $5x\,(x + 1) = 5x^2 + 5x$

b) $3x^2\,(3x + (-2)) = 9x^3 - 6x^2$

c) $2x^2\,(3x - 1) = 6x^3 - 2x^2$

d) $xy\,(x + y) = x^2y + xy^2$

Página 98

Identidades notables

25 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x-1)^2$ **b)** $(x+2)^2$ **c)** $(x+5)^2$

d) $(2x-3)^2$ **e)** $(x-6)^2$ **f)** $(3x-4)^2$

a) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ b) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

c) $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ d) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

e) $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$ f) $(3x-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

26 Copia y completa.

a) $x^2 + 6x + 9 = (\square + \square)^2$ **b)** $x^2 - 8x + 16 = (\square - \square)^2$

c) $9x^2 - 6x + 1 = (\square - \square)^2$ **d)** $25x^2 + 30x + 9 = (\square + \square)^2$

a) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ b) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

c) $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$ d) $25x^2 + 30x + 9 = (5x+3)^2$

27 Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.

- $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 = (x+5)^2$

a) $x^2 + 4x + 4$ **b)** $x^2 - 10x + 25$ **c)** $x^2 + 9 + 6x$ **d)** $x^2 + 49 - 14x$

e) $4x^2 + 4x + 1$ **f)** $4x^2 + 9 - 12x$ **g)** $9x^2 - 12x + 4$ **h)** $x^4 + 4x^2 + 4$

a) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ b) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

c) $x^2 + 9 + 6x = (x+3)^2$ d) $x^2 + 49 - 14x = (x-7)^2$

e) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$ f) $4x^2 + 9 - 12x = (2x-3)^2$

h) $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$ h) $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2+2)^2$

28 Transforma en diferencia de cuadrados:

a) $(x+7)(x-7)$ **b)** $(1+x)(1-x)$

c) $(3-4x)(3+4x)$ **d)** $(2x-1)(2x+1)$

a) $(x+7)(x-7) = x^2 + 49$ b) $(1+x)(1-x) = 1 - x^2$

c) $(3-4x)(3+4x) = 9 - 16x^2$ d) $(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$

29 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $x^2 - 9 = (\square + \square)\ (\square - \square)$

b) $x^2 - 16 = (\square + \square)\ (\square - \square)$

c) $9x^2 - 1 = (\square + \square)\ (\square - \square)$

a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

b) $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

c) $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$

30 **Expresa como producto de una suma por una diferencia, como en el ejemplo.**

- $4x^2 - 25 = 2^2 \cdot x^2 - 5^2 = (2x + 5)\ (2x - 5)$

a) $9x^2 - 25$ **b)** $1 - x^2$ **c)** $4x^2 - 9$

d) $16x^2 - 1$ **e)** $x^4 - 16$ **f)** $49 - 4x^2$

a) $(3x + 5)(3x - 5)$ b) $(1 + x)(1 - x)$ c) $(2x + 3)(2x - 3)$

d) $(4x + 1)(4x - 1)$ e) $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$ f) $(7 + 2x)(7 - 2x)$

31 **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $(x + 1)(x - 1) - 3(x + 2) - x(x + 2)$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - x(x + 3)$

c) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}(x^2 + 1)$

a) $(x + 1)(x - 1) - 3(x + 2) - x(x + 2) = x^2 - 1 - 3x - 6 - x^2 - 2x = -5x - 7$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - x(x + 3) = 4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 - 12x + 9) - x^2 - 3x =$
$= 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 12x - 9 - x^2 - 3x = -x^2 + 21x$

c) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}(x^2 + 1) = x^2 - \frac{1}{9} - \frac{x^2 + 1}{3} = \frac{9x^2}{9} - \frac{1}{9} - \frac{3x^2 + 3}{9} = \frac{6x^2 - 4}{9}$

Otras operaciones

32 **Reduce a común denominador y simplifica.**

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$ **b)** $\frac{3x}{2} - \frac{x}{4}$ **c)** $\frac{5x}{4} - x$

d) $\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - x$ **e)** $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{3x}{10}$

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{5x}{6}$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{x}{4} = \frac{6x}{4} - \frac{x}{4} = \frac{5x}{4}$

c) $\frac{5x}{4} - x = \frac{5x}{4} - \frac{4x}{4} = \frac{x}{4}$

d) $\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - x = \frac{4x}{6} + \frac{3x}{6} - \frac{6x}{6} = \frac{x}{6}$

e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{3x}{10} = \frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} - \frac{3x}{10} = \frac{4x}{10}$

33 **Reduce, como en los ejemplos.**

- $\dfrac{5x-10}{3x-6}=\dfrac{5(x-2)}{3(x-2)}=\dfrac{5}{3}$
- $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{x-3}{x+3}$

a) $\dfrac{4x-8}{3x-6}$ **b)** $\dfrac{10x^2-5x}{5x^2+5x}$ **c)** $\dfrac{3x^2-5x}{64-10x^2}$

d) $\dfrac{5x^2+15}{5x^2-45}$ **e)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}$ **f)** $\dfrac{x^2-6x+9}{6x^2-3x^2}$

a) $\dfrac{4x-8}{3x-6}=\dfrac{4(x-2)}{3(x-2)}=\dfrac{4}{3}$

b) $\dfrac{10x^2-5x}{5x^2+5x}=\dfrac{5x(2x-1)}{5x(x+1)}=\dfrac{2x-1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x^2-5x}{64-10x^2}=\dfrac{x(3x-5)}{2(32-5x^2)}$

d) $\dfrac{5x^2+15}{5x^2-45}=\dfrac{5(x^2+3)}{5(x^2-9)}=\dfrac{x^2+3}{(x+3)(x-3)}$

e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2+2x+4}$

f) $\dfrac{x^2-6x+9}{6x^3-3x^2}=\dfrac{(x-3)^2}{3x^2(2x-1)}$

Resuelve problemas

35 **Expresa en lenguaje algebraico:**

a) Un número más siete unidades es igual que su doble menos uno.

b) Un refresco cuesta 1 € más que una botella de agua. Por tres refrescos y dos aguas he pagado 6 €.

c) Un rectángulo es tres centímetros más largo que alto y su perímetro mide 34 cm.

a) $x+7=2x-1$

b) Llamamos x al precio del refresco.

La botella de agua cuesta $(x-1)$ €

$3x+2(x-1)=6$

c) Alto del rectángulo $\rightarrow$ x cm.

Largo del rectángulo $\rightarrow$ $(x+3)$ cm

Perímetro $\rightarrow$ $2x+2(x+3)=34$

36 **Expresa en lenguaje algebraico.**

a) El agua que queda en un depósito que estaba lleno, del que se saca, primero, 1/3 del contenido, y después, 20 litros. (Capacidad del depósito: *x* litros).

b) Lo que pagué por un bocadillo, un zumo y una chocolatina, si el bocadillo cuesta el triple que el zumo, y el zumo, 1 € más que la chocolatina. (Precio del zumo: *x* €).

a) $x-\dfrac{1}{3}x-20$

b) Precio del zumo $\rightarrow$ x €.

Precio del bocadillo $\rightarrow$ $3x$ €.

Precio de la chocolatina $\rightarrow$ $(x-1)$ €.

Por los tres artículos pagué $\rightarrow$ $x+3x+(x-1)$.

37 Si mezclamos 6 kg de cierta pintura con 9 kg de otra que cuesta 3 € menos por kilo, la mezcla nos sale a 5,20 €/kg. Rellena en tu cuaderno la siguiente tabla, llamando x al precio de la pintura cara:

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA 1	6	x	$6x$
PINTURA 2	9		
MEZCLA		5,20	

	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
PINTURA 1	**6**	x	$6x$
PINTURA 2	**9**	$x - 3$	$9(x - 3)$
MEZCLA	15	**5,20**	$6x + 9(x - 3)$

Coste de la mezcla $\rightarrow \dfrac{6x + 9(x - 3)}{15} = 5{,}20$ €

38 **Una profesora evalúa, sobre diez, cada uno de los siguientes conceptos:**

ACTITUD	TRABAJOS	NOTAS CONTROLES		
A	T	a	b	c

Después, calcula la nota según la fórmula:

$$\text{Nota} = 0{,}10 \cdot A + 0{,}20 \cdot T + 0{,}70 \cdot \frac{a+b+c}{3}$$

¿Qué porcentaje de la nota total corresponde a la actitud? ¿Y a los trabajos? ¿Y a las notas de los controles?

A la actitud corresponde un 0,10 $\rightarrow$ 10 %

A los trabajos corresponde un 0,20 $\rightarrow$ 20 %

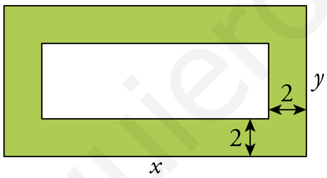
A las notas de los controles corresponde un 0,70 $\rightarrow$ 70 %

39 ***La mitad de un número es 20 unidades menor que su triple.* ¿Cuál de las siguientes igualdades representa el enunciado anterior?**

a) $\dfrac{x-20}{2} = 3x$ b) $\dfrac{x}{2} - 20 = 3x$ c) $\dfrac{x}{2} + 20 = 3x$

La igualdad que representa el enunciado es la c).

40 **Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.**



$A = xy - (x-4)(x-4) = xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 4x + 4y - 16$

41 **Observa y completa la tabla en tu cuaderno. A la derecha irán las expresiones algebraicas del perímetro y el área de la figura que ocupa el lugar n de la serie.**

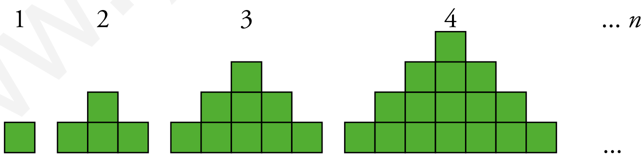
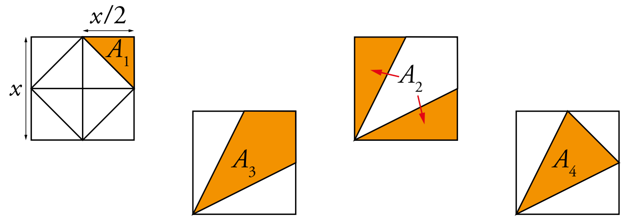


FIGURA	1	2	3	4	5	…	n
PERÍMETRO	4	10	16			…	
ÁREA	1	4	9			…	

FIGURA	1	2	3	4	5	…	n
PERÍMETRO	4	10	16	22	28	…	$6n-2$
ÁREA	1	4	9	16	25	…	n^2

- Los perímetros forman una progresión aritmética con $a_1 = 4$ y $d = 6$.
  Por tanto: $a_n = 4 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 2$.
- Las áreas es la sucesión de los cuadrados de los números naturales.
  Por tanto: n^2.

42 **Expresa algebraicamente el área de cada una de las zonas que se han coloreado en el cuadrado de lado *x*.**



$$A_1 \;\rightarrow\; \frac{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{8}$$

$$A_2 \;\rightarrow\; \frac{2\left(x\cdot\frac{x}{2}\right)}{2} = x\cdot\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$A_3 \;\rightarrow\; x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$A_4 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} = \frac{4x^2}{8} - \frac{x^2}{8} = \frac{3x^2}{8}$$

AUTOEVALUACIÓN

Página 99

1 **Se mezclan 10 kilos de café de 3 €/kg con x kilos de otro café de 4 €/kg. Describe mediante una expresión algebraica:**

a) El valor de la mezcla. **b) El precio de un kilo de la mezcla.**

a) $10 \cdot 3 + x \cdot 4 = 4x + 30$ €

b) $\dfrac{4x+30}{10+x}$ € / kg

2 **Reduce.**

a) $\mathbf{3x + 5x^2 - 5x + 7 - x^2 + 2x}$ **b)** $\mathbf{4(3x^2 - 2x + 3) - 3(4x^2 - x)}$

a) $3x + 5x^2 - 5x + 7 - x^2 + 2x = 4x^2 + 7$

b) $4(3x^2 - 2x + 3) - 3(4x^2 - x) = 12x^2 - 8x + 12 - 12x^2 + 3x = -5x + 12$

3 **Opera.**

a) $(2x^2) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$ **b)** $\left(\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot \left(\frac{3}{2}xy\right)$ **c)** $(3x^5) : \left(\frac{3}{2}x^2\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{2}xy^3\right) : \left(\frac{3}{4}xy^2\right)$

a) $(2x^2) \cdot \left(x + \dfrac{1}{3}\right) = 2x^3 + \dfrac{2x^2}{3} = \dfrac{6x^3}{3} + \dfrac{2x^2}{3} = \dfrac{6x^3 + 2x^2}{3}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}x^2y\right) \cdot \left(\dfrac{3}{2}xy\right) = \dfrac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}x^3y^2 = x^3y^2$

c) $(3x^5) : \left(\dfrac{3}{2}x^2\right) = \dfrac{3x^5}{1} : \dfrac{3x^2}{2} = \dfrac{6x^5}{3x^2} = 2x^3$

d) $\left(\dfrac{1}{2}xy^3\right) : \left(\dfrac{3}{4}xy^2\right) = \dfrac{xy^3}{2} : \dfrac{3xy^2}{4} = \dfrac{4xy^3}{6xy^2} = \dfrac{2y}{3}$

4 **Calcula.**

a) $\mathbf{(2x - 1) \cdot (x - 3)}$ **b)** $\mathbf{(x^2 - 4x + 3) \cdot (2x - 1)}$

a) $(2x - 1) \cdot (x - 3) = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x^2 - 7x + 3$

b) $(x^2 - 4x + 3) \cdot (2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 8x^2 + 4x + 6x - 3 = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$

5 **Dados** $A = x^3 + 5x^2 - 3$ **y** $B = x^3 - 3x^2 - x$**.**

Calcula: $A + B$ $A - B$ $3A + 2B$

$A + B = (x^3 + 5x^2 - 3) + (x^3 - 3x^2 - x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 3$

$A - B = (x^3 + 5x^2 - 3) - (x^3 - 3x^2 - x) = 8x^2 + x - 3$

$3A + 2B = 3\,(x^3 + 5x^2 - 3) + 2\,(x^3 - 3x^2 - x) = 3x^3 + 15x^2 - 9 + 2x^3 - 6x^2 - 2x =$
$= 5x^3 + 9x^2 - 2x - 9$

6 Completa en tu cuaderno.

a) $(3x-1)^2 = \ldots$

b) $(2x+5)\cdot(2x-5) = \ldots$

c) $4x^2 + 12x + 9 = (\ldots)^2$

d) $9x^2 - 25 = (\ldots)\cdot(\ldots)$

a) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

b) $(2x+5)\cdot(2x-5) = 4x^2 - 25$

c) $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$

d) $9x^2 - 25 = (3x+5)\cdot(3x-5)$

7 Extrae los factores comunes.

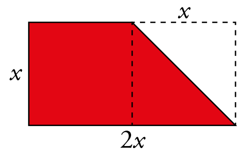
a) $3x^2 - 6x$

b) $10x^3 + 5x^2$

a) $3x^2 - 6x = 3x\,(x-2)$

b) $10x^3 + 5x^2 = 5x^2\,(2x+1)$

8 Expresa algebraicamente el perímetro y el área de la figura coloreada.



La diagonal de un cuadrado de lado x mide $\sqrt{2}x$.

Perímetro $\rightarrow$ $2x + x + x + \sqrt{2}x = \left(4+\sqrt{2}\right)x$

Área $\rightarrow$ $x^2 + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{2x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3x^2}{2}$

7 ECUACIONES

1 ECUACIONES

Página 101

1 **¿Es $x = 5$ solución de alguna de estas ecuaciones?**

a) $7x + 1 = 34$ **b)** $x^2 - 10 = 15$ **c)** $1^x = 5$ **d)** $2^x = 32$

Justifica tu respuesta.

a) $7 \cdot 5 + 1 = 36 \neq 34 \rightarrow$ No es solución porque no cumple la igualdad.

b) $5^2 - 10 = 25 - 10 = 15 \rightarrow$ Es solución porque cumple la igualdad.

c) $1^5 = 1 \neq 5 \rightarrow$ No es solución porque no cumple la igualdad.

d) $2^5 = 32 \rightarrow$ Es solución porque cumple la igualdad.

2 **Obtén «a ojo» una solución de cada una de estas ecuaciones:**

a) $2x - 1 = 5$ **b)** $\frac{x^3}{3} = 9$ **c)** $x^2 - 1 = 35$ **d)** $\sqrt{x+1} = 6$

a) $x = 3$ b) $x = 3$ c) $x = 6$ d) $x = 35$

2 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Página 103

1 Resuelve mentalmente. Indica, si es el caso, cuándo la ecuación no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

a) $5x = 15$ **b)** $3x = -6$ **c)** $-2x = 10$

d) $-4x = -20$ **e)** $3x = 1$ **f)** $2x = 12$

g) $6x = 0$ **h)** $0x = 6$ **i)** $0x = 0$

a) $5x = 15 \rightarrow x = 3$

b) $3x = -6 \rightarrow x = -2$

c) $-2x = 10 \rightarrow x = -5$

d) $-4x = -20 \rightarrow x = 5$

e) $3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

f) $x = 6$

g) $6x = 0 \rightarrow x = 0$

h) $0x = 6 \rightarrow$ No tiene solución

i) $0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones

2 Resuelve estas ecuaciones. ¿Son equivalentes?

a) $4x - x = 1 + x$ **b)** $10 - 7x - 6x = 5 - 3x$

c) $4x + 6 - x = 5x + 5$ **d)** $9 = 9x - x - 3 - 2x$

a) $4x - x = 1 + x \rightarrow 3x = 1 + x \rightarrow 3x - x = 1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $10 - 7x - 6x = 5 - 3x \rightarrow 10 - 13x = 5 - 3x \rightarrow 10 - 5 = 13x - 3x \rightarrow 5 = 10x \rightarrow$
$\rightarrow \frac{5}{10} = x \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $4x + 6 - x = 5x + 5 \rightarrow 3x + 6 = 5x + 5 \rightarrow 6 - 5 = 5x - 3x \rightarrow 1 = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $9 = 9x - x - 3 - 2x \rightarrow 9 = 6x - 3 \rightarrow 9 + 3 = 6x \rightarrow 12 = 6x \rightarrow \frac{12}{6} = x \rightarrow x = 2$

a), b) y c) sí son equivalentes, ya que las tres tienen el mismo resultado, $x = \frac{1}{2}$, pero d) no es equivalente con ninguna, debido a que sus resultados son distintos.

3 **Resuelve y comprueba que tus soluciones coinciden con las que se ofrecen debajo.**

a) $11x - 3 + x = 10x - 13$

b) $x - 3 - 4x = 3x - 4 + x$

c) $9 - 3x - 2 - 3x = 1 - 3x + 3 - x$

d) $8x = 6x - 4x - 3 + x + 7 + 5x - 2$

e) $7x + 12 - 4x - 3 = 10 + 2x - 1 + x$

Soluciones**: a) –5; b) 1/7; c) 3/2; d) Sin solución; e) Infinitas soluciones.**

a) $11x - 3 + x = 10x - 13 \rightarrow 12x - 3 = 10x - 13 \rightarrow 12x - 10x = -13 + 3 \rightarrow$

$\rightarrow 2x = -10 \rightarrow x = \dfrac{-10}{2} \rightarrow x = -5$

b) $x - 3 - 4x = 3x - 4 + x \rightarrow -3x - 3 = 4x - 4 \rightarrow -3 + 4 = 4x + 3x \rightarrow 1 = 7x \rightarrow \dfrac{1}{7} = x$

c) $9 - 3x - 2 - 3x = 1 - 3x + 3 - x \rightarrow 7 - 6x = 4 - 4x \rightarrow 7 - 4 = 6x - 4x \rightarrow 3 = 2x \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

d) $8x = 6x - 4x - 3 + x + 7 + 5x - 2 \rightarrow 8x = 8x + 2 \rightarrow 8x - 8x = 2 \rightarrow 0x = 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

e) $7x + 12 - 4x - 3 = 10 + 2x - 1 + x \rightarrow 3x + 9 = 9 + 3x \rightarrow 3x - 3x = 9 - 9 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

Página 104

4 **Resuelve y comprueba que tus soluciones coinciden con las que se ofrecen debajo.**

a) $2x + 3(3x - 2) + x = 10(x - 3) + 14$

b) $x - 3 - 4x = 3(x - 1) + x - 1$

c) $6 = 8x - (x - 5) - 10x$

d) $9 - 4x - 2(1 - x) = 1 - 3(x - 1) - x$

e) $-4 = 5(1 - x) - x - 3(1 + 7x)$

f) $8x = 6x - 4x - 3 + x + 7 + 5x - 2$

g) $7x - 2(x - 1) - 4 = 10 - 4(3 - x) + x$

***Soluciones*: a) –5; b) 1/7; c) –1/3; d) –3/2; e) 2/9; f) Sin solución; g) Infinitas soluciones**

a) $2x + 9x - 6 + x = 10x - 30 + 14 \to 12x - 6 = 10x - 16 \to 12x - 10x = -16 + 6 \to$
$\to 2x = -10 \to x = \dfrac{-10}{2} \to x = -5$

b) $x - 3 - 4x = 3x - 3 + x - 1 \to -3x - 3 = 4x - 4 \to -3 + 4 = 4x + 3x \to 1 = 7x \to \dfrac{1}{7} = x$

c) $6 = 8x - x + 5 - 10x \to 6 = 5 - 3x \to 3x = 5 - 6 \to 3x = -1 \to x = \dfrac{-1}{3}$

d) $9 - 4x - 2 + 2x = 1 - 3x + 3 - x \to 7 - 2x = 4 - 4x \to 4x - 2x = 4 - 7 \to 2x = -3 \to$
$\to x = \dfrac{-3}{2}$

e) $-4 = 5 - 5x - x - 3 - 21x \to -4 = 2 - 27x \to 27x = 2 + 4 \to 27x = 6 \to$
$\to x = \dfrac{6}{27} \to x = \dfrac{2}{9}$

f) $8x = 8x + 2 \to 8x - 8x = 2 \to 0x = 2 \to$ No tiene solución.

g) $7x - 2x + 2 - 4 = 10 - 12 + 4x + x \to 5x - 2 = 5x - 2 \to 5x - 5x = 2 - 2 \to 0x = 0 \to$
$\to$ Infinitas soluciones.

5 **¿Qué números pondrías en cada casilla para que la ecuación $\boxed{}x + 5 = 2x + \boxed{}$…**

a) … tenga infinitas soluciones? **b) … no tenga solución?**

a) $\boxed{2}x + 5 = 2x + \boxed{5} \to 2x - 2x = 5 - 5 \to 0x = 0 \to$ Infinitas soluciones.

b) En la primera casilla se pone un 2, y en la segunda, cualquier número que sea distinto de 5.

Por ejemplo: $\boxed{2}x + 5 = 2x + \boxed{8} \to 2x - 2x = 8 - 5 \to 0x = 3 \to$ Sin solución.

6 **Busca el valor que debe tomar la a en la igualdad**

$$3x - a(x + 1) = 5$$

para que la ecuación no tenga solución.

$3x - a(x + 1) = 5 \to 3x - ax - a = 5 \to (3 - a)x = 5 + a$

Para que esta ecuación no tenga solución, $3 - a = 0$ y $5 + a \neq 0$. Por tanto, es fácil observar que $a = 3$ cumple ambas condiciones.

7 **Considera la igualdad $5a - 2(a + b) = 7 - 3(a - b)$.**

a) Calcula el valor de b cuando $a = 3$.

b) Calcula el valor de a cuando $b = 5$.

a) Si $a = 3 \to 5 \cdot 3 - 2(3 + b) = 7 - 3(3 - b) \to 15 - 6 - 2b = 7 - 9 + 3b \to 9 - 2b = -2 + 3b \to$

$\to 9 + 2 = 3b + 2b \to 11 = 5b \to b = \frac{11}{5}$

b) Si $b = 5 \to 5a - 2(a + 5) = 7 - 3(a - 5) \to 5a - 2a - 10 = 7 - 3a + 15 \to 3a - 10 = 22 - 3a \to$

$\to 3a + 3a = 22 + 10 \to 6a = 32 \to a = \frac{16}{3}$

Página 105

8 **Quita denominadores y resuelve.**

a) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=x-\frac{x}{2}+\frac{3x}{10}$

b) $2-\frac{x}{4}+x=\frac{5x}{8}+1$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{5}=1$

d) $x-\frac{1}{5}=\frac{2x}{3}-\frac{13x}{15}+1$

e) $1-\frac{5x}{9}+\frac{x}{6}=x-\frac{2}{3}$

***Soluciones*: a) 15/14; b) –8; c) 20/7; d) 1; e) 6/5**

a) $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=x-\frac{x}{2}+\frac{3x}{10} \to 30\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=30\cdot\left(x-\frac{x}{2}+\frac{3x}{10}\right) \to$

$\to 15+10x=30x-15x+9x \to 15+10x=24x \to$

$\to 15=24x-10x \to 15=14x \to x=\frac{15}{14}$

b) $2-\frac{x}{4}+x=\frac{5x}{8}+1 \to 8\cdot\left(2-\frac{x}{4}+x\right)=8\cdot\left(\frac{5x}{8}+1\right) \to 16-2x+8x=5x+8 \to$

$\to 16+6x=5x+8 \to 6x-5x=8-16 \to x=-8$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{5}=1 \to 20\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{5}\right)=20\cdot 1 \to 10x+5x-8x=20 \to 7x=20 \to$

$\to x=\frac{20}{7}$

d) $x-\frac{1}{5}=\frac{2x}{3}-\frac{13x}{15}+1 \to 15\cdot\left(x-\frac{1}{5}\right)=15\cdot\left(\frac{2x}{3}-\frac{13x}{15}+1\right) \to$

$\to 15x-3=10x-13x+15 \to 15x-3=-3x+15$

$\to 15x+3x=3+15 \to 18x=18 \to x=\frac{18}{18} \to x=1$

e) $1-\frac{5x}{9}+\frac{x}{6}=x-\frac{2}{3} \to 18\cdot\left(1-\frac{5x}{9}+\frac{x}{6}\right)=18\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) \to 18-10x+3x=18x-12 \to$

$\to 18-7x=18x-12 \to 18+12=18x+7x \to 30=25x \to$

$\to x=\frac{30}{25} \to x=\frac{6}{5}$

9 **Calcula el valor de x en cada caso:**

a) $\frac{x-1}{5}+\frac{3x}{4}=x-\frac{2x-1}{10}$

b) $\frac{x+2}{6}-\frac{1}{3}=x-\frac{1-3x}{4}$

c) $\frac{3(1+2x)}{8}-\frac{x}{2}=1-\frac{3-x}{4}$

d) $\frac{x-2}{10}-\frac{3x-1}{8}=\frac{2(x+1)}{5}-1$

e) $\frac{4(x-2)}{9}-\frac{3(1-x)}{2}=\frac{21x-11}{8}-\frac{7}{24}$

***Soluciones*: a) 2; b) 3/19; c) Sin solución; d) 7/9; e) –52/49**

a) $\frac{x-1}{5}+\frac{3x}{4}=x-\frac{2x-1}{10} \to 20\cdot\left(\frac{x-1}{5}+\frac{3x}{4}\right)=20\cdot\left(x-\frac{2x-1}{10}\right) \to$

$\to 4(x-1)+5\cdot 3x=20x-2(2x-1) \to$

$\to 4x-4+15x=20x-4x+2 \to \to 19x-4=16x+2 \to$

$\to 19x-16x=2+4 \to 3x=6 \to x=\frac{6}{3} \to x=2$

b) $\frac{x+2}{6}-\frac{1}{3}=x-\frac{1-3x}{4} \to 12\cdot\left(\frac{x+2}{6}-\frac{1}{3}\right)=12\cdot\left(x-\frac{1-3x}{4}\right) \to$

$\to 2(x+2)-4=12x-3(1-3x) \to$

$\to 2x+4-4=12x-3+9x \to 2x=21x-3 \to$

$\to 3=21x-2x \to 3=19x \to x=\frac{3}{19}$

c) $\frac{3(1+2x)}{8}-\frac{x}{2}=1-\frac{3-x}{4} \to 8\cdot\left(\frac{3(1+2x)}{8}-\frac{x}{2}\right)=8\cdot\left(1-\frac{3-x}{4}\right) \to$

$\to 3(1+2x)-4x=8-2(3-x) \to 3+6x-4x=8-6+2x \to$

$\to 3+2x=2+2x \to 3-2=2x-2x \to 1=0x \to$

$\to$ No tiene solución.

d) $\frac{x-2}{10}-\frac{3x-1}{8}=\frac{2(x+1)}{5}-1 \to 40\cdot\left(\frac{x-2}{10}-\frac{3x-1}{8}\right)=40\cdot\left(\frac{2(x+1)}{5}-1\right) \to$

$\to 4(x-2)-5(3x-1)=16(x+1)-40 \to$

$\to 4x-8-15x+5=16x+16-40 \to$

$\to -11x-3=16x-24 \to 24-3=16x+11x \to$

$\to 21=27x \to x=\frac{21}{27} \to x=\frac{7}{9}$

e) $\frac{4(x-2)}{9}-\frac{3(1-x)}{2}=\frac{21x-11}{8}-\frac{7}{24} \to 72\cdot\left(\frac{4(x-2)}{9}-\frac{3(1-x)}{2}\right)=72\cdot\left(\frac{21x-11}{8}-\frac{7}{24}\right) \to$

$\to 32(x-2)-108(1-x)=9(21x-11)-21 \to$

$\to 32x-64-108+108x=189x-99-21 \to$

$\to 140x-172=189x-120 \to$

$\to 120-172=189x-140x \to -52=49x \to$

$\to x=\frac{-52}{49}$

3 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Página 107

1 Resuelve estas ecuaciones sin aplicar la fórmula:

a) $5x^2 - 5 = 0$ **b)** $5x^2 + 5 = 0$

c) $2x^2 + 3 = 35$ **d)** $x^2 - 9x = 0$

e) $2x^2 - 6x = 0$ **f)** $5x^2 + 5x = 0$

g) $8x^2 - 16x = 0$ **h)** $4x^2 = 36$

i) $x^2 + 1 = 0$ **j)** $x^2 + x = 0$

a) $5x^2 - 5 = 0 \rightarrow 5x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \dfrac{5}{5} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

b) $5x^2 + 5 = 0 \rightarrow 5x^2 = -5 \rightarrow x^2 = \dfrac{-5}{5} = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow$ No tiene solución.

c) $2x^2 + 3 = 35 \rightarrow 2x^2 = 35 - 3 \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \dfrac{32}{2} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$

d) $x^2 - 9x = 0 \rightarrow x(x - 9) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 9 = 0 \rightarrow x = 9 \end{cases}$

e) $2x^2 - 6x = 0 \rightarrow 2x(x - 3) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

f) $5x^2 + 5x = 0 \rightarrow 5x(x + 1) = 0 \begin{cases} 5x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

g) $8x^2 - 16x = 0 \rightarrow 8x(x - 2) = 0 \begin{cases} 8x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

h) $4x^2 = 36 \rightarrow x^2 = \dfrac{36}{4} = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

i) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow$ No tiene solución.

j) $x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

2 **Resuelve estas ecuaciones aplicando la fórmula:**

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ **b)** $x^2 + 6x - 7 = 0$

c) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ **d)** $x^2 + 4x + 3 = 0$

e) $x^2 - 10x + 25 = 0$ **f)** $x^2 - x + 1 = 0$

g) $x^2 + 2x + 1 = 0$ **h)** $-x^2 + 5x - 6 = 0$

i) $-2x^2 - 12x + 14 = 0$ **j)** $-x^2 - 2x - 1 = 0$

a) $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -6,\ c = 5$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{6+4}{2} \rightarrow x = \dfrac{10}{2} \rightarrow x = 5 \\[2ex] \dfrac{6-4}{2} \rightarrow x = \dfrac{2}{2} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

b) $x^2 + 6x - 7 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 6,\ c = -7$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-6+8}{2} \rightarrow x = \dfrac{2}{2} \rightarrow x = 1 \\[2ex] \dfrac{-6-8}{2} \rightarrow x = \dfrac{-14}{2} \rightarrow x = -7 \end{cases}$$

c) $2x^2 + 2x - 24 = 0 \rightarrow a = 2,\ b = 2,\ c = -24$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{4} = \frac{-2 \pm 14}{4}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-2+14}{4} \rightarrow x = \dfrac{12}{4} \rightarrow x = 3 \\[2ex] \dfrac{-2-14}{4} \rightarrow x = \dfrac{-16}{4} \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

d) $x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 4,\ c = 3$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-4+2}{2} \rightarrow x = \dfrac{-2}{2} \rightarrow x = -1 \\[2ex] \dfrac{-4-2}{2} \rightarrow x = \dfrac{-6}{2} \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

e) $x^2 - 10x + 25 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -10,\ c = 25$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

f) $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = -1,\ c = 1$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{Sin solución}$$

g) $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c = 1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

h) $-x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow a = -1,\ b = 5,\ c = -6$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-5 + 1}{-2} \rightarrow x = \dfrac{-4}{-2} \rightarrow x = 2 \\ \dfrac{-5 - 1}{-2} \rightarrow x = \dfrac{-6}{-2} \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

i) $-2x^2 - 12x + 14 = 0 \rightarrow a = -2,\ b = -12,\ c = 14$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 14}}{2 \cdot (-2)} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{-4} = \frac{12 \pm \sqrt{256}}{-4} = \frac{12 \pm 16}{-4}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{12 + 16}{-4} \rightarrow x = \dfrac{28}{-4} \rightarrow x = -7 \\ \dfrac{12 - 16}{-4} \rightarrow x = \dfrac{-4}{-4} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

j) $-x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow a = -1,\ b = -2,\ c = -1$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Página 108

3 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $(x-3)x+1=x^2-5x(x+1)$

b) $3(x-1)-4x=2(x+1)(x-1)+2$

c) $3x^2-(x+3)^2=x^2-17$

d) $2x^2-(x-5)^2=11-(x-6)^2$

e) $5x(x^2-x)+1=x^2(5x-3)+x$

f) $10x+(2x-3)(2x+3)=5-2(x-1)^2$

g) $8x-[x^2+(x-2)^2]=-(x+2)^2$

a) $(x-3)x+1=x^2-5x(x+1) \to x^2-3x+1=x^2-5x^2-5x \to x^2-3x+1=-4x^2-5x \to$
$\to x^2+4x^2-3x+5x+1=0 \to 5x^2+2x+1=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} \to \text{Sin solución}$$

b) $3(x-1)-4x=2(x+1)(x-1)+2 \to 3x-3-4x=2(x^2-1)+2 \to -x-3=2x^2-2+2 \to$
$\to 2x^2+x+3=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4} \to \text{Sin solución}$$

c) $3x^2-(x+3)^2=x^2-17 \to 3x^2-(x^2+6x+9)=x^2-17 \to 3x^2-x^2-6x-9=x^2-17 \to$
$\to 3x^2-x^2-x^2-6x-9+17=0 \to x^2-6x+8=0$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm 2}{2} \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} \to x=\dfrac{8}{2} \to x=4 \\[2ex] \dfrac{6-2}{2} \to x=\dfrac{4}{2} \to x=2 \end{cases}$$

d) $2x^2-(x-5)^2=11-(x-6)^2 \to 2x^2-(x^2-10x+25)=11-(x^2-12x+36) \to$
$\to 2x^2-x^2+10x-25=11-x^2+12x-36 \to$
$\to 2x^2-x^2+x^2-12x+10x-25-11+36=0 \to$
$$\to 2x^2-2x=0 \to 2x(x-1)=0 \begin{cases} 2x=0 \to x=0 \\ x-1=0 \to x=1 \end{cases}$$

e) $5x(x^2-x)+1=x^2(5x-3)+x \to 5x^3-5x^2+1=5x^3-3x^2+x \to$
$\to 5x^3-5x^3-5x^2+3x^2-x+1=0 \to -2x^2-x+1=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-4}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{-4}=\frac{1\pm 3}{-4} \begin{cases} \dfrac{1+3}{-4} \to x=\dfrac{4}{-4} \to x=-1 \\[2ex] \dfrac{1-3}{-4} \to x=\dfrac{-2}{-4} \to x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

f) $10x + (2x-3)(2x+3) = 5 - 2(x-1)^2 \to 10x + 4x^2 - 9 = 5 - 2(x^2 - 2x + 1) \to$
$\to 4x^2 + 10x - 9 = 5 - 2x^2 + 4x - 2 \to$
$\to 4x^2 - 2x^2 + 10x - 4x - 9 - 3 = 0 \to$
$\to 6x^2 + 6x - 12 = 0 \to \to x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} \to x = \dfrac{2}{2} \to x = 1 \\ \dfrac{-1-3}{2} \to x = \dfrac{-4}{2} \to x = -2 \end{cases}$$

g) $8x - [x^2 + (x-2)^2] = -(x+2)^2 \to 8x - [x^2 + x^2 - 4x + 4] = -(x^2 + 4x + 4) \to$
$\to 8x - 2x^2 + 4x - 4 = -x^2 - 4x - 4 \to$
$\to -2x^2 + x^2 + 8x + 4x + 4x - 4 + 4 = 0 \to$
$\to -x^2 + 16x = 0 \to x(-x+16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ -x + 16 = 0 \to x = 16 \end{cases}$

4 **Reduce, resuelve y comprueba las soluciones:**

a) $x + \dfrac{2x+3}{3} = 1 - \dfrac{2x^2}{3}$

b) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{6} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{12}$

c) $\dfrac{5x^2}{3} + \dfrac{2x}{5} = \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{x}{3}$

d) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2}$

e) $\dfrac{x}{3} - 1 + \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{2}{3x}$

a) $x + \dfrac{2x+3}{3} = 1 - \dfrac{2x^2}{3} \to 3 \cdot \left(x + \dfrac{2x+3}{3}\right) = 3 \cdot \left(1 - \dfrac{2x^2}{3}\right) \to 3x + 2x + 3 = 3 - 2x^2 \to$

$\to 2x^2 + 5x = 0 \to x(2x+5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 5 = 0 \to 2x = -5 \to x = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = 0 \to 0 + \dfrac{2 \cdot 0 + 3}{3} = 1 - \dfrac{2 \cdot 0^2}{3} \to 1 = 1$
- Si $x = \dfrac{-5}{2} \to \dfrac{-5}{2} + \dfrac{2 \cdot \left(\dfrac{-5}{2}\right) + 3}{3} = 1 - \dfrac{2 \cdot \left(\dfrac{-5}{2}\right)^2}{3} \to \dfrac{-5}{2} + \dfrac{-5+3}{3} = 1 - \dfrac{\frac{25}{2}}{3} \to$
  $\to \dfrac{-5}{2} - \dfrac{2}{3} = 1 - \dfrac{25}{6} \to \dfrac{-15-4}{6} = \dfrac{6-25}{6} \to \dfrac{-19}{6} = \dfrac{-19}{6}$

b) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{6} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{12} \to 12 \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{6}\right) = 12 \cdot \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{12}\right) \to 6x^2 - 2x = 3x - 1 \to$
$\to 6x^2 - 2x - 3x + 1 = 0 \to 6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \begin{cases} \dfrac{5+1}{12} \to x = \dfrac{6}{12} \to x = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5-1}{12} \to x = \dfrac{4}{12} \to x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = \frac{1}{2} \to \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{12} \to \frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{12} \to \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$

- Si $x = \frac{1}{3} \to \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{4} - \frac{1}{12} \to \frac{\frac{1}{9}}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{4} - \frac{1}{12} \to$

$$\to \frac{1}{18} - \frac{1}{18} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \to 0 = 0$$

c) $\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{3} \to 30 \cdot \left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5}\right) = 30 \cdot \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) \to$

$$\to 10 \cdot 5x^2 + 6 \cdot 2x = 15 \cdot 3x^2 + 10x \to$$
$$\to 50x^2 + 12x = 45x^2 + 10x \to$$
$$\to 50x^2 - 45x^2 + 12x - 10x = 0 \to$$
$$\to 5x^2 + 2x = 0 \to x(5x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2 = 0 \to 5x = -2 \to x = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = 0 \to \frac{5 \cdot 0^2}{3} + \frac{2 \cdot 0}{5} = \frac{3 \cdot 0^2}{2} + \frac{0}{3} \to 0 = 0$

- Si $x = \frac{-2}{5} \to \frac{5\left(\frac{-2}{5}\right)^2}{3} + \frac{2\left(\frac{-2}{5}\right)}{5} = \frac{3\left(\frac{-2}{5}\right)^2}{2} + \frac{\frac{-2}{5}}{3} \to \frac{5 \cdot \frac{4}{25}}{3} - \frac{\frac{4}{5}}{5} = \frac{3 \cdot \frac{4}{25}}{2} - \frac{\frac{2}{5}}{3} \to$

$$\to \frac{4}{15} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25} - \frac{2}{15} \to \frac{20}{75} - \frac{12}{75} = \frac{18}{75} - \frac{10}{75} \to \frac{8}{75} = \frac{8}{75}$$

d) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \to 2x \cdot \left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{3}{2} \to 3x^2 - 2 = 3x \to 3x^2 - 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6} \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{6} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \to \frac{3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{33}}{6}\right)}{2} - \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{33}}{6}} = \frac{3}{2} \to \frac{3 + \sqrt{33}}{4} - \frac{6\,(3 - \sqrt{33})}{(3 + \sqrt{33})\,(3 - \sqrt{33})} =$

$$= \frac{3 + \sqrt{33}}{4} - \frac{6\,(3 - \sqrt{33})}{-24} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{33})}{24} + \frac{6 \cdot (3 - \sqrt{33})}{24} =$$

$$= \frac{18 + 6\sqrt{33} + 18 - 6\sqrt{33}}{24} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

- Si $x = \frac{3-\sqrt{33}}{6} \rightarrow \frac{3 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right)}{2} - \frac{1}{\frac{3-\sqrt{33}}{6}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3-\sqrt{33}}{4} - \frac{6(3+\sqrt{33})}{(3+\sqrt{33})(3-\sqrt{33})} =$

$$= \frac{3-\sqrt{33}}{4} - \frac{6(3+\sqrt{33})}{-24} = \frac{6 \cdot (3-\sqrt{33})}{24} + \frac{6 \cdot (3+\sqrt{33})}{24} =$$

$$= \frac{18 - 6\sqrt{33} + 18 + 6\sqrt{33}}{24} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

e) $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x} \rightarrow 3x \cdot \left(\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x}\right) = 3x \cdot \left(1 - \frac{2}{3x}\right) \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 3x - 2 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 3x + 3 + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} \frac{6+4}{2} \rightarrow x = \frac{10}{2} \rightarrow x = 5 \\ \frac{6-4}{2} \rightarrow x = \frac{2}{2} \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Si $x = 1 \rightarrow \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{1} = 1 - \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
- Si $x = 5 \rightarrow \frac{5}{3} - 1 + \frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{3 \cdot 5} \rightarrow \frac{25 - 15 + 3}{15} = \frac{15-2}{15} \rightarrow \frac{13}{15} = \frac{13}{15}$

4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

Página 109

Hazlo tú

Elena tiene 4 años más que Irene y esta tiene 8 años más que Diego. Si entre los tres suman 14 años, ¿cuáles son sus edades?

- Edad de Diego $\rightarrow$ x
- Edad de Irene $\rightarrow$ $x + 8$
- Edad de Elena $\rightarrow$ $x + 8 + 4 \rightarrow x + 12$

$$x + x + 8 + x + 12 = 29 \rightarrow 3x + 20 = 29 \rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$

Diego tiene 3 años; Irene, 3 + 8 = 11 años, y Elena, 3 + 12 = 15 años.

1 **Calcula tres números sabiendo que:**

– El primero es 20 unidades menor que el segundo.

– El tercero es igual a la suma de los dos primeros.

– Entre los tres suman 120.

Llamamos x al segundo número. Entonces, tenemos que:

– Primer número $\rightarrow$ $x - 20$

– Tercer número $\rightarrow$ $(x - 20) + x = 2x - 20$

$$x + (x - 20) + (2x - 20) = 120 \rightarrow x + x + 2x - 20 - 20 = 120 \rightarrow 4x - 40 = 120 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4x = 120 + 40 \rightarrow 4x = 160 \rightarrow x = \frac{160}{4} \rightarrow x = 40$$

– El segundo número es 40.

– El primer número es 40 – 20 = 20.

– El tercer número es 20 + 40 = 60.

2 **Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 14,30 €. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y este cuesta el doble que el helado. ¿Cuál es el precio de cada artículo?**

Llamamos x al precio del helado. Por tanto, tenemos que:

– Precio del cómic $\rightarrow$ $2x$

– Precio del videojuego $\rightarrow$ $5 \cdot 2x = 10x$

$$x + 2x + 10x = 14{,}30 \rightarrow 13x = 14{,}30 \rightarrow x = \frac{14{,}30}{13} \rightarrow x = 1{,}10$$

– El precio del helado es 1,10 €.

– El precio del cómic es 2 · 1,10 = 2,20 €.

– El precio del videojuego es 5 · 2,20 = 11 €.

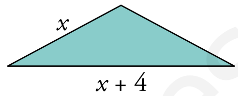
3 **Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1 400 € como pago de cierto trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si el primero trabajó las dos quintas partes de lo que trabajó el otro?**

Llamamos x al tiempo que trabajó uno de los albañiles, entonces, el otro albañil trabajó $\frac{2}{5}x$.

$$x + \frac{2}{5}x = 1400 \rightarrow \frac{5x+2x}{5} = 1400 \rightarrow \frac{7}{5}x = 1400 \rightarrow x = \frac{1400 \cdot 5}{7} = 200 \cdot 5 \rightarrow x = 1000$$

Uno de los albañiles debe cobrar 1 000 € y el otro, debe cobrar, $1\,000 \cdot \frac{2}{5} = 400$ €.

4 **En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 4 cm más que cada uno de sus lados iguales. Halla la longitud de los lados sabiendo que su perímetro es de 40 cm.**



Llamamos x a la medida de los lados iguales. Entonces, el lado desigual mide $x + 4$ cm.

$$x + x + (x+4) = 40 \rightarrow 2x + x + 4 = 40 \rightarrow 3x = 40 - 4 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

– Los lados iguales miden 12 cm.

– El lado desigual mide 16 cm.

Página 110

Hazlo tú

El año pasado, los abuelos regalaron por navidades 25 € a cada nieto. Estas navidades regalan la misma cantidad pero hay 4 nietos más, por lo que a cada uno le corresponden 5 € menos. ¿Cuántos nietos había el año pasado?

- Llamamos x al número de nietos del año pasado.

$$25x = 20(x + 4) \to 25x = 20x + 80 \to 5x = 80 \to x = 16$$

El año pasado había 16 nietos.

Hazlo tú

Manuela tiene 4 años más que su hermana Eva, y su madre tiene 40 años. Dentro de 12 años, entre las dos hermanas igualarán la edad de la madre. ¿Qué edad tiene cada una?

-

EDAD DE...	HOY	DENTRO DE 12 AÑOS
EVA	x	$x + 12$
MANUELA	$x + 4$	$x + 16$
MADRE	40	52

$$x + 12 + x + 16 = 52 \to 2x + 28 = 52 \to 2x = 24 \to x = 12$$

Eva tiene 12 años y Manuela, 16 años.

5 **Una peña deportiva contrató un autobús para ver a su equipo. Si el autobús se hubiera llenado, habrían pagado 8,50 € por persona, pero quedaron 3 plazas vacías, y el viaje costó 9 €. ¿Cuántas plazas tenía el autobús?**

Llamamos x al número de seguidores que viajan en el autobús.

$$(x + 3) \cdot 8{,}50 = x \cdot 9 \to 8{,}50x + 25{,}50 = 9x \to 25{,}50 = 9x - 8{,}50x \to$$

$$\to 0{,}50x = 25{,}50 \to x = \frac{25{,}50}{0{,}50} \to x = 51$$

El autobús tenía 51 + 3 = 54 plazas.

6 **Si divido un número entre 5, el resultado es dos unidades mayor que si lo divido entre 6. ¿Qué número es?**

Llamamos x al número que buscamos.

$$\frac{x}{5} - 2 = \frac{x}{6} \to 30 \cdot \left(\frac{x}{5} - 2\right) = 30 \cdot \frac{x}{6} \to 6x - 60 = 5x \to 6x - 5x = 60 \to x = 60$$

El número que buscamos es 60.

7 **Me faltan 1,80 € para comprar una revista. Si tuviera el doble de lo que tengo ahora, me sobrarían 2 €. ¿Cuánto tengo? ¿Cuánto cuesta la revista?**

Llamamos x al dinero que tengo.

$$x + 1{,}80 = 2x - 2 \to 1{,}80 + 2 = 2x - x \to x = 3{,}80\ €$$

Tengo 3,80 euros.

Por tanto, la revista cuesta 3,80 + 1,80 = 5,60 €.

8 **José tiene 15 años; su hermano Juan, 13, y su padre, 43. ¿Cuántos años han de pasar para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?**

Llamamos x a los años que deben pasar.

EDAD DE…	HOY	DENTRO DE x AÑOS
JOSÉ	15	$15 + x$
JUAN	13	$13 + x$
PADRE	43	$43 + x$

$(15 + x) + (13 + x) = 43 + x \rightarrow 28 + 2x = 43 + x \rightarrow 2x - x = 43 - 28 \rightarrow x = 15$

Han de pasar 15 años para que entre los dos hijos igualen la edad del padre.

Página 111

Hazlo tú

Aumentando un número en un 25 % y restándole 16, se obtiene el mismo resultado que restándole su cuarta parte. ¿De qué número se trata?

- Llamamos x al número que buscamos.

$$1{,}25x - 16 = x - \frac{x}{4} \rightarrow 5x - 64 = 4x - x \rightarrow 2x = 64 \rightarrow x = 32$$

El número buscado es 32.

Hazlo tú

Se mezclan 20 kg de café de 5 €/kg con una cierta cantidad de café superior, de 8 €/kg, resultando una mezcla de 6,80 €/kg. ¿Qué cantidad de café superior se ha utilizado?

•

	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
1.ER CAFÉ	20	5	100
CAFÉ SUPERIOR	x	8	$8x$
MEZCLA	$20 + x$	6,80	$6{,}80\ (20 + x)$

$100 + 8x = 6{,}8\ (20 + x) \rightarrow 100 + 8x = 136 + 6{,}8x \rightarrow 1{,}2x = 36 \rightarrow x = 30$

Se han utilizado 30 kg de café superior.

9 **Si un número se aumenta en un 30 % y se le suman 12 unidades, se obtiene el mismo resultado que si a su doble se le quita un 20 %. ¿Qué número es?**

Llamamos x al número que buscamos. Tenemos que:

– El número aumentado en un 30 % más 12 unidades $\rightarrow 1{,}3x + 12$

– El doble del número disminuido un 20 % $\rightarrow 0{,}8 \cdot (2x)$

$$1{,}3x + 12 = 0{,}8 \cdot 2x \rightarrow 1{,}3x + 12 = 1{,}6x \rightarrow 12 = 1{,}6x - 1{,}3x \rightarrow$$

$$\rightarrow 12 = 0{,}3x \rightarrow x = \frac{12}{0{,}3} \rightarrow x = 40$$

El número buscado es 40.

10 **Marta compra una camiseta rebajada un 10 %. Después, en otra tienda, compra una blusa que costaba 10 € más, pero estaba rebajada un 40 %. Así, paga lo mismo por ambas prendas. ¿Cuánto costaba cada prenda sin rebajar?**

PRECIO $\rightarrow \boldsymbol{x}$
REBAJA 10 %

PRECIO $\rightarrow \boldsymbol{x} + 10$
REBAJA 40 %

Llamamos:

Precio de la camiseta $\rightarrow x$ — Con una rebaja del 10 % $\rightarrow 0{,}9x$

Precio de la blusa $\rightarrow x + 10$ — Con una rebaja del 40 % $\rightarrow 0{,}6(x + 10)$

$$0{,}9x = 0{,}6(x + 10) \rightarrow 0{,}9x = 0{,}6x + 6 \rightarrow 0{,}9x - 0{,}6x = 6 \rightarrow 0{,}3x = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{6}{0{,}3} \rightarrow x = 20$$

La camiseta costaba 20 € y la blusa 20 + 10 = 30 €.

11 **Teo ha mezclado 12 kg de azúcar, de 1,10 €/kg, con cierta cantidad de miel, de 4,20 €/kg. La mezcla sale a 2,34 €/kg.**

¿Cuánta miel mezcló?

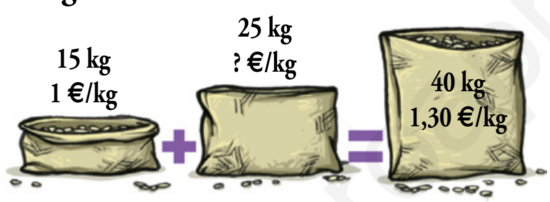
	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
AZÚCAR	12	1,10	13,20
MIEL	x	4,20	$4{,}20x$
MEZCLA	$12 + x$	2,34	$2{,}34(12 + x)$

$$13{,}20 + 4{,}20x = 2{,}34(12 + x) \rightarrow 13{,}20 + 4{,}20x = 28{,}08 + 2{,}34x \rightarrow$$
$$\rightarrow 4{,}20x - 2{,}34x = 28{,}08 - 13{,}20 \rightarrow 1{,}86x = 14{,}88 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \frac{14{,}88}{1{,}86} \rightarrow x = 8$$

Mezcló 8 kg de miel.

12 **Mezclando 15 kg de arroz de 1 €/kg con 25 kg de arroz de otra clase, se obtiene una mezcla que sale a 1,30 €/kg.**

¿Cuál será el precio de la segunda clase de arroz?



	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
ARROZ A	15	1,00	15
ARROZ B	25	x	$25x$
MEZCLA	40	1,35	54

$$15 + 25x = 54 \rightarrow 25x = 54 - 15 \rightarrow 25x = 39 \rightarrow x = \frac{39}{25} \rightarrow x = 1{,}56 \text{ €/kg}$$

La segunda clase de arroz cuesta 1,56 €/kg.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 112

Practica

Ecuaciones: soluciones, tanteo...

1 **Comprueba cuál de los números 1, 2 o 4 es la solución de las siguientes ecuaciones:**

a) $3x - 5 = 1$

b) $\frac{x}{2} - 3x = -10$

c) $x^3 - 1 = 0$

d) $2^x = 4$

e) $\sqrt{x} = 2$

f) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

a) $3x - 5 = 1$

$x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 - 5 = -2 \neq 1$

$x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 - 5 = 1$

$x = 4 \rightarrow 3 \cdot 4 - 5 = -2 \neq 1$

b) $\frac{x}{2} - 3x = -10$

$x = 1 \rightarrow \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 = \frac{-5}{2} \neq -10$

$x = 2 \rightarrow \frac{2}{2} - 3 \cdot 2 = -5 \neq -10$

$x = 4 \rightarrow \frac{4}{2} - 3 \cdot 4 = -10$

c) $x^3 - 1 = 0$

$x = 1 \rightarrow 1^3 - 1 = 0$

$x = 2 \rightarrow 2^3 - 1 = 7 \neq 0$

$x = 4 \rightarrow 4^3 - 1 = 63 \neq 0$

d) $2^x = 4$

$x = 1 \rightarrow 2^1 = 2 \neq 4$

$x = 2 \rightarrow 2^2 = 4$

$x = 4 \rightarrow 2^4 = 16 \neq 4$

e) $\sqrt{x} = 2$

$x = 1 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \neq 2$

$x = 2 \rightarrow \sqrt{2} \neq 2$

$x = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

f) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$x = 1 \rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2}$

$x = 2 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x = 4 \rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$

2 **Resuelve mentalmente y explica el proceso seguido.**

a) $\frac{x-5}{4}=1$ **b)** $5x+1=11$ **c)** $3(x-2)=12$ **d)** $\frac{x}{3}+1=6$

e) $\frac{x+1}{3}=6$ **f)** $x^3=8$ **g)** $3^x=81$ **h)** $\sqrt{2x}=4$

a) $x = 9$

Buscamos un número que al restarle 5 el resultado sea 4.

b) $x = 2$

Buscamos un número que al multiplicarlo por 5 su resultado sea 10.

c) $x = 6$

Buscamos un número tal que, al restarle 2 nos quede 4.

d) $x = 15$

La tercera parte del número que buscamos es 5.

e) $x = 17$

Buscamos un número que al sumarle 1 nos quede 18.

f) $x = 2$

Buscamos un número que multiplicado tres veces por sí mismo nos quede 8.

g) $x = 4$

Buscamos el número de veces que tenemos que multiplicar 3 para que el resultado sea 81.

h) $x = 8$

Buscamos un número que al multiplicarlo por dos su resultado sea 16.

3 **Resuelve por tanteo.**

a) $\frac{x+4}{2}=65$ **b)** $\frac{x}{2}-1=3$ **c)** $2(x+1)=16$ **d)** $x^2=25$

e) $x^3=64$ **f)** $2^x=32$ **g)** $\sqrt{x+1}=5$ **h)** $\frac{2}{x}=1$

a) $x = 126$ b) $x = 8$ c) $x = 7$ d) $x = 5$

e) $x = 4$ f) $x = 5$ g) $x = 24$ h) $x = 2$

Ecuaciones de primer grado

4 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $12x-8=34+5x$ **b)** $4(2-x)-(4-x)=7(2x+3)$

c) $2[x+3(x+1)]=5x$ **d)** $5(x-2)-2(x-5)=2x-(12+3x)$

a) $12x-8=34+5x \to 12x-5x=34+8 \to 7x=42 \to x=\frac{42}{7} \to x=6$

b) $4(2-x)-(4-x)=7(2x+3) \to 8-4x-4+x=14x+21 \to 4-3x=14x+21 \to$
$\to 4-21=14x+3x \to -17=17x \to x=-1$

c) $2[x+3(x+1)]=5x \to 2(x+3x+3)=5x \to 2(4x+3)=5x \to 8x+6=5x \to$
$\to 8x-5x=-6 \to 3x=-6 \to x=\frac{-6}{3} \to x=-2$

d) $5(x-2)-2(x-5)=2x-(12+3x) \to 5x-10-2x+10=2x-12-3x \to$
$\to 3x=-x-12 \to 3x+x=-12 \to$
$\to 4x=-12 \to x=\frac{-12}{4} \to x=-3$

6 **Multiplica por el mín. c. m. de los denominadores, reduce y resuelve.**

a) $\frac{x}{5}+\frac{x}{10}-\frac{1}{2}=\frac{x}{3}$

b) $\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3x}{5}+\frac{2}{15}$

c) $\frac{2}{3}-\frac{x}{4}+\frac{2x}{6}=\frac{3x}{12}$

d) $x-\frac{2x}{3}=\frac{7}{15}-\frac{3x}{5}$

e) $1-\frac{x}{7}+x=\frac{2x}{35}-\frac{x}{5}$

f) $\frac{5x}{6}-x+\frac{10}{9}=\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}+1$

a) mín.c.m (5, 10, 2, 3) = 30

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{10}-\frac{1}{2}=\frac{x}{3} \to 30\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{10}-\frac{1}{2}\right)=30\left(\frac{x}{3}\right) \to 6x+3x-15=10x \to 9x-15=10x \to$$

$$\to x=-15$$

b) mín.c.m (2, 3, 5, 15) = 30

$$\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3x}{5}+\frac{2}{15} \to 30\left(\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}\right)=30\left(\frac{3x}{5}+\frac{2}{15}\right) \to 45x-20=18x+4 \to$$

$$\to 45x-18x=20+4 \to 27x=24 \to x=\frac{24}{27} \to x=\frac{8}{9}$$

c) mín.c.m (3, 4, 6, 12) = 12

$$\frac{2}{3}-\frac{x}{4}+\frac{2x}{6}=\frac{3x}{12} \to 12\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{4}+\frac{2x}{6}\right)=12\left(\frac{3x}{12}\right) \to 8-3x+4x=3x \to$$

$$\to 8=3x+3x-4x \to 8=2x \to x=4$$

d) mín.c.m (3, 15, 5) = 15

$$x-\frac{2x}{3}=\frac{7}{15}-\frac{3x}{5} \to 15\left(x-\frac{2x}{3}\right)=15\left(\frac{7}{15}-\frac{3x}{5}\right) \to 15x-10x=7-9x \to$$

$$\to 15x-10x+9x=7 \to 14x=7 \to x=\frac{7}{14} \to x=\frac{1}{2}$$

e) mín.c.m (7, 35, 5) = 35

$$1-\frac{x}{7}+x=\frac{2x}{35}-\frac{x}{5} \to 35\left(1-\frac{x}{7}+x\right)=35\left(\frac{2x}{35}-\frac{x}{5}\right) \to 35-5x+35x=2x-7x \to$$

$$\to -5x+35x-2x+7x=-35 \to 35x=-35 \to x=-1$$

f) mín.c.m (6, 9, 2, 4) = 36

$$\frac{5x}{6}-x+\frac{10}{9}=\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}+1 \to 36\left(\frac{5x}{6}-x+\frac{10}{9}\right)=36\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}+1\right) \to$$

$$\to 30x-36x+40=18x-27x+36 \to -6x+40=-9x+36 \to$$

$$\to -6x+9x=36-40 \to 3x=-4 \to x=-\frac{4}{3}$$

7 **Resuelve e indica, si es el caso, cuándo la ecuación no tiene solución o tiene infinitas soluciones.**

a) $3x - 4 + 2x = 5x$ **b)** $7 - 4x - 5 = 6 - 5x$

c) $13x - 9 + 7x = 30$ **d)** $2x - 5 + 6x = 1 + 8x - 6$

e) $\frac{4x+6}{5} = \frac{2(2x+3)}{5}$ **f)** $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$

g) $\frac{3x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ **h)** $\frac{1+3x}{3} = \frac{2(3x-5)}{6}$

a) $3x - 4 + 2x = 5x \rightarrow 5x - 4 = 5x \rightarrow 0x = 4$

No tiene solución.

b) $7 - 4x - 5 = 6 - 5x \rightarrow 5x - 4x = 6 - 7 + 5 \rightarrow x = 4$

c) $13x - 9 + 7x = 30 \rightarrow 13x + 7x = 30 + 9 \rightarrow 20x = 39 \rightarrow x = \frac{39}{20}$

d) $2x - 5 + 6x = 1 + 8x - 6 \rightarrow 2x + 6x - 8x = 1 - 6 + 5 \rightarrow 0x = 0$

Tiene infinitas soluciones.

e) $\frac{4x+6}{5} = \frac{2(2x+3)}{5} \rightarrow 4x + 6 = 4x + 6 \rightarrow 0x = 0$

Tiene infinitas soluciones.

f) $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2x+1}{2} = \frac{2x+1}{2} \rightarrow 0x = 0$

Tiene infinitas soluciones.

g) $\frac{3x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \rightarrow \frac{6x+1}{4} = \frac{2x-1}{4} \rightarrow 6x + 1 = 2x - 1 \rightarrow 6x - 2x = -1 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{4} \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

h) $\frac{1+3x}{3} = \frac{2(3x-5)}{6} \rightarrow \frac{1+3x}{3} = \frac{3x-5}{3} \rightarrow 1 + 3x = 3x - 5 \rightarrow 0x = -6$

No tiene solución.

8 **Elimina los denominadores y resuelve.**

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{-1}{15}$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{13}{6}$

c) $\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} = -1$

d) $\frac{3x+1}{5} - x + 1 = 0$

e) $\frac{2(x+1)}{3} + \frac{3x-1}{2} = \frac{1}{6}$

f) $\frac{3(x-1)}{7} - 2(x+3) = -8$

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = \frac{-1}{15} \rightarrow 15 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{2x}{5}\right) = 15 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right) \rightarrow 5x - 6x = -1 \rightarrow -x = -1 \rightarrow x = 1$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{13}{6} \rightarrow 12 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) = 12 \cdot \frac{13}{6} \rightarrow 6x + 3x + 4x = 26 \rightarrow$

$\rightarrow 13x = 26 \rightarrow x = \frac{26}{13} \rightarrow x = 2$

c) $\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} = -1 \rightarrow 4 \cdot \left(\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4}\right) = 4 \cdot (-1) \rightarrow 2(x+1) + 3x - 1 = -4 \rightarrow$

$\rightarrow 2x + 2 + 3x - 1 = -4 \rightarrow 5x + 1 = -4 \rightarrow 5x = -4 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow 5x = -5 \rightarrow x = -1$

d) $\frac{3x+1}{5} - x + 1 = 0 \rightarrow 5\left(\frac{3x+1}{5} - x + 1\right) = 5 \cdot 0 \rightarrow 3x + 1 - 5x + 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2x + 6 = 0 \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$

e) $\frac{2(x+1)}{3} + \frac{3x-1}{2} = \frac{1}{6} \rightarrow 6\left(\frac{2(x+1)}{3} + \frac{3x-1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cdot 2(x+1) + 3(3x-1) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4x + 4 + 9x - 3 = 1 \rightarrow 13x + 1 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 13x = 1 - 1 \rightarrow 13x = 0 \rightarrow x = 0$

f) $\frac{3(x-1)}{7} - 2(x+3) + 8 = 0 \rightarrow 7\left(\frac{3(x-1)}{7} - 2(x+3) + 8\right) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3(x-1) - 14(x+3) + 56 = 7 \cdot 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3x - 3 - 14x - 42 + 56 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -11x + 11 = 0 \rightarrow x = \frac{-11}{-11} = 1$

9 Simplifica y resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x=x-\frac{1}{6}$

b) $\frac{3x-3}{4}=\frac{x+4}{3}$

c) $\frac{3(x+3)}{2}-2(2x-2)=8x-1-2(x+3)$

d) $\frac{3(x+3)}{4}-\frac{3x-2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{x+3}{12}$

e) $\frac{x+7}{2}-\frac{7-x}{6}=\frac{x-7}{12}+7$

f) $\frac{5+x}{4}-\frac{5-x}{5}=\frac{1+x}{4}-1$

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x=x-\frac{1}{6} \to 6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)=6\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right) \to 3+2x=6x-1 \to$

$\to 3+1=6x-2x \to 4=4x \to x=\frac{4}{4} \to x=1$

b) $\frac{3x-3}{4}=\frac{x+4}{3} \to 12\cdot\frac{3x-3}{4}=12\cdot\frac{x+4}{3} \to 3(3x-3)=4(x+4) \to$

$\to 9x-9=4x+16 \to 9x-4x=16+9 \to 5x=25 \to x=\frac{25}{5} \to x=5$

c) $\frac{3(x+3)}{2}-2(2x-2)=8x-1-2(x+3) \to \frac{3(x+3)}{2}-4x+4=8x-1-2x-6 \to$

$\to \frac{3(x+3)}{2}-4x+4=6x-7 \to \frac{3(x+3)}{2}=6x+4x-7-4 \to$

$\to \frac{3(x+3)}{2}=10x-11 \to 2\cdot\frac{3(x+3)}{2}=2\cdot(10x-11) \to$

$\to 3(x+3)=20x-22 \to 3x+9=20x-22 \to$

$\to 9+22=20x-3x \to 31=17x \to x=\frac{31}{17}$

d) $\frac{3(x+3)}{4}-\frac{3x-2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{x+3}{12} \to 12\cdot\left(\frac{3(x+3)}{4}-\frac{3x-2}{3}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{x+3}{12}\right) \to$

$\to 3\cdot 3(x+3)-4(3x-2)=2+x+3 \to$

$\to 9x+27-12x+8=5+x \to -3x+35=5+x \to$

$\to 35-5=x+3x \to 30=4x \to x=\frac{30}{4} \to x=\frac{15}{2}$

e) $\frac{x+7}{2}-\frac{7-x}{6}=\frac{x-7}{12}+7 \to 12\left(\frac{x+7}{2}-\frac{7-x}{6}\right)=12\left(\frac{x-7}{12}+7\right) \to$

$\to 6(x+7)-2(7-x)=x-7+12\cdot 7 \to$

$\to 6x+42-14+2x=x-7+84 \to$

$\to 8x+28=x+77 \to 8x-x=77-28 \to$

$\to 7x=49 \to x=\frac{49}{7} \to x=7$

f) $\frac{5+x}{4}-\frac{5-x}{5}=\frac{1+x}{4}-1 \to 20\left(\frac{5+x}{4}-\frac{5-x}{5}\right)=20\left(\frac{1+x}{4}-1\right) \to$

$\to 5(5+x)-4(5-x)=5(1+x)-20 \to$

$\to 25+5x-20+4x=5+5x-20 \to$

$\to 9x+5=5x-15 \to 9x-5x=-15-5 \to$

$\to 4x=-20 \to x=\frac{-20}{4} \to x=-5$

Página 113

11 Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla su solución:

a) $(x+1)(x-1)-3(x+2)=x(x+2)+4$

b) $(2x+3)^2-(2x-3)^2=x(x+3)-(x^2+1)$

c) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)-x\left(x+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{3}(x-2)$

a) $(x+1)(x-1)-3(x+2)=x(x+2)+4 \rightarrow x^2-1-3x-6=x^2+2x+4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-3x-7=x^2+2x+4 \rightarrow x^2-x^2-3x-2x-7-4=0 \rightarrow -5x-11=0 \rightarrow$

$\rightarrow -5x=11 \rightarrow x=\dfrac{-11}{5}$

b) $(2x+3)^2-(2x-3)^2=x(x+3)-(x^2+1) \rightarrow 4x^2+12x+9-(4x^2-12x+9)=x^2+3x-x^2-1 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2+12x+9-4x^2+12x-9=3x-1 \rightarrow 24x=3x-1 \rightarrow 24x-3x=-1 \rightarrow$

$\rightarrow 21x=-1 \rightarrow x=\dfrac{-1}{21}$

c) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)-x\left(x+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{3}(x-2) \rightarrow x^2-\dfrac{1}{9}-x^2-\dfrac{1}{6}x=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3} \rightarrow$

$\rightarrow -\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3} \rightarrow 18\cdot\left(-\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{9}\right)=18\cdot\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}\right) \rightarrow -3x-2=6x-2\cdot 6 \rightarrow$

$\rightarrow 12-2=6x+3x \rightarrow 10=9x \rightarrow x=\dfrac{10}{9}$

Ecuaciones de segundo grado

12 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula de resolución:

a) $7x^2-21x=0$ **b)** $2x^2+x=0$ **c)** $2x^2-14x=0$

d) $4x^2-32x=0$ **e)** $x^2-36=0$ **f)** $3x^2-147=0$

a) $7x^2-21x=0 \rightarrow 7x(x-3)=0 \begin{cases} 7x=0 \rightarrow x=0 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$

b) $2x^2+x=0 \rightarrow x(2x+1)=0 \begin{cases} x=0 \\ 2x+1=0 \rightarrow 2x=-1 \rightarrow x=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

c) $2x^2-14x=0 \rightarrow 2x(x-7)=0 \begin{cases} 2x=0 \rightarrow x=0 \\ x-7=0 \rightarrow x=7 \end{cases}$

d) $4x^2-32x=0 \rightarrow 4x(x-8)=0 \begin{cases} 4x=0 \rightarrow x=0 \\ x-8=0 \rightarrow x=8 \end{cases}$

e) $x^2-36=0 \rightarrow x^2=36 \rightarrow x=\pm\sqrt{36} \begin{cases} x=-6 \\ x=6 \end{cases}$

f) $3x^2-147=0 \rightarrow 3x^2=147 \rightarrow x^2=\dfrac{147}{3} \rightarrow x^2=49 \rightarrow x=\pm\sqrt{49} \begin{cases} x=-7 \\ x=7 \end{cases}$

13 **Copia en tu cuaderno, completa las casillas vacías y calcula las soluciones de la siguiente ecuación:**

$$\mathbf{15x^2 - 11x + 2 = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 15 \\ b = -11 \\ c = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{-(\square) \pm \sqrt{(\square)^2 - 4 \cdot \square \cdot \square}}{2 \cdot \square}$$

$15x^2 - 11x + 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 15 \\ b = -11 \\ c = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 2}}{2 \cdot 15} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 120}}{30} =$$

$$= \frac{11 \pm 1}{30} \begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5} \\ x_2 = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

14 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$ **b)** $3x^2 - 3x - 6 = 0$

c) $4x^2 + 16x + 16 = 0$ **d)** $x^2 + x + 3 = 0$

e) $x^2 - 18x + 81 = 0$ **f)** $x^2 - 5x - 24 = 0$

g) $x^2 - 9x + 14 = 0$ **h)** $x^2 - 6x + 10 = 0$

a) $2x^2 - 6x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} \begin{cases} \dfrac{6+2}{4} \to x = \dfrac{8}{4} \to x = 2 \\ \dfrac{6-2}{4} \to x = \dfrac{4}{4} \to x = 1 \end{cases}$$

b) $3x^2 - 3x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{6} = \frac{3 \pm 9}{6} \begin{cases} \dfrac{3+9}{6} \to x = \dfrac{12}{6} \to x = 2 \\ \dfrac{3-9}{6} \to x = \dfrac{-6}{6} \to x = -1 \end{cases}$$

c) $4x^2 + 16x + 16 = 0 \to 4(x^2 + 4x + 4) = 0 \to x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} \to x = -2$$

d) $x^2 + x + 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \to \text{Sin solución}$$

e) $x^2 - 18x + 81 = 0$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = \frac{18 \pm 0}{2} \to x = 9$$

f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{5 \pm 11}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{5+11}{2} \to x = \dfrac{16}{2} \to x = 8 \\ \dfrac{5-11}{2} \to x = \dfrac{-6}{2} \to x = -3 \end{cases}$$

g) $x^2 - 9x + 14 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \begin{cases} \dfrac{9+5}{2} \to x = \dfrac{14}{2} \to x = 7 \\ \dfrac{9-5}{2} \to x = \dfrac{4}{2} \to x = 2 \end{cases}$$

h) $x^2 - 6x + 10 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \to \text{Sin solución}$$

15 **Reduce, resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $3x(x-2)-6=(x+1)(x-4)$ **b)** $x-(x-2)^2=3x(x-1)-4$

c) $(x+3)(x-3)-6x=2x(5-x)-14$ **d)** $5x^2-3x(x-4)=(x-2)^2+13$

a) $3x(x-2)-6=(x+1)(x-4) \to 3x^2-6x-6=x^2-4x+x-4 \to$
$\to 3x^2-6x-6=x^2-3x-4 \to$
$\to 3x^2-x^2-6x+3x-6+4=0 \to 2x^2-3x-2=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}$$

$$x=\begin{cases}\dfrac{3+5}{4} \to x=\dfrac{8}{4} \to x=2\\[2mm] \dfrac{3-5}{4} \to x=\dfrac{-2}{4} \to x=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

• Si $x=2 \to 3\cdot 2\cdot(2-2)-6=(2+1)(2-4) \to 0-6=3\cdot(-2) \to -6=-6$

• Si $x=\dfrac{-1}{2} \to 3\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-1}{2}-2\right)-6=\left(\dfrac{-1}{2}+1\right)\left(\dfrac{-1}{2}-4\right) \to$

$\to 3\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-5}{2}\right)-6=\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{-9}{2}\right) \to \dfrac{15}{4}-6=\dfrac{-9}{4} \to$

$\to \dfrac{15-24}{4}=\dfrac{-9}{4} \to \dfrac{-9}{4}=\dfrac{-9}{4}$

b) $x-(x-2)^2=3x(x-1)-4 \to x-(x^2-4x+4)=3x^2-3x-4 \to$

$\to -x^2+5x-4=3x^2-3x-4 \to 4x^2-8x=0 \to$

$$\to 4x(x-2)=0\begin{cases}4x=0 \to x=0\\ x-2=0 \to x=2\end{cases}$$

• Si $x=0 \to 0-(0-2)^2=3\cdot 0\,(0-1)-4 \to -4=-4$

• Si $x=2 \to 2-(2-2)^2=3\cdot 2\cdot(2-1)-4 \to 2=6-4 \to 2=2$

c) $(x+3)(x-3)-6x=2x(5-x)-14 \to x^2-9-6x=10x-2x^2-14 \to 3x^2-16x+5=0$

$$x=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 3\cdot 5}}{2\cdot 3}=\frac{16\pm 14}{6}\begin{cases}x=\dfrac{30}{6}=5\\[2mm] x=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

• Si $x=5 \to (5+3)(5-3)-6\cdot 5=2\cdot 5\cdot(5-5)-14 \to 16-30=-14 \to -14=-14$

• Si $x=\dfrac{1}{3} \to \left(\dfrac{1}{3}+3\right)\left(\dfrac{1}{3}-3\right)-6\cdot\dfrac{1}{3}=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(5-\dfrac{1}{3}\right)-14 \to -\dfrac{98}{9}=-\dfrac{98}{9}$

d) $5x^2-3x(x-4)=(x-2)^2+13 \to 5x^2-3x^2+12x=x^2-4x+4+13 \to$
$\to 2x^2+12x=x^2-4x+17 \to$
$\to 2x^2-x^2+12x+4x-17=0 \to x^2+16x-17=0$

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 1\cdot(-17)}}{2\cdot 1}=\frac{-16\pm\sqrt{256+68}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-16\pm 18}{2}$$

$$x=\begin{cases}\dfrac{-16+18}{2} \to x=\dfrac{2}{2} \to x=1\\[2mm] \dfrac{-16-18}{2} \to x=\dfrac{-34}{2} \to x=-17\end{cases}$$

• Si $x=1 \to 5\cdot 1^2-3\cdot 1(1-4)=(1-2)^2+13 \to 5-3\cdot(-3)=(-1)^2+13 \to$
$\to 5+9=14 \to 14=14$

• Si $x=-17 \to 5\cdot(-17)^2-3\cdot(-17)\cdot(-17-4)=(-17-2)^2+13 \to$
$\to 1\,445-1\,071=361+13 \to 374=374$

16 Resuelve, como en el ejemplo.

- $\frac{3x}{x+1} - 1 = \frac{2}{x}$ **Multiplicando por** $x(x+1)$**:**

$$3x \cdot x - x(x+1) = 2(x+1) \to 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} 2 \\ -1/2 \end{cases}$$

a) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x-1}{x}$ ← **Multiplica por** x**.**

b) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$ ← **Multiplica por** $2x$**.**

c) $2 - \frac{3}{x-1} = \frac{5}{x+1}$ ← **Multiplica por** $(x-1)(x+1)$**.**

d) $\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2}{3}$ ← **Multiplica por** $3x(x-1)$**.**

a) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x-1}{x} \to 5x^2 - 3 = x - 1 \to 5x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{10} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{41}}{10} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{41}}{10} \end{cases}$$

b) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x} \to x^2 + 3x - 2 = 2x - 6 + 4 - x^2 \to$

$$\to 2x^2 + x = 0 \to x(2x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \text{No vale} \\ 2x + 1 = 0 \to x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La solución $x = 0$ no es válida pues anula algunos denominadores.

La única solución válida es $x = -\frac{1}{2}$.

c) $2 - \frac{3}{x-1} = \frac{5}{x+1} \to 2(x-1)(x+1) - 3(x+1) = 5(x-1) \to 2(x^2-1) - 3x - 3 = 5x - 5 \to$

$$\to 2x^2 - 2 - 3x - 3 = 5x - 5 \to 2x^2 - 8x = 0 \to 2x(x-4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 4 = 0 \to x_2 = 4 \end{cases}$$

d) $\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2}{3} \to 15x - 6(x-1) = 2x(x-1) \to 15x - 6x + 6 = 2x^2 - 2x \to 2x^2 - 11x - 6 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 13}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{24}{4} = 6 \\ x_2 = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

18 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{x(3x-1)=0}$ **b)** $\boldsymbol{3x(x+2)=0}$

c) $\boldsymbol{(x+1)(x+3)=0}$ **d)** $\boldsymbol{(x-5)(x+5)=0}$

e) $\boldsymbol{(x-5)^2=0}$ **f)** $\boldsymbol{(2x-5)^2=0}$

g) $\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-1)=0}$ **h)** $\boldsymbol{\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0}$

a) $x(3x-1)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ 3x-1=0 \to x_2=\frac{1}{3} \end{cases}$

b) $3x(x+2)=0 \begin{cases} 3x=0 \to x_1=0 \\ x+2=0 \to x_2=-2 \end{cases}$

c) $(x+1)(x+3)=0 \begin{cases} x+1=0 \to x_1=-1 \\ x+3=0 \to x_2=-3 \end{cases}$

d) $(x-5)(x+5)=0 \begin{cases} x-5=0 \to x_1=5 \\ x+5=0 \to x_2=-5 \end{cases}$

e) $(x-5)^2=0 \to x-5=0 \to x=5$

f) $(2x-5)^2=0 \to 2x-5=0 \to x=\frac{5}{2}$

g) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-1)=0 \begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \to x_1=\frac{1}{2} \\ 2x-1=0 \to x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$

h) $\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0 \begin{cases} x-\frac{2}{5}=0 \to x_1=\frac{2}{5} \\ x-\frac{1}{4}=0 \to x_2=\frac{1}{4} \end{cases}$

Resuelve problemas

Con ecuaciones de primer grado

19 **Calcula un número cuya mitad es 20 unidades menor que su triple.**

Llamamos x al número que buscamos.

$\frac{x}{2}+20=\frac{x}{3} \to 6\left(\frac{x}{2}+20\right)=6\cdot\frac{x}{3} \to 3x+120=2x \to 3x-2x=-120 \to x=-120$

El número que buscamos es –120.

20 **Si a un número le restas 12, se reduce a su tercera parte. ¿Cuál es ese número?**

Llamamos x al número que buscamos.

$x-12=\frac{x}{3} \to 3(x-12)=3\cdot\frac{x}{3} \to 3x-36=x \to 3x-x=36 \to 2x=36 \to x=18$

Es el número 18.

21 **La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor. ¿De qué números se trata?**

Llamamos x a uno de los números que buscamos.

$(x-1)+x+(x+1)=4(x-1) \to 3x=4x-4 \to 4=4x-3x \to 4=x$

Los números que buscamos son 3, 4 y 5.

22 **El mayor de los ángulos de un triángulo mide 50° más que el mediano; y este mide 20° más que el pequeño. ¿Cuánto mide cada ángulo?**

Llamamos x al ángulo más pequeño.

– El ángulo mediano mide $x + 20$ grados.

– El mayor de los ángulos mide $x + 20 + 50 = x + 70$ grados.

$$x + (x + 20) + (x + 70) = 180 \rightarrow 3x + 90 = 180 \rightarrow 3x = 180 - 90 \rightarrow 3x = 90 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{90}{3} \rightarrow x = 30°$$

El menor de los ángulos mide 30°, el mediano 30° + 20° = 50°, y el mayor 30° + 70° = 100°.

23 **Dos hermanas se llevan 3 años y su padre tiene 45. Hace 7 años, la suma de las edades de las hijas era la mitad que la del padre. ¿Qué edad tiene cada hija?**

	HIJA I	HIJA II	PADRE
HOY	x	$x + 3$	45
HACE 7 AÑOS	$x - 7$	$x + 3 - 7$	$45 - 7$

Edades actuales de las hermanas: x y $x + 3$.

Hace 7 años $\rightarrow$ $(x - 7) + (x + 3 - 7) = \frac{45 - 7}{2} \rightarrow 2x - 11 = 19 \rightarrow x = 15$

Las edades de las hermanas son 15 y 18 años.

24 **Yago tiene 25 años menos que su padre. Dentro de 10 años, la edad del padre será el doble que la de Yago. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Edad actual del padre: x. Edad actual de Yago: $x - 25$

Dentro de 10 años $\rightarrow$ $x + 10 = 2(x - 25 + 10) \rightarrow x + 10 = 2x - 30 \rightarrow x = 40$

Yago tiene 40 – 25 = 15 años, y su padre, 40 años.

25 **La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Llamamos x a la edad de la madre. Entonces, tenemos que:

– La edad del padre es $x + 6$ años.

– La edad de cada uno de los gemelos es $x - 27$ años.

$$x + (x + 6) + 2 \cdot (x - 27) = 104 \rightarrow x + x + 6 + 2x - 54 = 104 \rightarrow 4x - 48 = 104 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 104 + 48 \rightarrow 4x = 152 \rightarrow x = \frac{152}{4} \rightarrow x = 38$$

La madre tiene 38 años.

Por tanto, el padre tiene 38 + 6 = 48 años, y los gemelos, 38 – 27 = 11 años cada uno.

26 Un coleccionista de cómics vendió 2/5 de su colección y luego compró otros 100. Después de esto, tenía 40 cómics más que al principio. ¿Cuántos tenía?

Llamamos x al número inicial de cómics.

$\frac{3}{5}x + 100 = x + 40 \rightarrow 3x + 500 = 5x + 200 \rightarrow x = 150$

Al principio tenía 150 cómics.

27 Creía tener el dinero justo para comprar 8 entradas de teatro pero el precio de cada una es 4 € más caro de lo que pensaba. Ahora solo puedo comprar 5 y me sobran 7 €. ¿Cuál es el precio actual de una entrada?

Coste real → 5x

Coste esperado → 8 (x – 4)

Dinero que tengo → $\begin{cases} 5x + 7 \\ 8(x - 4) \end{cases}$

Llamamos x al precio que pensaba que costaba una entrada.

$8x = 5(x + 4) + 7 \rightarrow 8x = 5x + 27 \rightarrow x = 9$

El precio actual de una entrada es 9 + 4 = 13 €.

28 Contratamos un autobús para una salida al campo. Con todas las plazas ocupadas, el precio del billete es de 12 €; pero quedaron 4 plazas libres, por lo que el viaje costó 13,50 €.

¿Cuántas plazas tiene el autobús?

Llamamos x al número de plazas del autobús.

$12x = 13{,}5(x - 4) \rightarrow 13{,}5x - 12x = 54 \rightarrow x = 36$

El autobús tiene 36 plazas.

29 Con 12 € que tengo, podría ir dos días a la piscina, un día al cine y aún me sobrarían 4,50 €. La entrada de la piscina cuesta 1,50 € menos que la del cine. ¿Cuánto cuesta la entrada del cine?

Llamamos x al precio de la entrada al cine. Por tanto, tenemos que:

– La entrada de la piscina cuesta $x - 1{,}50$ euros.

$2(x - 1{,}50) + x + 4{,}50 = 12 \rightarrow 2x - 3 + x + 4{,}50 = 12 \rightarrow 3x + 1{,}50 = 12 \rightarrow$

$\rightarrow 3x = 12 - 1{,}50 \rightarrow 3x = 10{,}50 \rightarrow x = \frac{10{,}50}{3} \rightarrow x = 3{,}50$

La entrada del cine cuesta 3,50 €.

30 **¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,60 €/L tenemos que añadir a 60 L de aceite de oliva de 2,80 €/L para obtener una mezcla de 2,50 €/L?**

Consulta el problema resuelto 5 de la página 111.

x son los litros de aceite de orujo.

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
ORUJO	x	1,6	$1,6x$
OLIVA	60	2,8	$2,8 \cdot 60$
MEZCLA	$x + 60$	2,5	$2,5(x + 60)$

$1,6x + 168 = 2,5x + 150 \rightarrow$
$\rightarrow 18 = 0,9x \rightarrow x = 20\ l$

Tenemos que añadir 20 litros.

31 **Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30 €/kg. Si el precio de la más barata es la mitad que el de la otra, ¿cuál es el precio de cada pintura?**

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
PINTURA I	30	$2x$	$60x$
PINTURA II	50	x	$50x$
MEZCLA	80	3,30	$80 \cdot 3,3$

$60x + 50x = 264 \rightarrow$
$\rightarrow 110x = 264 \rightarrow x = 2,4$ €/kg

La pintura cara vale 4,8 €/kg, y la pintura barata, 2,4 €/kg.

32 **Una marca de café de 14,15 €/kg se elabora con un 30 % de café colombiano de 18 €/kg, y el resto, con otro. ¿Cuál es el precio de ese otro?**

Para obtener 1 kg de mezcla, ponemos 0,3 kg de café colombiano y 0,7 kg del otro café.

$0,3 \cdot 18 + 0,7x = 1 \cdot 14,15 \rightarrow 0,7x = 8,75 \rightarrow x = 12,5$ €/kg

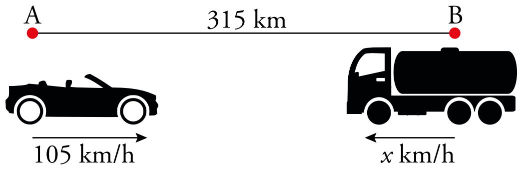
El precio del café barato es 12,5 €/kg.

33 **Un coche sale de una ciudad A hacia otra B, distante 315 km, a una velocidad de 105 km/h. Simultáneamente, sale de B hacia A un camión que tarda en cruzarse con el coche una hora y cuarenta y cinco minutos.**

¿Cuál era la velocidad del camión?

Si x es la velocidad del camión, este y el coche se acercan a una velocidad de $(x + 105)$ km/h. Transforma una hora y cuarenta y cinco minutos en horas. Con esto, ya puedes aplicar la fórmula $t = d/v$.

Llamamos x a la velocidad a la que circula el camión.



Tardan 1 hora y 45 minutos en encontrarse $\rightarrow$ $t = 1{,}75$ horas

$$t = \frac{d}{v} \rightarrow 1{,}75 = \frac{315}{105 + x}$$

$$1{,}75 = \frac{315}{105 + x} \rightarrow 1{,}75(105 + x) = 315 \rightarrow 183{,}75 + 1{,}75x = 315 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1{,}75x = 315 - 183{,}75 \rightarrow 1{,}75x = 131{,}25 \rightarrow\rightarrow x = \frac{131{,}25}{1{,}75}$$

$$\rightarrow x = 75 \text{ km/h}$$

La velocidad del camión era de 75 km/h.

34 **Una ciclista que va a 18 km/h tarda 45 minutos en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 6 km. ¿Qué velocidad lleva el que iba delante?**

Llamamos x a la velocidad del ciclista que salió primero.

– El segundo ciclista tarda 45 minutos = 0,75 horas en alcanzar al primero.

– El primer ciclista recorrerá $\rightarrow$ $0{,}75x$ km

– El segundo ciclista recorrerá $\rightarrow$ $18 \cdot 0{,}75$ km

$$18 \cdot 0{,}75 = 0{,}75x + 6 \rightarrow 13{,}5 = 0{,}75x + 6 \rightarrow 7{,}5 = 0{,}75x \rightarrow x = \frac{7{,}5}{0{,}75} \rightarrow x = 10 \text{ km/h}$$

El ciclista que va delante lleva una velocidad de 10 km/h.

35 **Un ciclista sale a la carretera a una velocidad de 15 km/h. ¿Qué velocidad deberá llevar otro ciclista que sale media hora después si pretende alcanzar al primero en hora y media?**

Llamamos x a la velocidad del ciclista que en segundo lugar.

– 1 hora y media $\rightarrow$ 1,5 horas

– El primer ciclista recorrerá $\rightarrow$ $15 \cdot 2 = 30$ km

– El segundo ciclista recorrerá $\rightarrow$ $1{,}5x$

$$1{,}5x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{1{,}5} \rightarrow x = 20 \text{ km/h}$$

El ciclista deberá llevar una velocidad de 20 km/h.

36 **Ana sale en su coche a 80 km/h. Se para 15 min para echar gasolina y después conduce un buen rato a 100 km/h. Cuando llega a su destino, comprueba que hizo 250 km en 3 horas, contando la parada. ¿Cuánto tiempo condujo a 80 km/h?**

Tiempo marchando a 80 km/h $\rightarrow x$

Tiempo marchando a 100 km/h $\rightarrow 3 - x - \frac{1}{4}$

Distancia recorrida a 80 km/h	+	Distancia recorrida a 100 km/h	=	250 km

Llamamos x al tiempo que conduce a 80 km/h.

El tiempo del viaje, sin parada, es 3 h – 15 min = 2,75 h. Por tanto, el tiempo que conduce a 100 km/h es $2{,}75 - x$.

El espacio que recorre a 80 km/h es $80x$ y el que recorre a 100 km/h es $100(2{,}75 - x)$. Así:

$$80x + 275 - 100x = 250 \rightarrow -20x = -25 \rightarrow x = \frac{-25}{-20} = 1{,}25$$

Ana conduce 1,25 h a 80 km/h.

37 **Sobre la mesa veo tres cajas rectangulares cuyas bases miden 6 cm × 6 cm, 4 cm × 9 cm y 4 cm × 6 cm. La primera tiene doble capacidad que la segunda, y la segunda, doble que la tercera. ¿Cuál es la altura de cada una si apilando las tres, una sobre otra, alcanzan una altura de 30 cm?**

Las superficies de las bases de las dos primeras cajas son iguales. Por tanto, si la primera tiene doble capacidad que la segunda es porque su altura también es el doble.

Así, llamamos:

- Altura de la 1.ª caja $\rightarrow 2x$
- Altura de la 2.ª caja $\rightarrow x$
- Altura de la 3.ª caja $\rightarrow 30 - (2x + x) = 30 - 3x$

Si la capacidad de la 2.ª caja es doble que la tercera:

$4 \cdot 9 \cdot x = 2\,[4 \cdot 6 \cdot (30 - 30x)] \rightarrow 36x = 1\,440 - 144x \rightarrow x = 8$

La altura de la 1.ª caja es 16 cm; de la segunda, 8 cm, y de la tercera, $30 - 3 \cdot 8 = 6$ cm.

Con ecuaciones de segundo grado

38 **El producto de un número natural por su siguiente es 3 unidades menor que el triple de la suma de ambos. ¿Cuál es ese número?**

Llamamos x al número natural buscado.

$$x(x + 1) + 3 = 3(x + x + 1) \rightarrow x^2 + x + 3 = 6x + 3 \rightarrow x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones posibles, 0 y 5.

39 Si multiplicamos un número por su anterior y restamos 12, obtenemos su triple. ¿Qué número es?

Llamamos x al número buscado.

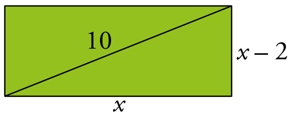
$x(x-1) - 12 = 3x \rightarrow x^2 - x - 12 = 3x \rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{2} = 6 \\ x_2 = -\dfrac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones posibles, –2 y 6.

40 Recuerda el teorema de Pitágoras y resuelve:

¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que la base mide 2 cm más que la altura y que la diagonal mide 10 cm?



Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 + (x-2)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + x^2 - 4x + 4 = 100 \rightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2} \begin{cases} x = \dfrac{16}{8} = 8 \\ x = -\dfrac{12}{2} = -6 \end{cases}$$

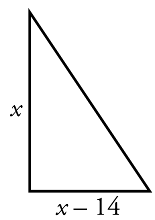
Como buscamos una longitud, solo vale la 1.ª solución.

Las dimensiones del rectángulo son 8 cm y 6 cm.

41 Los catetos de un triángulo rectángulo suman 14 cm y su área es de 24 cm². Halla la medida de la hipotenusa.

$\dfrac{x(x-14)}{2} = 24 \rightarrow x^2 - 14x = 48 \rightarrow x^2 - 14x - 48 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-48)}}{2} = \frac{14 \pm 2\sqrt{97}}{2} \begin{cases} x = 7 + \sqrt{97} \\ x = 7 - \sqrt{97} \quad \text{No vale.} \end{cases}$$



Calculamos la hipotenusa:

$(7 + \sqrt{97})^2 + (\sqrt{97} - 7)^2 = 49 + 14\sqrt{97} + 97 + 97 - 14\sqrt{97} + 49 = 292$

La hipotenusa mide $\sqrt{292}$ cm $= 2\sqrt{73}$ cm.

42 Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

Llamamos x al lado del cuadrado.

$(2x)^2 = x^2 + 147 \rightarrow 3x^2 = 147 \rightarrow x = 7$

El lado del cuadrado mide 7 cm.

Página 115

44 **En la cocina de cierto restaurante se han preparado varias tapas con 300 gramos de salmón. La cocinera piensa que si hubiera puesto 5 gramos menos en cada tapa, le habrían salido 10 tapas más. ¿Cuántos gramos de salmón se pusieron en cada tapa y cuántas tapas se hicieron?**

Llamamos x al número de gramos de salmón que se han puesto en cada tapa. Por tanto, el número de tapas preparadas es $\frac{300}{x}$.

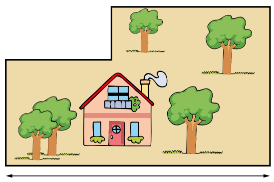
$\frac{300}{x-5} = \frac{300}{x} + 10 \rightarrow 300x = 300(x-5) + 10x(x-5) \rightarrow 300x = 300x - 1500 + 10x^2 - 50x \rightarrow$

$\rightarrow 10x^2 - 50x - 1500 = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 150 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150)}}{2} = \frac{5 \pm 25}{3} \begin{cases} x = 15 \\ x = -10 \quad \text{No vale.} \end{cases}$

Se pusieron 15 g de salmón en cada tapa y se hicieron $\frac{300}{15} = 20$ tapas.

45 **El terreno representado en la ilustración es el resultado de la unión de dos parcelas cuadradas cuyos lados suman 25 m. Su superficie total es de 325 m^2. ¿Cuál es su perímetro?**



$x^2 + (25 - x)^2 = 325 \rightarrow x^2 + 625 - 50x + x^2 = 325 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 50x + 300 = 0 \rightarrow x^2 - 25x + 150 = 0$

$x = \frac{25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \\ x = 10 \end{cases}$

El perímetro de la parcela será 2(25 + 15) = 80 cm.

AUTOEVALUACIÓN

Página 115

1 Resuelve mentalmente y explica el proceso seguido.

a) $(x + 13)^2 = 25$ **b)** $\sqrt{x^2 + 15} = 8$

a) La suma que hay dentro del paréntesis debe ser 5, porque es el número que elevado al cuadrado da 25, por lo que $x = -8$.

b) La suma que hay dentro de la raíz debe dar 64, cuya raíz cuadrada es 8. Por ello, x^2 debe ser 49, y el número que elevado al cuadrado da 49 es 7, por lo que $x = 7$.

2 Resuelve.

a) $x - \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{4}{3}$ **b)** $\frac{x-1}{15} + \frac{x}{5} = \frac{2x+1}{3} - 2$

a) $x - \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + \frac{4}{3} \to 6x - x = 3x + 8 \to 2x = 8 \to x = 4$

b) $\frac{x-1}{15} + \frac{x}{5} = \frac{2x+1}{3} - 2 \to x - 1 + 3x = 5(2x+1) - 30 \to 4x - 1 = 10x + 5 - 30 \to$

$\to -1 + 25 = 10x - 4x \to 24 = 6x \to x = 4$

3 Encuentra las soluciones sin utilizar ninguna fórmula.

a) $x^2 - 8x = 2x$ **b)** $4x^2 + 6 = 7$

a) $x^2 - 8x = 2x \to x^2 - 10x = 0 \to x(x - 10) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 10 = 0 \to x_2 = 10 \end{cases}$

b) $4x^2 + 6 = 7 \to 4x^2 = 1 \to x^2 = \frac{1}{4} \to x = \pm\frac{1}{2}$

4 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ **b)** $(x - 1)^2 + 3x = 2x + 3$

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) $(x - 1)^2 + 3x = 2x + 3 \to x^2 - 2x + 1 + 3x = 2x + 3 \to x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

5 Si a un número le sumamos su mitad, obtenemos el mismo resultado que si a sus dos tercios le quitamos cinco unidades. ¿Qué número es?

Llamamos x al número buscado.

$x + \frac{x}{2} = \frac{2x}{3} - 5 \to 6x + 3x = 4x - 30 \to 5x = -30 \to x = -6$

El número buscado es –6.

6 **De las personas asociadas a un club deportivo, 1/3 juega al fútbol; 2/5, al baloncesto, y las 20 restantes, practican tenis.**

¿Cuántas personas en total están asociadas a ese club deportivo?

Personas asociadas $\to$ x.

$x - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2x}{5} = 20 \;\to\; 15x - 5x - 6x = 300 \;\to\; 4x = 300 \;\to\; x = 75$

Están asociadas 75 personas en total.

7 **Al mezclar cierta cantidad de café de 8 €/kg con 6 kilos de otra clase de café de 12 €/kg, resulta una mezcla de 9,50 €/kg.**

¿Cuántos kilos del primer tipo se han incluido en la mezcla?

Kilos de 8 €/kg en la mezcla $\to$ x

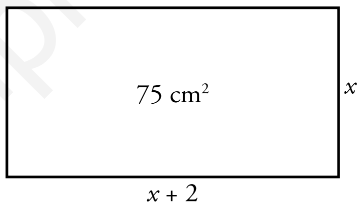
Kilos totales de la mezcla $\to$ $x + 6$

$8 \cdot x + 12 \cdot 6 = 9{,}5\,(x + 6) \;\to\; 8x + 72 = 9{,}5x + 57 \;\to\; 15 = 1{,}5x \;\to\; x = 10$

Se han incluido 10 kg de 8 €/kg en la mezcla.

8 **Un rectángulo ocupa una superficie de 75 cm^2 y su base mide 2 cm más que su altura.**

¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo?



$x(x + 2) = 75 \;\to\; x^2 + 2x = 75 \;\to\; x^2 + 2x - 75 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-75)}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{304}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4\sqrt{19}}{2}$

Nos quedamos solo con el valor positivo, $x = \dfrac{-2 \pm 4\sqrt{19}}{2} = 2\sqrt{19} - 1$, y calculamos el perímetro con ese valor $P = 4x + 4 = 4\,(2\sqrt{19} - 1) = 8\sqrt{19} - 4 \approx 30{,}87$ cm.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

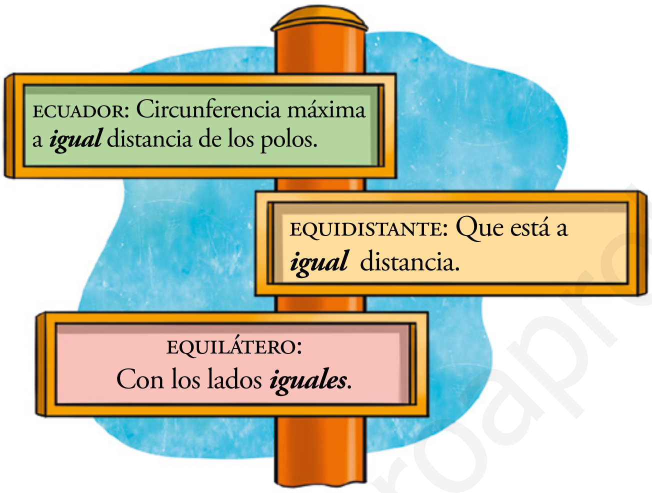
Página 115

Sabías que...

Ecuación viene del término latino *aequatio,* que, a su vez, se deriva de *aequare* (igualar) o *aequus* (igual).

A la derecha tienes otras palabras del castellano con la misma raíz.

- **Busca otras cuatro palabras que tengan la misma raíz que ecuación.**



- Respuesta abierta. Por ejemplo: equitativo, ecuánime, equilibrio y equinoccio.

8 ECUACIONES

1 ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Página 117

1 **Representa sobre unos mismos ejes las rectas correspondientes a estas ecuaciones haciendo una tabla de valores para cada una:**

a) $2x - y = 3$ **b)** $-x + y = 1$

¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?

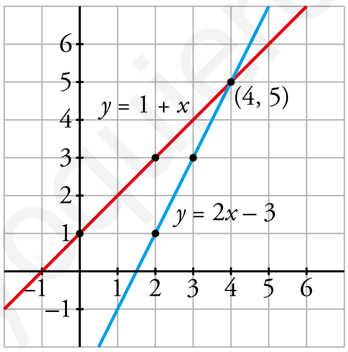
a) $2x - y = 3 \rightarrow y = 2x - 3$

x	2	3	4
y	1	3	5

b) $-x + y = 1 \rightarrow y = 1 + x$

x	0	2	4
y	1	3	5

La solución común a ambas ecuaciones es el punto (4, 5).



2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Página 118

1 **Tenemos 76 céntimos de euro en veinte monedas de dos y de cinco céntimos.**

¿Cuántas monedas de cada clase tenemos?

Plantea el sistema y resuélvelo por tanteo.

Incógnitas $\begin{cases} x\text{: número de monedas de dos céntimos} \\ y\text{: número de monedas de cinco céntimos} \end{cases}$

En total tengo 20 monedas $\rightarrow$ $x + y = 20$

El valor total es 76 céntimos de euro.

Valor de las monedas de dos céntimos: $2x$

Valor de las monedas de cinco céntimos: $5y$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 5y = 76 \end{cases}$$

Por tanteo, la solución del sistema es $x = 8$, $y = 12$. Por tanto, tenemos 8 monedas de dos céntimos y 12 monedas de cinco céntimos.

Página 119

2 **Fijándote bien en las ecuaciones que los forman, di cuál de los siguientes sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál indeterminado. Compruébalo representando las rectas:**

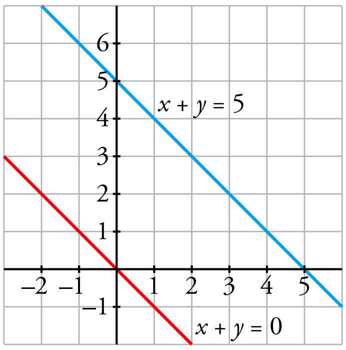
a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

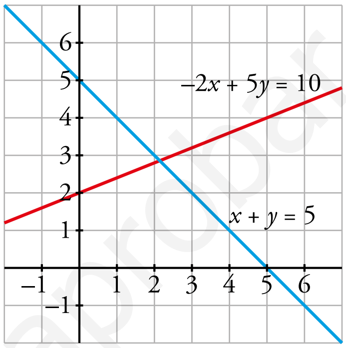
c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

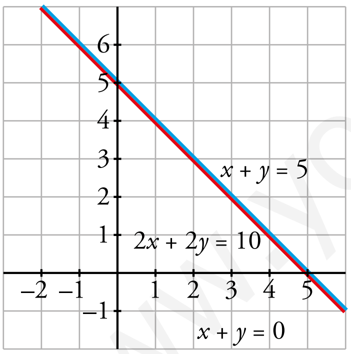
a) Es un sistema incompatible, porque si $x + y$ es igual a 5, no puede ser, a la vez, igual a 0.



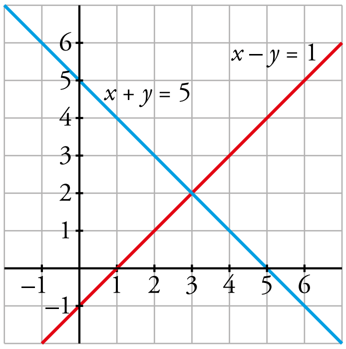
b) Es un sistema con una única solución puesto que las dos ecuaciones son distintas.



c) Es un sistema indeterminado porque una ecuación es el doble de la otra, es decir, las dos ecuaciones son iguales.



d) Es un sistema con una única solución, puesto que las dos ecuaciones son distintas.



3 **Completa los siguientes sistemas para que el primero tenga la solución $x = 5$, $y = 3$, el segundo sea incompatible, el tercero sea indeterminado, y el cuarto, también. Justifica tus respuestas.**

a) $\begin{cases} x - 4y = \dots \\ 2x \quad \dots = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x \quad \dots = \dots \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 11y = \dots \\ \dots + 33y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 4y = -7 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$ → Vale cualquier valor distinto de 8.

c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 11y = 3 \\ 15x + 33y = 9 \end{cases}$

3 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 120

1 Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} y = 6 - x \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$

$3x - 5(6 - x) = 2 \to 3x - 30 + 5x = 2 \to 8x = 2 + 30 \to 8x = 32 \to x = \frac{32}{8} \to x = 4$

$y = 6 - 4 \to y = 2$

Solución: $x = 4,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x = 1 - 2y \end{cases}$

$3(1 - 2y) + 10y = -1 \to 3 - 6y + 10y = -1 \to 3 + 4y = -1 \to 4y = -1 - 3 \to 4y = -4 \to$
$\to y = -1$

$x = 1 - 2 \cdot (-1) \to x = 1 + 2 \to x = 3$

Solución: $x = 3,\ y = -1$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases} \to \begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ y = 23 - 4x \end{cases}$

$5x - 3(23 - 4x) = 50 \to 5x - 69 + 12x = 50 \to 17x - 69 = 50 \to 17x = 50 + 69 \to$
$\to 17x = 119 \to x = \frac{119}{17} \to x = 7$

$y = 23 - 4 \cdot 7 = 23 - 28 = -5$

Solución: $x = 7,\ y = -5$

d) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - 2 = y \end{cases}$

$5x + 3x - 2 = 6 \to 8x - 2 = 6 \to 8x = 6 + 2 \to 8x = 8 \to x = 1$

$y = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1$

Solución: $x = 1,\ y = 1$

Página 121

2 **Resuelve, por el método de igualación, los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6 - x \\ y = x - 2 \end{cases}$

$6 - x = x - 2 \rightarrow 6 + 2 = x + x \rightarrow 8 = 2x \rightarrow x = \frac{8}{2} \rightarrow x = 4$

$y = 6 - 4 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 4, \ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x + 10y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 - 10y}{3} \\ x = 1 - 2y \end{cases}$

$\frac{-1 - 10y}{3} = 1 - 2y \rightarrow 3 \cdot \frac{-1 - 10y}{3} = 3 \cdot (1 - 2y) \rightarrow -1 - 10y = 3 - 6y \rightarrow$

$\rightarrow -10y + 6y = 3 + 1 \rightarrow -4y = 4 \rightarrow y = -1$

$x = 1 - 2 \cdot (-1) \rightarrow x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3, \ y = -1$

c) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6 - 5x \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

$6 - 5x = 3x - 2 \rightarrow 6 + 2 = 3x + 5x \rightarrow 8 = 8x \rightarrow x = 1$

$y = 6 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1$

Solución: $x = 1, \ y = 1$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{5x - 50}{3} = y \\ y = 23 - 4x \end{cases}$

$\frac{5x - 50}{3} = 23 - 4x \rightarrow 3 \cdot \frac{5x - 50}{3} = 3 \cdot (23 - 4x) \rightarrow 5x - 50 = 69 - 12x \rightarrow$

$\rightarrow 5x + 12x = 69 + 50 \rightarrow 17x = 119 \rightarrow x = \frac{119}{17} \rightarrow x = 7$

$y = 23 - 4 \cdot 7 = 23 - 28 = -5$

Solución: $x = 7, \ y = -5$

Página 122

3 Resuelve, por el método de reducción, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$2x = 8 \to x = \dfrac{8}{2} \to x = 4$

$4 + y = 6 \to y = 6 - 4 \to y = 2$

Solución: $x = 4,\ y = 2$

b) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

$4x = 8 \to x = \dfrac{8}{4} \to x = 2$

$2 + 5y = 7 \to 5y = 7 - 2 \to 5y = 5 \to y = 1$

Solución: $x = 2,\ y = 1$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = -26 \to \text{Multiplicamos por 2} \\ 4x + 10y = 32 \end{cases} \to \begin{cases} 6x - 10y = -52 \\ 4x + 10y = 32 \end{cases}$

$10x = -20 \to x = \dfrac{-20}{10} \to x = -2$

$3 \cdot (-2) - 5y = -26 \to -6 - 5y = -26 \to -5y = -26 + 6 \to -5y = -20 \to$

$\to y = \dfrac{-20}{-5} \to y = 4$

Solución: $x = -2,\ y = 4$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \to \text{Multiplicamos por 3} \end{cases} \to \begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 12x + 3y = 69 \end{cases}$

$17x = 119 \to x = \dfrac{119}{17} \to x = 7$

$5 \cdot 7 - 3y = 50 \to 35 - 3y = 50 \to -3y = 50 - 35 \to -3y = 15 \to y = \dfrac{15}{-3} \to y = -5$

Solución: $x = 7,\ y = -5$

Página 123

4 **Resuelve este sistema simplificando previamente:**

$$\begin{cases} \mathbf{2\,(x-1)+3\,(y+4)=9} \\ \mathbf{\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,(x-1)+3\,(y+4)=9 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2+3y+12=9 \\ 6\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)=6\cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y=9-12+2 \\ 3x-2y=18 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x+3y=-1 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 2 \\ 3x-2y=18 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+6y=-2 \\ 9x-6y=54 \end{cases}$$

$$13x \qquad = 52 \;\rightarrow\; x=\frac{52}{13} \;\rightarrow\; x=4$$

Sustituyendo:

$$2\cdot 4+3y=-1 \;\rightarrow\; 8+3y=-1 \;\rightarrow\; 3y=-1-8 \;\rightarrow\; 3y=-9 \;\rightarrow\; y=\frac{-9}{3} \;\rightarrow\; y=-3$$

La solución del sistema es $x=4$, $y=-3$

5 **Resuelve este sistema aplicando dos veces el método de reducción:**

$$\begin{cases} \mathbf{45x-11y=23} \\ \mathbf{7x+\;\;6y=19} \end{cases}$$

Para despejar x:

$$\begin{cases} 45x-11y=23 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 6 \\ 7x+\;\;6y=19 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 270x-66y=138 \\ 77x+66y=209 \end{cases}$$

$$347x \qquad = 347 \;\rightarrow\; x=1$$

Para despejar y:

$$\begin{cases} 45x-11y=23 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } (-7) \\ 7x+\;\;6y=19 \;\rightarrow\; \text{Multiplicamos por } 45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\,835x+\;\;77y=-161 \\ 2\,835x+270y=\;\;855 \end{cases}$$

$$347y \;=694 \;\rightarrow\; y=\frac{694}{347} \;\rightarrow\; y=2$$

La solución del sistema es $x=1$, $y=2$

4 ▸ RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 124

Hazlo tú

- **Dos kilos de lentejas y un kilo de arroz cuestan 3,85 €. Un kilo de lentejas y tres kilos de arroz cuestan 4,05 €. ¿A cuánto está el kilo de lentejas? ¿Y el de arroz?**

Precio de las lentejas $\rightarrow$ x €/kg

Precio del arroz $\rightarrow$ y €/kg

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3,85 \\ x + 3y = 4,05 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 2x + y = 3,85 \\ -2x - 6y = -8,1 \\ \hline -5y = -4,25 \end{array} \quad 8 \quad y = 0,85$$

$2x + 0,85 = 3,85 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = 1,5$

Un kilo de lentejas cuesta 1,50 €, y uno de arroz, 0,85 €.

1 **Por dos cafés y un cruasán hemos pagado 4,30 €. En la mesa de al lado había un grupo de amigos que han pagado 11,60 € por cinco cafés y tres cruasanes. ¿Cuánto cuesta cada café y cada cruasán?**

Precio del café $\rightarrow$ x €

Precio del cruasán $\rightarrow$ y €

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 4,30 \ \rightarrow \ \text{Multiplicamos por } (-3) \\ 5x + 3y = 11,60 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} -6x - 3y = -12,90 \\ 5x + 3y = \ \ 11,60 \end{cases} \\ \hline -x \qquad = -1,30 \end{array} \rightarrow x = 1,30$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$2 \cdot 1,30 + y = 4,30 \rightarrow 2,60 + y = 4,30 \rightarrow y = 4,30 - 2,60 \rightarrow y = 1,70$

Un café cuesta 1,30 €, y un cruasán, 1,70 €.

2 **Calcula dos números cuya suma sea 191, y su diferencia, 67.**

Un número $\rightarrow$ x

Otro número $\rightarrow$ y

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 191 \\ x - y = \ \ 67 \end{cases} \\ \hline 2x \qquad = 258 \end{array} \rightarrow x = \frac{258}{2} \rightarrow x = 129$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$129 + y = 191 \rightarrow y = 191 - 129 \rightarrow y = 62$

Los números son 129 y 62.

3 **Una empresa aceitera ha envasado 3 000 litros de aceite en 1 200 botellas de dos y de cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?**

Número de botellas de 2 litros $\rightarrow x$

Número de botellas de 5 litros $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 1200 \\ 2x + 5y = 3000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1200 - y \\ 2x + 5y = 3000 \end{cases}$$

$2(1\,200 - y) + 5y = 3\,000 \rightarrow 2\,400 - 2y + 5y = 3\,000 \rightarrow 3y = 600 \rightarrow y = 200$

$x = 1\,200 - 200 = 1\,000$

Se han utilizado 1 000 botellas de dos litros y 200 botellas de cinco litros.

4 **En un test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 puntos por cada error. Si mi nota ha sido 10,5, ¿cuántos aciertos y cuántos errores he cometido?**

Número de aciertos $\rightarrow x$

Número de errores $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 30 \rightarrow \text{Multiplicamos por } 0{,}25 \\ 0{,}75x - 0{,}25y = 10{,}5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0{,}25x + 0{,}25y = 7{,}5 \\ 0{,}75x - 0{,}25y = 10{,}5 \end{cases}$$

$$x = 18$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$18 + y = 30 \rightarrow y = 30 - 18 \rightarrow y = 12$

He cometido 18 aciertos y 12 errores.

5 **Para pagar un artículo que costaba 3 €, he utilizado nueve monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado?**

Véase el problema resuelto de la página 118.

Número de monedas de 20 céntimos $\rightarrow x$

Número de monedas de 50 céntimos $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 9 - y \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 3 \end{cases}$$

$0{,}2(9 - y) + 0{,}5y = 3 \rightarrow 1{,}8 - 0{,}2y + 0{,}5y = 3 \rightarrow 0{,}3y = 1{,}2 \rightarrow y = 4$

$x = 9 - 4 = 5$

He utilizado 5 monedas de 20 céntimos y 4 monedas de 50 céntimos.

Página 125

Hazlo tú

- **La misma tendera ha mezclado una cantidad de café de 3 €/kg con otra de 1,40 €/kg, obteniéndose 8 kg de café de 2,40 €/kg. ¿Qué cantidad de cada tipo de café mezcló?**

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
CAFÉ DE MÁS CALIDAD	x	3	$3x$
CAFÉ DE MENOS CALIDAD	y	1,40	$1,4y$
MEZCLA	$x + y = 8$	2,40	$3x + 1,4y = 19,2$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 1,4y = 19,2 \end{cases} \to \begin{cases} -3x - 3y = -24 \\ 3x + 1,4y = 19,2 \end{cases}$$

$$-1,6y = -4,8 \to y = 3$$

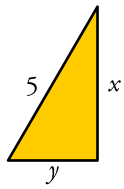
$x + 3 = 8 \to x = 5$

Mezcló 5 kg de café de 3 €/kg con 3 kg de café de 1,40 €/kg

Hazlo tú

- **Se ha colocado una escalera de 5 m apoyada en una pared de manera que la altura a la que llega y la separación de su base con la pared suman 7 m. ¿Qué altura alcanza la escalera?**

$$\begin{cases} x + y = 7 & \to y = 7 - x \\ x^2 + y^2 = 5^2 \end{cases}$$



$x^2 + (7 - x)^2 = 25 \to x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25 \to 2x^2 - 14x + 24 = 0 \to$

$\to x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \to y_1 = 3 \\ x_2 = 3 \to y_1 = 4 \end{cases}$$

La altura alcanzada puede ser de 3 m o de 4 m, dependiendo de si la separación de la base con la pared es de 4 m o de 3 m, respectivamente.

6 **En una fábrica mezclan un bidón de aceite de oliva virgen de 7,50 €/L con otro de mejor calidad de 12 €/L, obteniendo 50 L de aceite intermedio de 8,40 €/L. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se han mezclado?**

Organizamos las variables de una tabla:

	CANTIDAD (L)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
ACEITE BARATO	x	7,50	$7,5x$
ACEITE CARO	y	12	$12y$
MEZCLA	$x + y = 50$	8,40	$7,5x + 12\boldsymbol{y} = 8,4 \cdot 50$

Planteamos el sistema y lo resolvemos:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 7,5x + 12y = 8,4 \cdot 50 \end{cases} \to \text{Resolvemos por reducción} \to \begin{cases} -7,5x - 7,5y = -375 \\ 7,5x + 12y = 420 \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones, se obtiene: $4,5y = 45 \to y = 10$

Calculamos x: $x + y = 50 \to x + 10 = 50 \to x = 40$

Por tanto, se han mezclado 10 L de aceite de 7,50 €/L con 40 L de aceite de 12 €/L.

7 **Se han fundido dos piezas de latón, una aleación de cobre con zinc. La primera tiene un 20 % de zinc, y la segunda, un 45 %. El resultado es una pieza de 5 kg de latón con un 26 % de zinc. ¿Cuánto pesaba cada una de las piezas originales?**

	PESO (kg)	ZINC (%)	ZINC (kg)
1.ª PIEZA	x	20	$0{,}2x$
2.ª PIEZA	y	45	$0{,}45y$
MEZCLA	$x + y = 5$	26	$0{,}2x + 0{,}45\boldsymbol{y} = 0{,}26 \cdot 5$

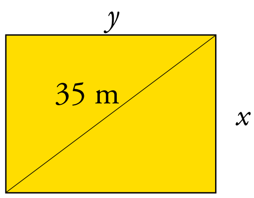
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 0{,}2x + 0{,}45y = 1{,}3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -0{,}2x - 0{,}2y = -1 \\ 0{,}2x + 0{,}45y = 1{,}3 \end{cases} \rightarrow 0{,}25y = 0{,}3 \rightarrow y = 1{,}2$$

$x + y = 5 \rightarrow x + 1{,}2 = 5 \rightarrow x = 3{,}8$

La primera pieza pesaba 3,8 kg, y la segunda, 1,2 kg.

8 **Los lados de un rectángulo están en relación de 3 a 4 y la diagonal mide 35 m. ¿Cuánto miden los lados?**

Llamamos x al ancho e y al largo del rectángulo.



Utilizamos el Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 35^2$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 = 1\,225 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 1\,225 \rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1\,225 \rightarrow 16\left(x^2 + \frac{9}{16}x^2\right) = 16 \cdot 1\,225 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16x^2 + 9x^2 = 19\,600 \rightarrow 25x^2 = 19\,600 \rightarrow x^2 = \frac{19\,600}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 784 \rightarrow x = 28 \text{ m}$$

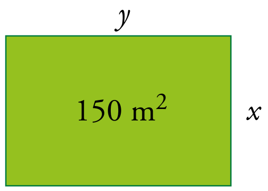
Sustituimos en la primera ecuación:

$y = \dfrac{3}{4} \cdot 28 = 3 \cdot 7 = 21$ m

El rectángulo mide 28 metros de ancho y 21 metros de largo.

9 **Un jardín rectangular de 150 m^2 es 5 m más largo que ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?**

Llamamos x al ancho e y al largo del jardín.



$$\begin{cases} y = x + 5 \\ x \cdot y = 150 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$x(x + 5) = 150 \rightarrow x^2 + 5x = 150 \rightarrow x^2 + 5x - 150 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 600}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-5 \pm 25}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5 + 25}{2} \rightarrow x = \dfrac{20}{2} \rightarrow x = 10 \\ x = \dfrac{-5 - 25}{2} \rightarrow x = \dfrac{-30}{2} \rightarrow x = -15 \rightarrow \text{No vale porque es negativo} \end{cases}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$y = 10 + 5 = 15$ m

El jardín mide 10 metros de ancho y 15 metros de largo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 126

Practica

1 **Lee y contesta.**

a) Completa la tabla en tu cuaderno con soluciones de la ecuación $2x + y = 4$.

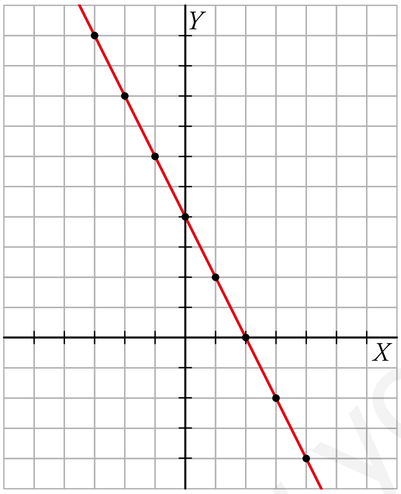
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y								

b) Representa gráficamente la recta $2x + y = 4$.

c) ¿Qué relación hay entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación?

a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	10	8	6	4	2	0	–2	–4

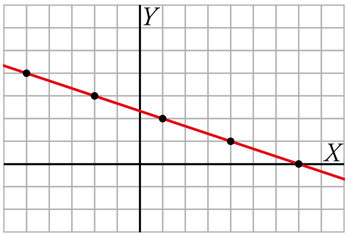
b) 

c) Todos los puntos de la recta son solución de la ecuación.

2 **Copia en tu cuaderno este gráfico y observa que en él se ha representado la ecuación $x + 3y = 7$.**

$$x + 3y = 7 \rightarrow y = \frac{7 - x}{3}$$

x	–5	–2	1	4	7
y	4	3	2	1	0



a) Completa esta tabla en tu cuaderno para la ecuación $y = 2x + 7$ y represéntala sobre el gráfico anterior.

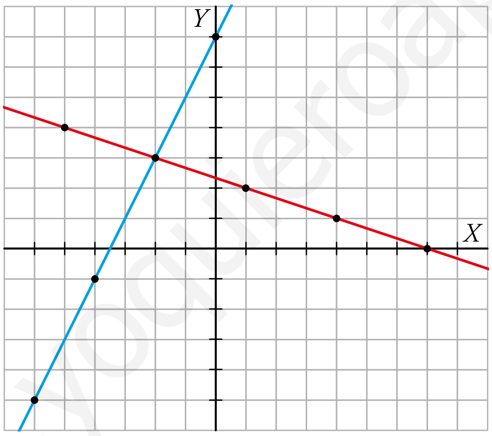
x	–6	–4	–2	0	…
y					

b) ¿En qué punto se cortan ambas rectas? Escribe sus coordenadas.

c) ¿Cuál es la solución de este sistema? $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$

a) $y = 2x + 7 \rightarrow$

x	–6	–4	–2	0	…
y	–5	–1	3	7	…



b) Se cortan en el punto (–2, 3).

c) La solución es el punto de corte anterior: $x = -2$, $y = 3$.

3 **Completa los siguientes sistemas de ecuaciones para que ambos tengan la solución $x = 2$, $y = -1$:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = \dots \\ 3x - 4y = \dots \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 7y = \dots \\ -2x - 5y = \dots \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 7y = -1 \\ -2x - 5y = 1 \end{cases}$

4 **Comprueba si $x = -2$, $y = 1$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 7x + 4y = -10 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

Veamos si se cumplen las igualdades:

a) $\begin{cases} 7\cdot(-2)+4\cdot 1=-10 \\ 3\cdot(-2)-2\cdot 1=-8 \end{cases} \rightarrow$ Se cumplen las igualdades, es solución.

b) $\begin{cases} -2+2\cdot 1=0 \\ 2\cdot(-2)+6\cdot 1=2\neq 1 \end{cases} \rightarrow$ La segunda igualdad no se cumple. No es solución.

5 **a) Representa gráficamente, y en los mismos ejes, estas dos rectas:**

$$x+y=5 \qquad -3x+y=-3$$

b) Di cuál es la solución del sistema que forman ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -3x+y=-3 \end{cases}$$

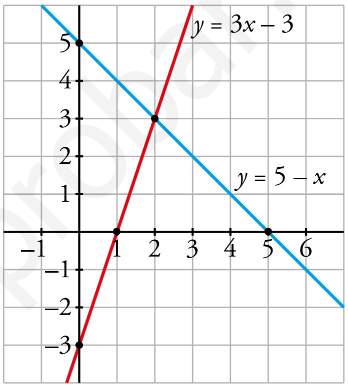
a) Calculamos varios puntos de cada recta:

$x+y=5 \rightarrow y=5-x$

X	0	2	5
Y	5	3	0

$-3x+y=-3 \rightarrow y=3x-3$

X	0	1	2
Y	–3	0	3



b) La solución es (2, 3) porque es el punto que pertenece a ambas rectas.

6 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:**

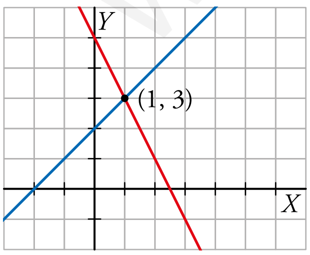
a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=-2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=8 \end{cases}$

a) $2x+y=5 \rightarrow y=5-2x \rightarrow$

X	0	1	2
Y	5	3	1

$x-y=-2 \rightarrow y=x+2 \rightarrow$

X	0	1	2
Y	2	3	4



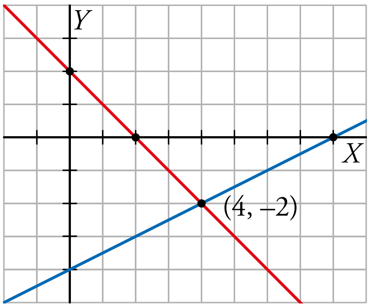
Solución: $x=1,\ y=3$

b) $x+y=2 \rightarrow y=2-x \rightarrow$

X	0	2	4
Y	2	0	–2

$x-2y=8 \rightarrow y=\dfrac{x-8}{2} \rightarrow$

X	0	2	4
Y	–4	–3	–2



Solución: $x = 4, \ y = -2$

7 **Representa en unos ejes cartesianos los puntos que se indican en las tablas, y comprueba lo siguiente:**

a) La ecuación $0x + y = 0$ coincide con el eje de abscisas (eje horizontal).

$y = 0 \rightarrow$

x	–5	–2	0	2	5
y	0	0	0	0	0

b) La ecuación $x + 0y = 0$ coincide con el eje de ordenadas (eje vertical).

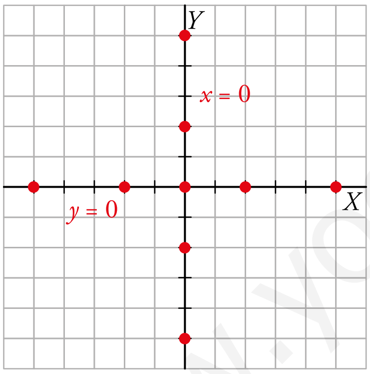
$x = 0 \rightarrow$

x	0	0	0	0	0
y	–5	–2	0	2	5

c) ¿En qué punto se cortan ambas rectas?

d) ¿Cuál es la solución del sistema que forman ambas ecuaciones? $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

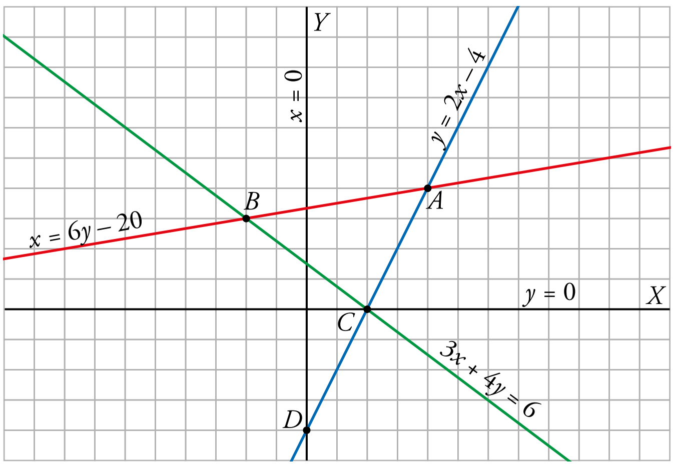
a) y b)



c) Las rectas se cortan en (0, 0).

d) La solución es el punto de corte anterior: $x = 0, \ y = 0$.

8 **Observa las rectas del gráfico y sus ecuaciones asociadas.**



a) Escribe las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

b) Sin hacer operaciones, encuentra la solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

I) $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = 6y - 20 \end{cases}$ **II)** $\begin{cases} x = 6y - 20 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$ **III)** $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$ **IV)** $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = 0 \end{cases}$

a) $A = (4, 4)$; $B = (-2, 3)$; $C = (2, 0)$; $D = (0, -4)$

b) I $\rightarrow$ La solución es el punto A $\rightarrow$ $x = 4$, $y = 4$

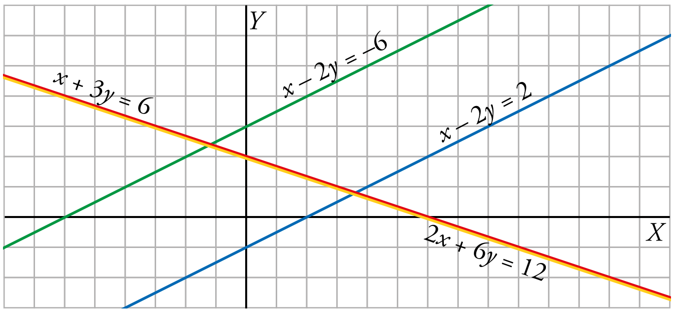
II $\rightarrow$ La solución es el punto B $\rightarrow$ $x = -2$, $y = 3$

III $\rightarrow$ La solución es el punto C $\rightarrow$ $x = 2$, $y = 0$

IV $\rightarrow$ La solución es el punto D $\rightarrow$ $x = 0$, $y = -4$

Página 127

9 **Solo mirando el gráfico, ¿qué puedes decir de las soluciones de los sistemas que tienes debajo?**



a) $\begin{cases} x-2y=-6 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+6y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=-6 \\ y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y=2 \\ x=0 \end{cases}$

a) El sistema es incompatible porque las rectas que lo forman son paralelas.

b) El sistema es indeterminado. Tiene infinitas soluciones porque las dos rectas que lo forman son la misma recta.

c) Tiene una única solución, el punto (–6, 0) $\to$ $x = -6$, $y = 0$.

d) Tiene una única solución, el punto (0, –1) $\to$ $x = 0$, $y = -1$.

10 **¿Qué valores deben tomar a y b para que el sistema tenga infinitas soluciones?**

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ ax+by=15 \end{cases}$$

Para que tenga infinitas soluciones, la segunda ecuación debe ser proporcional a la primera.

Así: $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ ax+by=15 \end{cases} \to a = 9$ y $b = 6$

Soluciones: Damos valores a x para obtener puntos de la recta $3x + 2y = 5$:

$x = 1$; $y = 1$; $x = 0$, $y = \dfrac{5}{2}$; $x = -1$, $y = 4$

11 **¿Qué condición deben cumplir c y d para que este sistema no tenga solución?**

$$\begin{cases} 3x+2y=c \\ 6x+4y=d \end{cases}$$

El sistema no tendrá solución cuando las dos rectas sean paralelas, es decir, cuando $d \neq 2c$.

12 Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 5 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 4y = 17 \\ 6x + \ \ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 8 = y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3y + 1 = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x = 4y - 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$

$3(2y + 5) - 2y = 19 \to 6y + 15 - 2y = 19 \to 4y + 15 = 19 \to 4y = 19 - 15 \to$
$\to 4y = 4 \to y = 1$

$x = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

Solución: $x = 7,\ y = 1$

b) $\begin{cases} y = 5 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$

$4x + 2 \cdot 5 = 22 \to 4x + 10 = 22 \to 4x = 22 - 10 \to 4x = 12 \to x = \dfrac{12}{4} \to x = 3$

Solución: $x = 3,\ y = 5$

c) $\begin{cases} 5x - 4y = 17 \\ 6x + \ \ y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} 5x - 4y = 17 \\ y = 3 - 6x \end{cases}$

$5x - 4(3 - 6x) = 17 \to 5x - 12 + 24x = 17 \to 29x - 12 = 17 \to 29x = 17 + 12 \to$
$\to 29x = 29 \to x = 1$

$y = 3 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3$

Solución: $x = 1,\ y = -3$

d) $\begin{cases} x + 8 = y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

$2(x + 8) - 3x = 16 \to 2x + 16 - 3x = 16 \to -x + 16 = 16 \to 16 - 16 = x \to x = 0$

$y = 0 + 8 = 8$

Solución: $x = 0,\ y = 8$

e) $\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 3y + 1 = x \end{cases}$

$5(3y + 1) - 4y = -6 \to 15y + 5 - 4y = -6 \to 11y + 5 = -6 \to 11y = -6 - 5 \to$
$\to 11y = -11 \to y = -1$

$x = 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

Solución: $x = -2,\ y = -1$

f) $\begin{cases} 3x = 4y - 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

$4y - 4 + 2y = 2 \to 6y - 4 = 2 \to 6y = 2 + 4 \to 6y = 6 \to y = 1$

$3x = 4 \cdot 1 - 4 \to 3x = 4 - 4 \to 3x = 0 \to x = 0.$

Solución: $x = 0,\ y = 1$

13 **Resuelve por igualación.**

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x = 4y - 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = 6x \\ x + y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{3} \\ y = \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4 + 3y = x \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x = 4y - 8 \end{cases}$

$2y = 4y - 8 \rightarrow 8 = 4y - 2y \rightarrow 8 = 2y \rightarrow y = \dfrac{8}{2} \rightarrow y = 4$

$x = 2 \cdot 4 \rightarrow x = 8$

Solución: $x = 8,\ y = 4$

b) $\begin{cases} y = 6x \\ x + y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6x \\ y = 7 - x \end{cases}$

$6x = 7 - x \rightarrow 6x + x = 7 \rightarrow 7x = 7 \rightarrow x = 1$

$y = 6 \cdot 1 \rightarrow y = 6$

Solución: $x = 1,\ y = 6$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ x = 2 + y \end{cases}$

$5 - 2y = 2 + y \rightarrow 5 - 2 = y + 2y \rightarrow 3 = 3y \rightarrow y = 1$

$x = 2 + 1 = 3$

Solución: $x = 3,\ y = 1$

d) $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{3} \\ y = \dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

$\dfrac{2x}{3} = \dfrac{x+1}{3} \rightarrow 2x = x + 1 \rightarrow 2x - x = 1 \rightarrow x = 1$

$y = \dfrac{2 \cdot 1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solución: $x = 1,\ y = \dfrac{2}{3}$

e) $\begin{cases} 4 + 3y = x \\ x + 2y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 + 3y \\ x = -1 - 2y \end{cases}$

$4 + 3y = -1 - 2y \rightarrow 3y + 2y = -4 - 1 \rightarrow 5y = -5 \rightarrow y = -1$

$x = 4 + 3 \cdot (-1) = 4 - 3 = 1$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

f) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 5y - 4 \\ 2x = 3y \end{cases}$

$5y - 4 = 3y \rightarrow 5y - 3y = 4 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = \dfrac{4}{2} \rightarrow y = 2$

$2x = 3 \cdot 2 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = \dfrac{6}{2} \rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3,\ y = -2$

14 **Resuelve por reducción.**

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 10x - 3y = 1 \\ 10x + 3y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y = 21 \\ 2x + 5y = -35 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 3x - 7y = 13 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 8x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$

$2x = 12 \to x = \dfrac{12}{2} \to x = 6$

$6 + y = 3 \to y = 3 - 6 \to y = -3$

Solución: $x = 6,\ y = -3$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \to \text{Multiplicamos por } (-2) \\ 6x - 2y = -6 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + 10y = -18 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$

$8y = -24 \to y = \dfrac{-24}{8} \to y = -3$

$3x - 5 \cdot (-3) = 9 \to 3x + 15 = 9 \to 3x = 9 - 15 \to 3x = -6 \to x = \dfrac{-6}{3} \to x = -2$

Solución: $x = -2,\ y = -3$

c) $\begin{cases} 10x - 3y = 1 \\ 10x + 3y = 3 \end{cases}$

$20x = 4 \to x = \dfrac{4}{20} \to x = \dfrac{1}{5}$

$10 \cdot \dfrac{1}{5} - 3y = 1 \to 2 - 3y = 1 \to 2 - 1 = 3y \to 3y = 1 \to y = \dfrac{1}{3}$

Solución: $x = \dfrac{1}{5},\ y = \dfrac{1}{3}$

d) $\begin{cases} x - 3y = 21 \to \text{Multiplicamos por } (-2) \\ 2x + 5y = -35 \end{cases} \to \begin{cases} -2x + 6y = -42 \\ 2x + 5y = -35 \end{cases}$

$11y = -77 \to y = -7$

$x - 3 \cdot (-7) = 21 \to x + 21 = 21 \to x = 21 - 21 \to x = 0$

Solución: $x = 0,\ y = -7$

e) $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \to \text{Multiplicamos por } (-3) \\ 3x - 7y = 13 \to \text{Multiplicamos por } 5 \end{cases} \to \begin{cases} -15x - 12y = -18 \\ 15x - 35y = 65 \end{cases}$

$-47y = 47 \to y = -1$

$5x + 4 \cdot (-1) = 6 \to 5x - 4 = 6 \to 5x = 6 + 4 \to 5x = 10 \to x = \dfrac{10}{5} \to x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

f) $\begin{cases} 8x + 3y = 5 \to \text{Multiplicamos por } 4 \\ 5x + 4y = 1 \to \text{Multiplicamos por } (-3) \end{cases} \to \begin{cases} 32x + 12y = 20 \\ -15x - 12y = -3 \end{cases}$

$17x = 17 \to x = 1$

$8 \cdot 1 + 3y = 5 \to 3y = 5 - 8 \to 3y = -3 \to y = -1$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

15 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x + \ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3 + 2y = 10x \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x = 2y \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 6y = 4x + 16 \end{cases}$

a) Vamos a resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x + y = 1 \ \rightarrow \ \text{Multiplicamos por } (-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ \ 5x + 2y = -1 \\ -8x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$-3x \qquad = -3 \ \rightarrow \ x = 1$$

$4 \cdot 1 + y = 1 \ \rightarrow \ y = 1 - 4 \ \rightarrow \ y = -3$

Solución: $x = 1$, $y = -3$.

Gráficamente, son dos rectas que se cortan en el punto $(1, -3)$.

b) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 5x - y = 1 \ \rightarrow \ y = 5x - 1 \\ 3 + 2y = 10x \end{cases}$$

$3 + 2(5x - 1) = 10x \ \rightarrow \ 3 + 10x - 2 = 10x \ \rightarrow \ 1 + 10x = 10x \ \rightarrow \ 1 = 10x - 10x \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 1 = 0x \ \rightarrow$ No tiene solución.

Gráficamente, son dos rectas paralelas.

c) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 5x = 2y \\ 3x - y = 0 \ \rightarrow \ y = 3x \end{cases}$$

$5x = 2 \cdot 3x \ \rightarrow \ 5x = 6x \ \rightarrow \ 0 = 6x - 5x \ \rightarrow \ x = 0$

$y = 3 \cdot 0 = 0$

Soluicón: $x = 0$, $y = 0$.

Gráficamente, son dos rectas que se cortan en el punto $(0, 0)$.

d) Vamos a resolverlo por igualación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 6y = 4x + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 8 = 3y \\ 3y = 2x + 8 \end{cases}$$

$2x + 8 = 2x + 8 \ \rightarrow \ 2x - 2x = 8 - 8 \ \rightarrow \ 0x = 0 \ \rightarrow$ Infinitas soluciones.

Gráficamente son la misma recta.

16 **Resuelve por el método que consideres más adecuado.**

a) $\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 3y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + \ \ y = 6 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1,2x + 0,7y = 13 \\ \quad x - 0,5y = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3} = 1 \\ 2(x + y) - 15 = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3(x - 1) + y = 8 \\ \dfrac{x + 1}{2} = y \end{cases}$

a) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases}$$

$$5 \cdot 2 + \frac{4y}{3} = 14 \to 3\left(10 + \frac{4y}{3}\right) = 3 \cdot 14 \to 30 + 4y = 42 \to 4y = 42 - 30 \to$$

$$\to 4y = 12 \to y = \frac{12}{4} \to y = 3$$

Solución: $x = 2, \ y = 3$

b) Vamos a resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} 6x - 3y = 3 \to \text{Multiplicamos por 2} \\ 3x + 6y = 9 \end{cases} \to \begin{array}{l} \begin{cases} 12x - 6y = 6 \\ \ \ 3x + 6y = 9 \end{cases} \\ \hline 15x \qquad = 15 \to x = 1 \end{array}$$

$$3 \cdot 1 + 6y = 9 \to 6y = 9 - 3 \to 6y = 6 \to y = 1$$

Solución: $x = 1, \ y = 1$

c) Vamos a resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} 5x + y = 6 \to \text{Multiplicamos por 2} \\ 3x - 2y = 14 \end{cases} \to \begin{array}{l} \begin{cases} 10x + 2y = 12 \\ \ \ 3x - 2y = 14 \end{cases} \\ \hline 13x \qquad = 26 \to x = \dfrac{26}{13} \to x = 2 \end{array}$$

$$5 \cdot 2 + y = 6 \to 10 + y = 6 \to y = 6 - 10 \to y = -4$$

Solución: $x = 2, \ y = -4$

d) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} 1,2x + 0,7y = 13 \\ x - 0,5y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1,2x + 0,7y = 13 \\ x = 0,5y \end{cases}$$

$$1,2 \cdot 0,5y + 0,7y = 13 \to 0,6y + 0,7y = 13 \to 1,3y = 13 \to y = \frac{13}{1,3} \to y = 10$$

$$x = 0,5 \cdot 10 \to x = 5$$

Solución: $x = 5, \ y = 10$

e) Vamos a simplificarlo y resolverlo por reducción:

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3} = 1 \\ 2(x+y) - 15 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15\left(\dfrac{2y}{5} - \dfrac{x}{3}\right) = 15 \cdot 1 \\ 2x + 2y - 15 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6y - 5x = 15 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + 6y = 15 \\ 2x + 2y = 16 \rightarrow \text{Multiplicamos por } (-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x + 6y = 15 \\ -6x - 6y = -48 \end{cases}$$

$$-11x \quad = -33 \rightarrow x = \frac{-33}{-11} \rightarrow x = 3$$

$$2 \cdot 3 + 2y = 16 \rightarrow 6 + 2y = 16 \rightarrow 2y = 16 - 6 \rightarrow 2y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{2} \rightarrow y = 5$$

Solución: $x = 3,\ y = 5$

f) Vamos a simplificarlo y resolverlo por igualación:

$$\begin{cases} 3(x-1) + y = 8 \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3 + y = 8 \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 8 + 3 - 3x \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3x + 11 \\ \dfrac{x+1}{2} = y \end{cases}$$

$$-3x + 11 = \frac{x+1}{2} \rightarrow 2 \cdot (-3x + 11) = 2 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) \rightarrow -6x + 22 = x + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 22 - 1 = x + 6x \rightarrow 21 = 7x \rightarrow x = \frac{21}{7} \rightarrow x = 3$$

$$y = -3 \cdot 3 + 11 = -9 + 11 \rightarrow y = 2$$

Solución: $x = 3,\ y = 2$

18 Resuelve como en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y = 8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2/x = y \\ x - y = 7/2 \end{cases}$

a) Vamos a resolverlo por sustitución:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 2 \\ x = \dfrac{12 - 5y}{2} \end{cases}$$

$$\frac{12 - 5y}{2} \cdot y = 2 \rightarrow 2\left(\frac{12 - 5y}{2} \cdot y\right) = 2 \cdot 2 \rightarrow y(12 - 5y) = 4 \rightarrow 12y - 5y^2 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5y^2 - 12y + 4 = 0$$

$$y = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{10} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{12 \pm 8}{10}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12 + 8}{10} \rightarrow y = \dfrac{20}{10} \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{12 - 8}{10} \rightarrow y = \dfrac{-4}{10} \rightarrow y = \dfrac{-1}{5} \rightarrow x = -10 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -10 \\ y = \dfrac{-1}{5} \end{cases}$

b) Vamos a resolverlo por igualación:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4 = y \\ y = 8 - x^2 \end{cases}$$

$$x - 4 = 8 - x^2 \rightarrow x^2 + x - 4 - 8 = 0 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+7}{2} \rightarrow x = \dfrac{6}{2} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1 \\ x = \dfrac{-1-7}{2} \rightarrow x = \dfrac{-8}{2} \rightarrow x = -4 \rightarrow y = -8 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \end{cases}$

c) $\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 3 \\ 3x + y = 5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 3 \\ y = 5 - 3x \end{matrix}\right\} \rightarrow x^2 - (5 - 3x)^2 = 3 \rightarrow x^2 - (25 - 30x + 9x^2) = 3 \rightarrow$

$$\rightarrow -8x^2 + 30x - 25 = 3 \rightarrow 8x^2 - 30x + 28 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 - 15x + 14 = 0$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 14}}{8} = \frac{15 \pm 1}{8} \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = -1 \\ x = \dfrac{7}{4} \rightarrow y = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} = y \\ x - y = \dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{7}{2} \rightarrow 2x^2 - 4 = 7x \rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$

Página 128

Resuelve problemas

19 **Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, $\frac{8}{3}$.**

$$\begin{cases} x + y = 154 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 154 \\ 3x - 8y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 8y = 1232 \\ 3x - 8y = 0 \end{cases} \rightarrow 11x = 1232 \rightarrow x = 112$$

$x + y = 154 \rightarrow 112 + y = 154 \rightarrow y = 42$

Los números buscados son 112 y 42.

20 **Halla una fracción que equivale a $\frac{1}{2}$ si se suma 1 al numerador y a $\frac{1}{3}$ si se suma 3 al denominador.**

Llamamos x al numerador de la fracción e y al denominador.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{y+3} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 2 = y \\ 3x = y + 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = -2 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 5 \rightarrow y = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

La fracción buscada es $\frac{5}{12}$.

21 **Sabemos que dos números suman 34. Si al mayor lo dividimos entre 3 y al menor entre 4, los resultados obtenidos se diferencian en 2 unidades. Halla dichos números.**

Llamamos x e y a los números.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 34 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 34 \\ 4x - 3y = 24 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + 3y = 102 \\ 4x - 3y = 24 \end{array}\right\} \rightarrow 7x = 126 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 18 \rightarrow y = 34 - 18 = 16$$

El número mayor es 18, y el menor, 16.

22 **En un bar se venden bocadillos de jamón a 3,50 € y bocadillos de tortilla a 2 €. En una mañana vendieron 52 bocadillos y la recaudación final fue de 149 €. ¿Cuántos se vendieron de cada clase?**

Número de bocadillos de jamón $\rightarrow x$

Número de bocadillos de tortilla $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 52 \rightarrow \text{Multiplicamos por } (-2) \\ 3,50x + 2y = 149 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -104 \\ 3,50x + 2y = 149 \end{cases}$$

$$1,50x = 45 \rightarrow x = \frac{45}{1,50} \rightarrow x = 30$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$30 + y = 52 \rightarrow y = 52 - 30 \rightarrow y = 22$

Se vendieron 30 bocadillos de jamón y 22 de tortilla.

23 **Si te doy 4 de mis libros, tú tendrás el doble que yo. Si tú me das 6 de los tuyos, yo tendré el doble que tú. ¿Cuántos libros tenemos cada uno?**

	TÚ	YO	
TENEMOS	x	y	
SI TE DOY 4	$x + 4$	$y - 4$	→ *Tú tienes el doble.*
SI ME DAS 6	$x - 6$	$y + 6$	→ *Yo tengo el doble.*

Llamamos x a los libros que yo tengo e y a los que tienes tú.

$$\left.\begin{array}{l} y + 4 = 2(x - 4) \\ x + 6 = 2(y - 6) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x - y = 12 \\ x - 2y = -18 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -4x + 2y = -24 \\ x - 2y = -18 \end{array}\right\} \to -3x = -42 \to x = 14 \to$$

$$\to 2 \cdot 14 - y = 12 \to y = 16$$

Yo tengo 14 libros y tú tienes 16.

24 **Una cooperativa ha envasado 2 000 L de aceite en botellas de 1,5 L y de 2 L. Sabemos que han utilizado 1 100 botellas en total. ¿Cuántas se han necesitado de cada clase?**

$x \to$ número de botellas de 1,5 L

$y \to$ número de botellas de 2 L.

$$\begin{cases} x + y = 1100 \\ 1{,}5x + 2y = 2\,000 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + 2y = 2\,200 \\ -1{,}5x - 2y = -2000 \end{cases} \to 0{,}5x = 200 \to x = 400 \to y = 700$$

Se han necesitado 400 botellas de 1,5 L y 700 de 2 L.

25 **Un examen tipo test consta de 50 preguntas y hay que contestar a todas. Por cada acierto se obtiene un punto, y por cada fallo se restan 0,5 puntos. Si mi nota ha sido 24,5, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?**

	ACIERTOS	FALLOS	TOTAL
NÚMERO	x	y	50
PUNTOS	$1 \cdot x$	$-0{,}5 \cdot y$	24,5

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - 0{,}5y = 24{,}5 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 50 \\ -x + 0{,}5y = -24{,}5 \end{cases} \to 1{,}5y = 25{,}5 \to y = 17 \to x = 33$$

He tenido 33 aciertos y 17 fallos.

26 **Una empresa que fabrica bombillas obtiene un beneficio de 0,30 € por cada pieza que sale del taller para la venta, pero sufre una pérdida de 0,40 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En una jornada ha fabricado 2 100 bombillas, obteniendo unos beneficios de 484,40 €.**

¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se han fabricado en ese día?

	VÁLIDAS	DEFECTUOSAS	TOTAL
NÚMERO	x	y	…
BENEFICIOS	$0{,}30x$	$-0{,}40y$	…

Número de bombillas válidas $\to x$

Número de bombillas defectuosas $\to y$

$$\begin{cases} x + y = 2100 \\ 0{,}30x - 0{,}40y = 484{,}40 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2100 - x \\ 0{,}30x - 0{,}40y = 484{,}40 \end{cases}$$

$0{,}30x - 0{,}4 \cdot (2\,100 - x) = 484{,}40 \to 0{,}30x - 840 + 0{,}40x = 484{,}40 \to$
$\to 0{,}70x = 484{,}40 + 840 \to 0{,}70x = 1\,324{,}40 \to$
$\to x = \dfrac{1324{,}40}{0{,}70} \to x = 1\,892$

Sustituimos en la primera ecuación:

$1\,892 + y = 2\,100 \to y = 2\,100 - 1\,892 \to y = 208$

Se han fabricado 1 892 bombillas válidas y 208 defectuosas.

27 **Los estudiantes de un centro escolar son 420 entre ESO y Bachillerato. El 42 % de los estudiantes de ESO y el 52 % de Bachillerato son chicas, lo que supone un total de 196 mujeres.**

Calcula cuántos estudiantes hay en ESO y cuántos en Bachillerato.

Estudiantes de ESO → x. Chicas → 0,42x
Estudiantes de Bachillerato → y. Chicas → 0,52y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \ldots \\ 0{,}42x + 0{,}52y &= \ldots \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} x + y = 420 \\ 0{,}42 + 0{,}52y = 196 \end{cases} \to \begin{cases} -0{,}42x - 0{,}42y = -176{,}4 \\ 0{,}42x + 0{,}52y = 196 \end{cases} \to 0{,}1y = 19{,}6 \to$$

$\to 0{,}1y = 19{,}6 \to y = 196 \to x = 224$

En ESO hay 224 estudiantes, y en bachillerato, 196.

28 **He pagado 55,72 € por una camiseta y un pantalón que costaban 70 € entre los dos. La camiseta tenía un 18% de descuento, y el pantalón, un 22 %.**

¿Cuál era el precio original de cada artículo?

Coste camiseta → x. Rebajada un 18 % → 0,82 · x

Coste pantalón → y. Rebajado un 22 % → 0,78 · y

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 0,82 + 0,78y = 55,72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -0,78x - 0,78y = -54,6 \\ 0,82x + 0,78y = 55,72 \end{cases} \rightarrow 0,04x = 1,12 \rightarrow x = 28 \rightarrow y = 42$$

La camiseta costaba 28 €, y el pantalón, 42 €

29 **María ha comprado un abrigo que estaba rebajado un 15 %. Marta ha comprado otro abrigo 25 € más caro, pero ha conseguido una rebaja del 20 %, con lo que solo ha pagado 8 € más que María. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?**

Abrigo de María → x. Rebajado un 15 % → 0,85x

Abrigo de Marta → y. Rebajado un 20 % → 0,80y

$$\begin{cases} y = x + 25 \\ 0,85x + 8 = 0,8y \end{cases}$$

$$0,85x + 8 = 0,8(x + 25) \rightarrow 0,85x + 8 = 0,8x + 20 \rightarrow 0,85x - 0,8x = 20 - 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,05x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{0,05} \rightarrow x = 240 \text{ €}$$

$y = 240 + 25 \rightarrow y = 265$ €

El abrigo de María costaba 240 € y el de Marta 265 €.

Página 129

30 **Por un pantalón y unos zapatos, he pagado 126 €. Si el precio del pantalón aumentara en un 14 %, entonces sería el 75 % del precio de los zapatos. ¿Cuánto pagué por cada uno?**

Llamamos x al precio del pantalón e y al de los zapatos.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 126 \\ 1{,}14x = 0{,}75y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 126 - x \\ 1{,}14x = 0{,}75(126 - x) \end{array}\right\} 1{,}14x = 94{,}5 - 0{,}75x \rightarrow$$

$$\rightarrow 1{,}89x = 94{,}5 \rightarrow x = 50 \rightarrow y = 76$$

Por el pantalón he pagado 50 €, y por los zapatos, 76 €.

31 **Un comercio compró 35 juegos de un tipo y 25 de otro pagando por ellos 1 220 €.**

Con la venta de los primeros ganó un 25 % y con la venta de los segundos perdió un 5 %, de forma que obtuvo 170 € de ganancia sobre el precio de compra.

Calcula el precio de compra de cada tipo de juego.

$x \rightarrow$ precio de los juegos del primer tipo. $1{,}25x \rightarrow$ ganó un 25 %.

$y \rightarrow$ precio de los juegos del segundo tipo. $0{,}95x \rightarrow$ perdió un 25 %.

$$\left\{\begin{array}{l} 35x + 25y = 1220 \\ 35 \cdot 1{,}25x + 25 \cdot 0{,}95y = 1220 + 170 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 35x + 25y = 1220 \\ 43{,}75x + 23{,}75y = 1390 \end{array}\right. \rightarrow y = \frac{1220 - 35x}{25}$$

$$43{,}75x + 23{,}75 \cdot \frac{1220 - 35x}{25} = 1390 \rightarrow 1\,093{,}75x + 28\,975 - 831{,}25x = 34\,750 \rightarrow$$

$$\rightarrow 262{,}5x + 5\,775 \rightarrow x = 22$$

$$y = \frac{1\,220 - 35 \cdot 22}{25} = 18$$

El precio del primer tipo de juego fue 22 €, y del segundo, 18 €.

32 **Entre dos autobuses viajan 120 personas. Si del más lleno se trasladan los 2/5 al otro, los dos llevarán el mismo número de personas. ¿Cuántas personas llevaba cada autobús?**

	BÚS I	BÚS II	
SIN TRASLADO	x	y	$\rightarrow$ *120*
CON TRASLADO	$x - \frac{2x}{5}$	$y + \frac{2x}{5}$	$\rightarrow$ *Iguales*

Llamamos x e y al número de pasajeros de cada autobús.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ x - \frac{2x}{5} = y + \frac{2x}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ 5x - 2x = 5y + 2x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ x - 5y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 6y = 120 \rightarrow y = 20 \rightarrow x = 120 - 20 = 100$$

El autobús que más pasajeros llevaba, llevaba 100, y el que menos, 20.

33 La suma de las edades de una madre y de su hijo es 56 años. Hace 10 años, la edad de la madre era el quíntuple de la edad que tenía el hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

	MADRE	HIJO
HOY	x	y
HACE 10 AÑOS	$x-10$	$y-10$

$\to$ ***56***

$\to$ ***$x - 10 = 5(y - 10)$***

$$\begin{cases} x + y = 56 & \to \ x = 56 - y \\ x - 10 = 5(y - 10) \end{cases}$$

$56 - y - 10 = 5y - 50 \ \to \ 96 = 6y \ \to \ y = 16$

$x = 56 - 16 = 40$

La madre tiene 40 años, y el hijo, 16.

34 La edad de Carmen es el triple de la de su hija Maite. Pero dentro de 15 años será el doble de la que entonces tenga su hija. ¿Cuál es la edad de cada una?

Llamamos x a la edad de Maite e y a la de Carmen.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x + 15 = 2(y + 15) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 2y + 15 \end{array}\right\} \to 3y = 2y + 15 \to y = 15$$

Maite tiene 15 años y su madre, Carmen, tiene 45.

35 Una bodeguera ha mezclado dos cubas de vino, la primera de mejor calidad, a 3 €/litro, y la segunda, de calidad inferior, a 2,20 €/litro. De esta forma ha obtenido 16 hL de un vino de calidad intermedia que sale a 2,50 €/litro. ¿Cuál era el contenido de cada cuba?

	1.ER TIPO	2.º TIPO	MEZCLA
CANTIDAD	x	y	1 600
PRECIO	3	2,2	2,5
COSTE	$3x$	$2{,}2y$	$2{,}5 \cdot 1\,600$

	CANTIDAD (L)	PRECIO (€/L)	COSTE (€)
1.ER TIPO	x	3	$3x$
2.º TIPO	y	2,2	$2{,}2y$
MEZCLA	$x + y = 1\,600$	2,5	$3x + 2{,}2y = 2{,}5 \cdot 1\,600$

$$\begin{cases} x + y = 1600 \ \to \ \text{Multiplicamos por } (-3) \\ 3x + 2{,}2y = 4\,000 \end{cases} \to \begin{cases} -3x - 3y = -4\,800 \\ 3x + 2{,}2y = 4\,000 \end{cases}$$

$$-0{,}8y = -800 \ \to \ y = \frac{-800}{-0{,}8} \ \to \ y = 1\,000$$

$x + 1\,000 = 1\,600 \ \to \ x = 1\,600 - 1\,000 \ \to \ x = 600$

La cuba de mejor calidad contenía 600 litros y la de menor calidad 1 000 litros.

36 **Si en un depósito que contiene agua a 50 °C añadimos agua a 15 °C, obtenemos 150 L a 36 °C. ¿Cuántos litros había en el depósito y cuántos hemos añadido?**

$x \rightarrow$ litros que había en el depósito.

$y \rightarrow$ litros que añadimos.

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 50x + 15y = 36 \cdot 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -15x - 15y = -2250 \\ 50x + 15y = 5400 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow\ 35x = 3150\ \rightarrow\ x = 90$

$90 + y = 150\ \rightarrow\ y = 60$

En el depósito había 90 L y hemos añadido 60 L.

37 **Se ha fundido una cadena de oro del 80 % de pureza con un anillo del 64 % de pureza. Así se han obtenido 12 gramos de oro de una pureza del 76 %. ¿Cuántos gramos pesaba la cadena y cuántos el anillo?**

Peso de la cadena → x. Cantidad de oro → 0,80x

Peso de anillo → y. Cantidad de oro → 0,64y

Peso total → 12 g. Cantidad de oro → 0,76 · 12

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 0,8x + 0,64y = 0,76 \cdot 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -0,64x - 0,64y = -7,68 \\ 0,8x + 0,64y = 9,12 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow\ 0{,}16x = 1{,}44\ \rightarrow\ x = 9\ \rightarrow\ y = 3$

La cadena pesaba 9 gramos, y el anillo, 3 gramos.

39 **Un tren regional sale de una estación a una velocidad de 85 km/h. Media hora más tarde sale otro más rápido en la misma dirección a 110 km/h. Calcula el tiempo que tardará en alcanzarlo y la distancia recorrida hasta lograrlo.**

(Resuélvelo mediante un sistema de ecuaciones. Después, si quieres, resuélvelo directamente con una ecuación, observando que la velocidad de alcance es 25 km/h).

- Con dos incógnitas:

	VELOCIDAD	TIEMPO	ESPACIO
TREN REGIONAL	85	x	y
TREN RÁPIDO	110	$x - 0{,}5$	y

$$\begin{cases} 85x = y \\ 110\,(x - 30) = y \end{cases} \rightarrow\ 85x = 110\,(x - 0,5)\ \rightarrow\ 85x = 110x - 55\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 25x = 55\ \rightarrow\ x = 2{,}2$$

$y = 85 \cdot 2{,}2 = 187$

El segundo tren tardará en alcanzar al primero $2{,}2 - 0{,}5 = 1{,}7$ horas.

Recorrerá 187 km hasta lograrlo.

- Para resolverlo con una ecuación, tenemos en cuenta que cuando arranca el segundo tren el primero ha recorrido $85 \cdot 0{,}5 = 42{,}5$ km. Por tanto, hay que recorrer 42,5 km a una velocidad de alcance de 25 km/h.

  $25 \cdot t = 42{,}5\ \rightarrow\ t = 1{,}7$ h

  El segundo tren dardará en alcanzar al primero 1,7 h y habrá recorrido $1{,}7 \cdot 110 = 187$ km.

Página 130

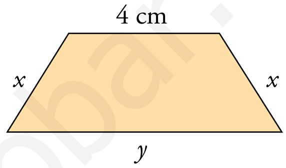
40 **Dos ciudades, A y B, distan 234 km. De A sale un autobús en dirección a B y, simultáneamente, sale de B un tren en dirección a A. Tardan en cruzarse 1 h y 30 min. ¿Cuál es la velocidad de cada uno si la del autobús supera a la del tren en 5 km/h?**

$$\begin{cases} x = v \cdot 1,5 \\ 234 - x = (v + 5) \cdot 1,5 \end{cases} \rightarrow 234 - 1,5v = 1,5v - 7,5 \rightarrow$$

$$\rightarrow 234 - 7,5 = 3v \rightarrow v = \frac{226,5}{3} = 75,5 \text{ km/h}$$

El tren va a 75,5 km/h, y el autobús, a 80,5 km/h.

41 **El perímetro de este trapecio es de 24 cm. La base mayor mide lo mismo que la suma de los dos lados iguales. Halla las longitudes de todos los lados del trapecio.**



Medida de un lado $\rightarrow x$

Medida de la base mayor $\rightarrow y$

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 24 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$2x + 2x + 4 = 24 \rightarrow 4x + 4 = 24 \rightarrow 4x = 24 - 4 \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{4} \rightarrow x = 5$$

$y = 2 \cdot 5 = 10$

Los lados iguales miden 5 cm y la base mayor 10 cm.

42 **La diferencia de dos números es 2, y la de sus cuadrados, 20. Halla esos números.**

Los números son x e y.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ (2 + y)^2 - y^2 = 20 \end{cases} \rightarrow 4 + 4y + y^2 - y^2 = 20 \rightarrow 4y = 16 \rightarrow y = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 6$$

Los números son 6 y 4.

43 **La suma de dos números es 36, y su producto, 275. ¿Qué números son?**

Un número $\rightarrow x$

Otro número $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x \cdot y = 275 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 36 - x \\ x \cdot y = 275 \end{cases}$$

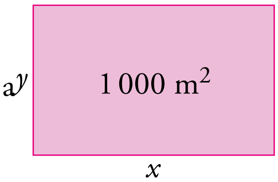
$$x \cdot (36 - x) = 275 \rightarrow 36x - x^2 = 275 \rightarrow x^2 - 36x + 275 = 0$$

$$x = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 275}}{2 \cdot 1} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1100}}{2} = \frac{36 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{36 \pm 14}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36 + 14}{2} \rightarrow x = \dfrac{50}{2} \rightarrow x = 25 \rightarrow y = \dfrac{275}{25} = 11 \\ x = \dfrac{36 - 14}{2} \rightarrow x = \dfrac{22}{2} \rightarrow x = 11 \rightarrow y = \dfrac{275}{11} = 25 \end{cases}$$

Los números buscados son 11 y 25.

44 **Una parcela rectangular tiene un perímetro de 130 m y un área de 1 000 m².** **¿Cuáles son sus dimensiones?**

a 

Perímetro = 130 m

$\begin{cases} 2x + 2y = 130 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 65 - x \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$

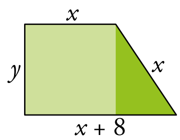
$x \cdot (65 - x) = 1\,000 \rightarrow 65x - x^2 = 1\,000 \rightarrow x^2 - 65x + 1\,000 = 0$

$$x = \frac{-(-65) \pm \sqrt{(-65)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1000}}{2 \cdot 1} = \frac{65 \pm \sqrt{4\,225 - 4\,000}}{2} = \frac{65 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{65 \pm 15}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{65 + 15}{2} \rightarrow x = \dfrac{80}{2} \rightarrow x = 40 \rightarrow y = \dfrac{1000}{40} = 25 \\ x = \dfrac{65 - 15}{2} \rightarrow x = \dfrac{50}{2} \rightarrow x = 25 \rightarrow y = \dfrac{1000}{25} = 40 \end{cases}$$

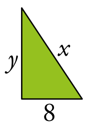
La parcela mide 25 m de largo y 40 m de ancho.

45 **El perímetro de este trapecio mide 44 cm. Calcula el área.**



Aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo más oscuro.

Aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo oscuro:



$x^2 = y^2 + 8^2$

Las ecuaciones resultantes son:

$\begin{cases} x + 8 + x + x + y = 44 \\ x^2 = y^2 + 8^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 36 \\ x^2 = y^2 + 64 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 36 - 3x \\ x^2 = y^2 + 64 \end{cases}$

$x^2 = (36 - 3x)^2 + 64 \rightarrow x^2 = 1\,296 - 216x + 9x^2 + 64 \rightarrow 9x^2 - x^2 - 216x + 1\,360 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 8x^2 - 216x + 1\,360 = 0$

$$x = \frac{-(-216) \pm \sqrt{(-216)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1360}}{2 \cdot 8} = \frac{216 \pm \sqrt{46\,656 - 43\,520}}{16} = \frac{216 \pm \sqrt{3136}}{16} = \frac{216 \pm 56}{16}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{216 + 56}{16} \rightarrow x = \dfrac{272}{16} \rightarrow x = 17 \rightarrow y = 36 - 3 \cdot 17 = -15 \rightarrow \text{No vale} \\ x = \dfrac{216 - 56}{16} \rightarrow x = \dfrac{160}{16} \rightarrow x = 10 \rightarrow y = 36 - 3 \cdot 10 = 6 \end{cases}$$

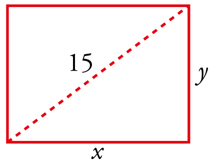
Descartamos la primera solución porque una medida no puede ser negativa.

Calculamos el área del trapecio:

$$\text{Área} = \frac{10 + (10 + 8)}{2} \cdot 6 = 28 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^2$$

El área del trapecio es 84 cm².

46 **La diagonal de un rectángulo mide 15 cm, y su perímetro, 42 cm. Calcula sus lados.**



$$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ x^2 + y^2 = 15^2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 21 \\ x^2 + y^2 = 225 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y = 21 - x \\ x^2 + (21 - x)^2 = 225 \end{cases} \to x^2 + 441 - 42x + x^2 = 225 \to$$

$$\to 2x^2 - 42x + 216 = 0 \to x^2 - 21x + 108 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = 9 \end{cases}$$

Si $x = 12$, $y = 21 - 12 = 9$.

Si $x = 9$, $y = 21 - 9 = 12$.

Los lados del rectángulo miden 9 cm y 12 cm, respectivamente.

47 **En un triángulo rectángulo, la diferencia entre la medida de sus catetos es de 6 cm. Si la hipotenusa mide 30 cm, ¿cuánto miden los catetos?**

Llamamos x e y a la verdad de los catetos.

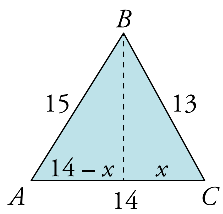
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 30^2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 6 + y \\ (6 + y)^2 + y^2 = 900 \end{cases} \to 36 + 12y + y^2 + y^2 = 900 \to$$

$$\to 2y^2 + 12y - 864 = 0 \to y^2 + 6y - 432 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-432)}}{2} = \frac{-6 \pm 42}{2} \begin{cases} y = 18 \to x = 24 \\ y = -24 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

Los catetos miden 24 cm y 18 cm.

48 **¿Cuánto mide la altura del triángulo que parte de B? Todas las medidas están dadas en centímetros.**



Llamamos y a la altura pedida.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13^2 \\ (14 - x)^2 + y^2 = 15^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 169 \\ -28x + x^2 + y^2 = 29 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} y^2 = 169 - x^2 \\ y^2 = 29 - 28x - x^2 \end{array}\right\} \to 169 - x2 = 29 - 28x - x2 \to 140 = 28x \to x = 5$$

$$25 + y^2 = 169 \to y^2 = 169 - 25 = 144 \to y = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

Como la altura no puede tomar un valor negativo, la única solución válida es 12 cm.

49 **Si la base de un rectángulo disminuye 80 cm y su altura aumenta 20 cm, se convierte en un cuadrado. Y si la base disminuye 60 cm y la altura aumenta 20 cm, su área disminuye 400 cm^2. Halla las dimensiones del rectángulo.**

Llamamos x a la medida de la base e y a la de la altura.

$$\begin{cases} x - 80 = y + 20 \\ (x - 60)(y + 20) = xy - 400 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 100 \\ xy + 20x - 60y - 1\,200 = xy - 400 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 100 \\ 20x - 60y = 800 \end{cases}$$

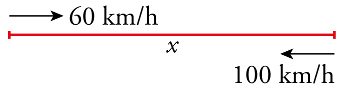
$$x = y + 100 \to 20(y + 100) - 60y = 800 \to 20y + 2\,000 - 60y = 800 \to -40y = -1\,200 \to$$

$$\to y = 30 \to x = 130$$

La base del rectángulo mide 130 cm, y la altura, 30 cm.

51 **Un autobús escolar hace la ruta entre dos pueblos, A y B. Cuando va lleno, lleva una velocidad media de 60 km/h y tarda 15 min más que si va vacío. Si cuando va vacío va a 100 km/h, ¿cuál es la distancia entre A y B?**

	ESPACIO (en km)	VELOCIDAD (en km/h)	TIEMPO (en h)
LLENO	x	60	$t + 1/4$
VACÍO	x	100	t



$$\left.\begin{array}{l} x = 60t \\ x = 100\,(t - 0{,}25) \end{array}\right\} \to 60t = 100t - 25 \to 40t = 25 \to t = 0{,}625 \to x = 60 \cdot 0{,}625 = 37{,}5$$

La distancia entre A y B es 37,5 km.

52 **Una empresa recibe el encargo de fabricar cierto número de macetas para una fecha determinada. Al planificar la producción, la gerente advierte que si se fabricasen 250 macetas diarias, faltarían 150 macetas al concluir el plazo. Pero que si se fabricasen 260 macetas diarias, sobrarían 80. ¿Cuántos días de plazo tenían y cuántas macetas les encargaron?**

Llamamos x al número de días de plazo e y al número de macetas.

$$\left.\begin{array}{l} 250x - y = -150 \\ 260x - y = 80 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -250x + y = 150 \\ 260x - y = 80 \end{array}\right\} \to 10x = 230 \to x = 23 \to y = 5\,900$$

Tienen 23 días de plazo para un encargo de 5 900 macetas.

53 **En un restaurante han preparado dos kilos de hamburguesas grandes y otros dos de hamburguesas pequeñas. Una de las grandes pesa 20 gramos más que una de las pequeñas y en total han salido 45 piezas. ¿Cuántas han hecho de cada tipo?**

$x \to$ número de hamburguesas pequeñas, que pesan $\dfrac{2000}{x}$ g.

$y \to$ número de hamburguesas grandes, que pesan $\dfrac{2000}{y}$ g.

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ \dfrac{2000}{x} + 20 = \dfrac{2000}{y} \end{cases} \to \begin{cases} x = 45 - y \\ \dfrac{100}{x} + 1 = \dfrac{100}{y} \end{cases} \to \begin{cases} x = 45 - y \\ 100y + xg = 100x \end{cases} \to$$

$$\to 100y + (45 - y) \cdot y = 100(45 - y) \to 100y + 45y - y^2 = 4\,500 - 100y \to$$

$$\to y^2 - 245y + 4\,500 = 0 \begin{cases} y = 20 \to x = 25 \\ y = 225 \quad \text{(No vale)} \end{cases}$$

Se han hecho 25 hamburguesas pequeñas y 20 grandes.

AUTOEVALUACIÓN

Página 131

1 ¿Verdadero o falso?

a) Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene una sola solución.

b) Al representar en el plano cartesiano las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, se obtiene una recta.

c) Las soluciones de la ecuación $x = 0$ coinciden con el eje horizontal (de abscisas).

d) La solución de un sistema indeterminado coincide con el punto de corte de las rectas que lo representan.

e) En el plano cartesiano, el punto de corte de dos rectas coincide con la solución del sistema que forman sus correspondientes ecuaciones.

f) Las ecuaciones de dos rectas paralelas forman un sistema con infinitas soluciones.

a) Falso. Tiene infinitas soluciones (todos los puntos de la recta que la representa).

b) Verdadero.

c) Falso. Coinciden con el eje vertical.

d) Falso. Un sistema indeterminado tiene infinitas soluciones.

e) Verdadero.

f) Falso. Dos rectas paralelas representan a un sistema sin solución

2 Resuelve estos sistemas; el primero por sustitución, el segundo por reducción y el tercero por igualación:

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \ \to \ x = -3y \\ 2x + y = -5 \ \to \ 2(-3y) + y = -5 \ \to \ -6y + y = -5 \ \to \ y = 1 \end{cases}$

$x = -3 \cdot 1 = -3$

Solución: $x = -3, \ y = 1$.

b) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 2y = -6 \end{cases}$

$5y = -10 \ \to \ y = -2$

$x + 3 \cdot (-2) = -4 \ \to \ x = 2$

Solución: $x = 2, \ y = -2$.

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \to \begin{cases} y = \dfrac{2-4x}{3} \\ y = 2x + 4 \end{cases} \to \dfrac{2-4x}{3} = 2x + 4 \ \to$

$\to \ 2 - 4x = 6x + 12 \ \to \ 10x = -10 \ \to \ x = -1$

$y = 2(-1) + 4 = 2$

Solución: $x = -1, \ y = 2$.

3 **Resuelve este sistema de ecuaciones no lineales:**

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 5 \;\to\; x = 5 + y \\ x^2 + y^2 = 13 \;\to\; (5 + y)^2 + y^2 = 13 \;\to\; 25 + 10y + y^2 + y^2 = 13 \;\to \end{cases}$$

$$\to\; 2y^2 + 10y + 12 = 0 \;\to\; y^2 + 5y + 6 = 0$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \begin{cases} y = -2 \;\to\; x = 3 \\ y = -3 \;\to\; x = 2 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

4 **El precio en un museo es 7 € la entrada adulta y 3 € la infantil. El martes visitaron el museo 235 personas y se recaudaron 1 485 €. ¿Cuántas entradas adultas y cuántas infantiles se vendieron?**

$x \;\to\;$ personas adultas.

$y \;\to\;$ niños y niñas.

$$\begin{cases} x + y = 235 \\ 7x + 3y = 1485 \end{cases} \;\to\; \begin{cases} -3x - 3y = -705 \\ 7x + 3y = 1485 \end{cases}$$

$$4x \qquad = 780 \;\to\; x = 195$$

$195 + y = 235 \;\to\; y = 40$

Se vendieron 195 entradas adultas y 40 infantiles.

5 **Roberto sale a pasear en bici a 8 km/h. Un cuarto de hora más tarde sale a buscarle su hija, también en bici, a 20 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarle y qué distancia habrá recorrido hasta conseguirlo?**

(Resuélvelo mediante un sistema de ecuaciones. Después, si quieres, vuelve a resolverlo con una ecuación, teniendo en cuenta la velocidad de alcance a la que la hija se acerca al padre y la distancia que debe recuperar).

	VELOCIDAD	TIEMPO	DISTANCIA
ROBERTO	8	$x + 0{,}25$	y
HIJA	20	x	y

$$\begin{cases} 8 \cdot (x + 0{,}25) = y \\ 20x = y \end{cases} \;\to\; 8(x + 0{,}25) - 20x \;\to\; 8x + 2 = 20x \;\to\; x = \frac{1}{6}\text{ h} = 10 \text{ mín}$$

$y = 20 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}33$ km

Tarda 10 mín en alcarle y habrá recorrido 3,33 km.

6 **El perímetro de una parcela rectangular es 80 m, y el área, 375 m². ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?**

Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo.

$$\begin{cases} 2(x+y)=80 \;\rightarrow\; x=40-y \\ x \cdot y = 375 \;\rightarrow\; (40-y)\cdot y = 375 \;\rightarrow\; 40y - y^2 = 375 \;\rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow\; y^2 - 40y + 375 = 0$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 375}}{2} = \frac{40 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 25 \\ y = 15 \end{cases}$$

Si $y = 25$, $x = 15$. Si $y = 15$, $x = 25$.

La parcela mide 25 m de largo y 15 m de ancho.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Página 131

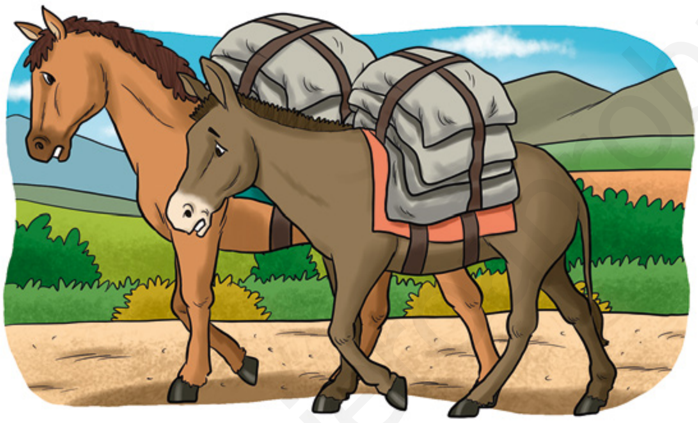
Acertijo…

- **Un caballo y un mulo, cargados con sacos, iban juntos. El caballo se quejaba de su carga, y el mulo le dijo:**

  — ***¿De qué te quejas? Si yo cargara con uno de tus sacos, mi carga sería el doble de la tuya. En cambio, si tú cargaras con uno de los míos, tu carga sería igual que la mía.***

  ¿Cuántos sacos llevaba cada uno?

  Intenta resolverlo de cabeza, tanteando con números sencillos. Después, tanto si has sido capaz de llegar a la solución como si no, resuélvelo mediante un sistema de ecuaciones.



- El caballo carga $\rightarrow$ x sacos

  El mulo carga $\rightarrow$ y sacos

$$\begin{cases} 2(x-y)=y+1 \\ x+y=y-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2=y+1 \\ x-y=-1-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-y=2+1 \\ x-y=-2 \end{cases} \rightarrow \text{Multiplicamos por } (-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ -x+y=2 \end{cases}$$

$$x \quad = 5 \rightarrow -5+y=2 \rightarrow y=7$$

El caballo carga con 5 sacos y el mulo con 7.

9 FUNCIONES ACADÉMICAS

2 LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Página 136

1 Observa la gráfica del helicóptero y responde:

a) ¿Cuánto tiempo ha empleado en realizar la misión?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja a coger agua? ¿Y para apagar el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para soltarla sobre el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 300 m de altura?

a) Ha empleado 27 minutos.

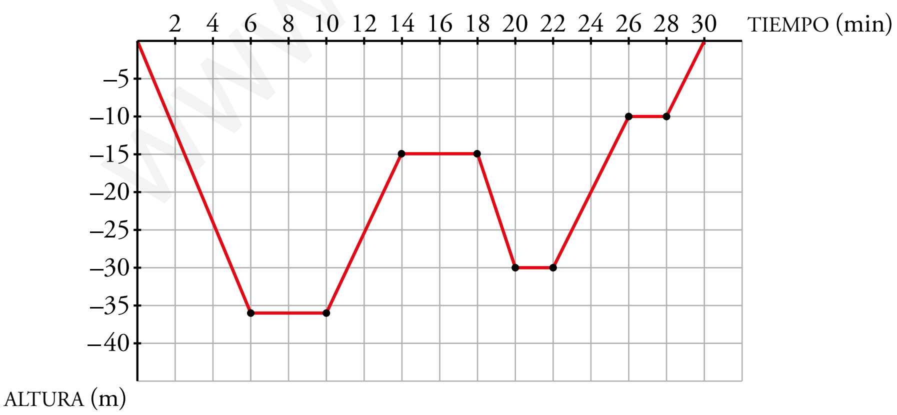
b) A los 20 min estaba a 60 metros. Baja a coger agua a 10 metros. Para apagar el fuego se sitúa a 60 metros.

c) Necesita 2 minutos para llenar el depósito. Para soltar el agua necesita 1,5 minutos, aproximadamente.

d) $v = \dfrac{300 \text{ m}}{3 \text{ min}} = 100 \text{ m/min}$

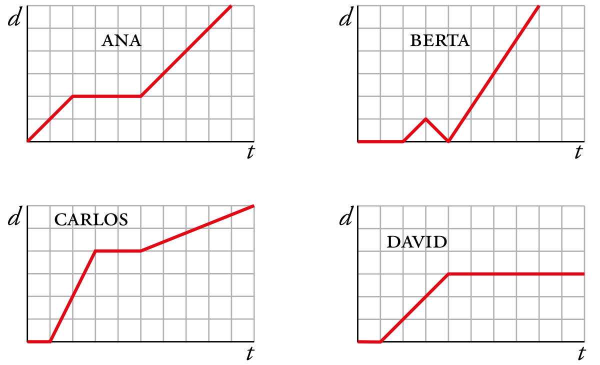
2 Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.

En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.



Página 137

3 **Dos hermanas y dos hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (d) - tiempo (t) de cada uno:**



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos han ido a buscar a sus amigos para ir a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo sin moverse?

a) Ha salido antes Ana.

b) Ha llegado más tarde Carlos.

c) Ana y Carlos.

d) Se le ha olvidado algo a Berta.

e) No ha ido a clase David.

f) Ha andado más lento Carlos.

g) Berta ha ido más rápido.

h) David.

3 ASPECTOS RELEVANTES DE UNA FUNCIÓN

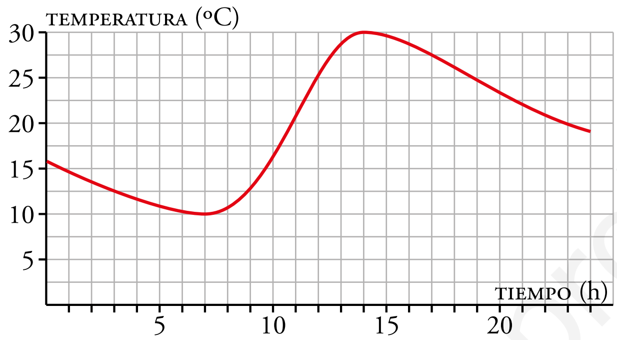
Página 138

1 La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



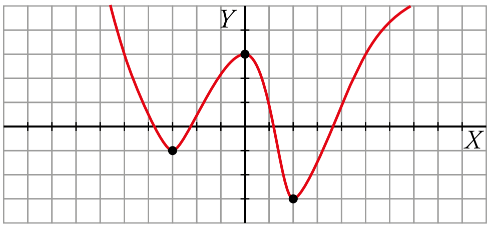
a) La temperatura en Jaca aumenta en el intervalo 7-14 horas y decrece en los intervalos 0-7 horas y 14-24 horas.

b) Por los cambios de temperatura a lo largo del día. Por la mañana las temperaturas van aumentando y, al acercarse la noche, las temperaturas disminuyen.

c) La temperatura más alta que alcanza son los 30 °C durante el día y la temperatura más baja que alcanza son los 10 °C. Por tanto, cuando se ha hecho esta gráfica era verano.

Página 139

2 **a) Indica en qué puntos de la gráfica hay máximos y mínimos relativos.**



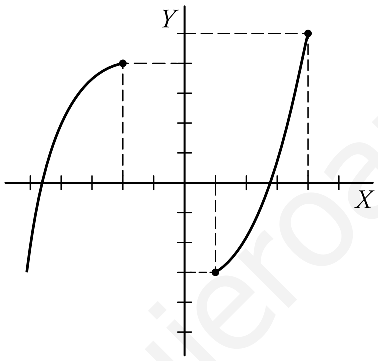
b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Máximo relativo en (0, 3). Mínimos relativos en (–3, –1) y en (2, –3).

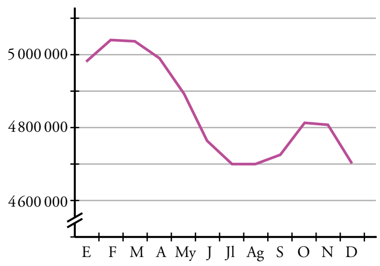
b) La función crece en (–3, 0) ∪ (2, +∞), y decrece en (–∞, –3) ∪ (∞, 2).

3 **Sobre unos ejes, dibuja una gráfica creciente que tenga dos máximos relativos en (–2, 4) y (4, 5) y un mínimo relativo en (1, –3).**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



4 Meta 8.5. **La siguiente gráfica muestra la tasa de paro en un cierto país en 2020:**



a) ¿En qué meses se encuentran los máximos y mínimos relativos?

b) ¿Qué crees que causa estas fluctuaciones en la tasa de paro?

c) ¿Has oído hablar del empleo estacional? Búscalo en Internet y relaciónalo con lo que ocurre en la gráfica.

a) Los máximos, en Marzo y Noviembre. Los mínimos, en Enero, Agosto y Diciembre.

b) El descenso en el paro lo provoca las campañas de Navidad y de verano.

c) El empleo estacional es el que se produce en determinadas épocas del año por estar asociado a una industria o sector económico donde la demanda de empleo es mucho más alta en unas temporadas que en otras.

Por ejemplo, en nuestra gráfica, la campaña comercial de Navidad o la campaña turística veraniega hacen que descienda mucho el paro.

Página 140

5 **La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.**

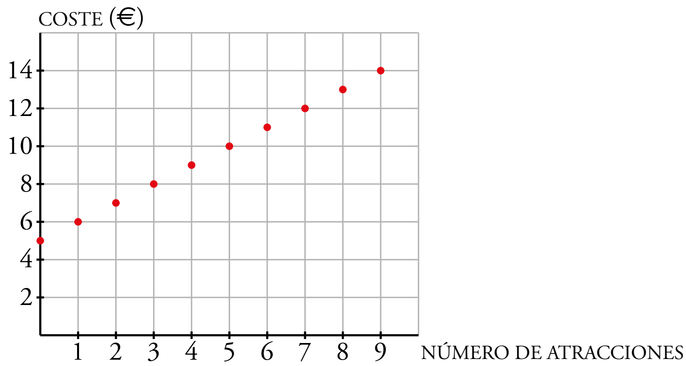
a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta → coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

a)



b) No pueden unirse porque una persona no puede montarse en media atracción o solo pagar medio viaje.

c) Subir a doce atracciones costará 5 € más un euro por atracción, es decir, 5 + 12 = 17 €.

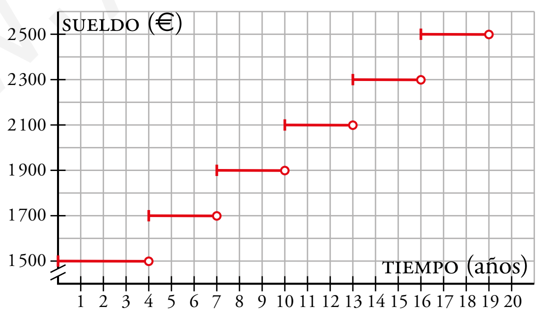
Subir a 20 atracciones costará 5 + 20 = 25 €.

6 **La gráfica de la derecha muestra el sueldo mensual de una persona en una empresa a lo largo de su vida.**

a) ¿Cuánto tiempo lleva la persona en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? Suponiendo que se sigue la tendencia, ¿cuánto gana a los 20 años?

c) ¿Es una función continua?



a) Cuando le suben el sueldo por primera vez, la persona lleva en la empresa 4 años.

b) A los 12 años de entrar cobra 2 100 €, y a los 20, 2 500 €.

c) No, no es continua.

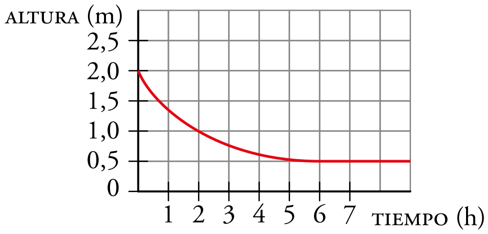
Página 141

7 **A un depósito cilíndrico de 2 m de alto lleno de agua se le hace un pequeño agujero a una distancia de 0,5 m de su base. El agua sale al principio con mucha presión, pero según se va vaciando el depósito, el agua va perdiendo presión hasta que, a las 4 h, el agujero rezuma solo un hilillo y no para hasta las 5 h.**

a) Representa la gráfica de la función:

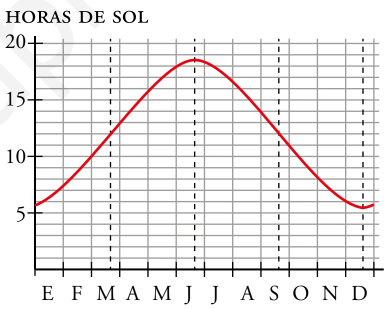
tiempo transcurrido → altura del agua

b) ¿A cuánto tiende la función? ¿En qué se traduce dicha tendencia?

a) 

b) La función tiende a 0,5 m, lo que quiere decir que la altura del agua en el depósito tiende a estabilizarse a 0,5 m.

8 **Esta gráfica muestra las horas de sol que hay a lo largo del año en Oslo (Noruega).**



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿Cuántas horas de sol hay en el solsticio de invierno? ¿Y en el de verano?

c) ¿Aproximadamente en qué momentos del año hay 14 horas de sol?

a) Sí, es periódica de periodo 1 año.

b) 5,5 h, aproximadamente, en el de invierno. En el de verano hay 18,5 h, aproximadamente.

c) A mitad de abril, y a finales de agosto y principios de septiembre.

4 EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN

Página 142

1 Indica cuáles de los siguientes pares de valores corresponden a la base y al área de algún rectángulo del ejemplo anterior:

a) Base: $x = 1$ cm $\rightarrow$ Área: $A = 39$ cm^2

b) $x = 5 \rightarrow A = 35$

c) $x = 22 \rightarrow A = 396$

d) $x = 42 \rightarrow A = -84$

La fórmula que deben cumplir para que sean como el ejemplo anterior es $A = x(40 - x)$.

a) $1 \cdot 39 = 39 = A \rightarrow$ Sí es igual.

b) $5 \cdot 35 = 175 \neq 35 \rightarrow$ No es igual.

c) $22 \cdot 18 = 396 = A \rightarrow$ Sí es igual.

d) El área no puede ser negativa.

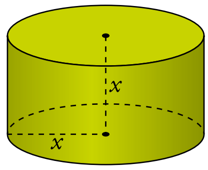
Página 143

2 **Imagina un cilindro cuya altura, x, sea igual al radio de su base.**

a) ¿Cuál es la expresión analítica de su volumen?

Recuerda que el volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

b) Obtén la expresión analítica del área del cilindro.

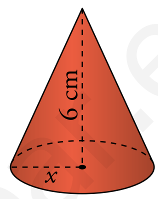


a) $V = \pi x^2 \cdot x \rightarrow V = \pi x^3$

b) $A_{CILINDRO} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \rightarrow A = 2\pi x^2 + 2\pi x^2 \rightarrow A = 4\pi x^2$

3 **Indica cuál es la expresión analítica del volumen de un cono sabiendo que su altura son 6 cm y el radio de su base es variable.**

Recuerda que el volumen de un cono es 1/3 del área de la base por la altura.

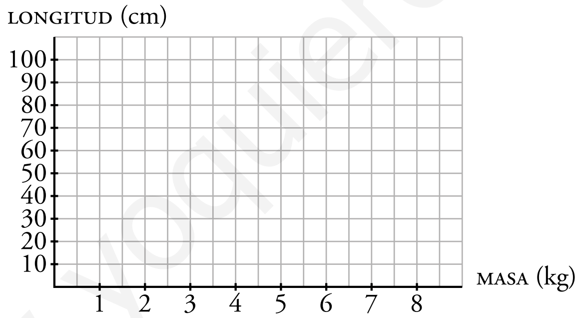


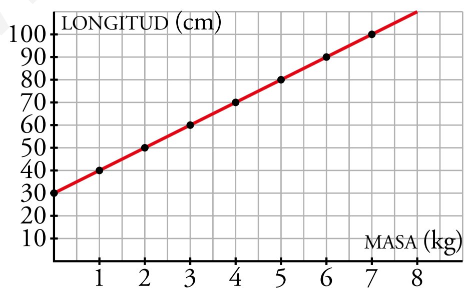
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 6 \rightarrow V = 2\pi x^2$

4 **Un muelle mide 30 cm y se alarga otros 10 cm por cada kilogramo que se cuelga de él. Pero no se pueden colgar más de 7,5 kg.**

La función que relaciona la longitud, L, del muelle con la masa, m, que soporta es: $L = 30 + 10m$.

Represéntala en tu cuaderno en unos ejes cartesianos como estos:





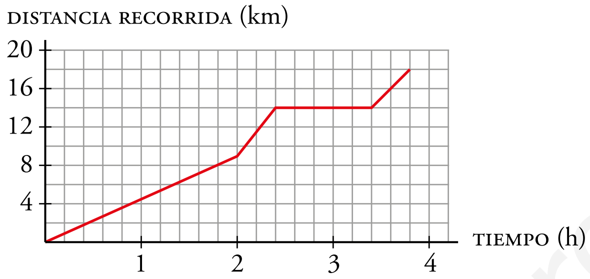
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 144

Practica

Interpretación de gráficas

1 **Ana sale a las 10:00 con la intención de subir una montaña para luego volver por el mismo camino hasta llegar al punto de partida. Esta gráfica muestra la distancia recorrida a lo largo de su caminata:**



a) ¿Cuánto tiempo dura la caminata? ¿A qué hora acaba de andar?

b) ¿Cuándo ha llegado a la cima?

c) ¿Qué distancia ha recorrido antes de parar a descansar? ¿Cuánto tiempo descansa?

d) ¿En qué intervalo de tiempo baja la cuesta más empinada?

e) Explica por qué la gráfica nunca es decreciente.

a) La caminita dura 4,8 h = 4 h 48 min. Acaba de andar a las 10 h + 3 h 48 min = 13 h 48 min.

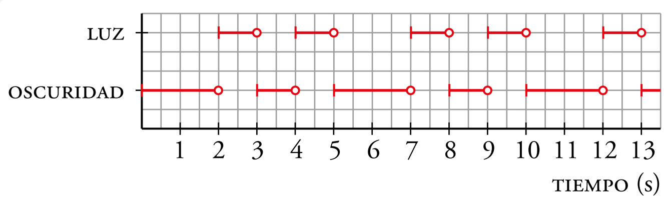
b) Ha llegado a la cima a las 2 horas; es decir, a las 12:00.

c) Ha recorrido 14 km antes de parar a descansar. Descansa durante 1 horas.

d) Entre las 2 h y las 2,4 h de empezar a caminar; es decir, entre las 12:00 y las 12:24 h.

e) Nunca es decreciente porque la distancia que camina aumenta constantemente, nunca puede decrecer.

2 **La luz de un faro que se enciende y se apaga varias veces en una secuencia de tiempo única (cada faro tiene la suya propia) se muestra en esta gráfica:**



a) ¿Cada cuánto tiempo se repite, es decir, cuál es el periodo de esta función?

b) La luz a los 6 s, ¿está encendida o apagada? ¿Y a los 7 s?

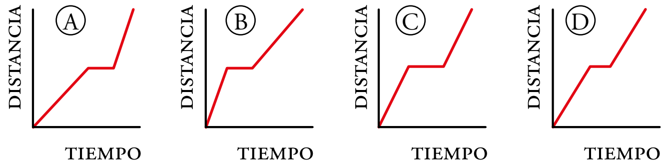
c) ¿Cómo estará la luz a los 15 s? ¿Y al minuto?

a) Se repite cada 5 segundos. Es una función periódica de periodo 5 segundos.

b) A los 6 segundos está apagada. A los 7 segundos se enciende.

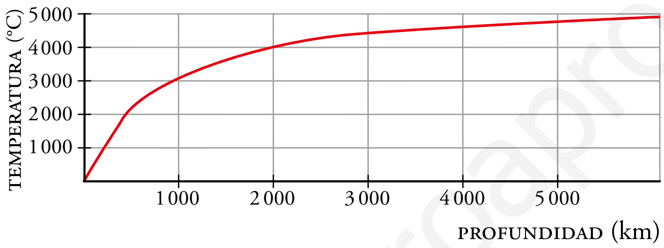
c) A los 15 segundos estará apagada. Al minuto también estará apagada.

3 **Guillermo sale corriendo de casa para no llegar tarde a clase. A medio camino para un rato a descansar y continúa andando tranquilamente hasta que llega. Indica qué gráfica muestra la distancia que recorre.**



La gráfica correspondiente es la Ⓑ: al principio, como Guillermo va corriendo, la recta tiene mucha inclinación, lo que significa que la distancia que recorre aumenta rápidamente; a mitad de camino se para, lo que indica que la distancia que recorre se mantiene constante, ni sube ni baja; por último, sigue andando, más despacio que al principio, por lo que aumenta la distancia pero a menor velocidad, por lo que la recta tiene menos pendiente.

4 **La temperatura de la Tierra va aumentando en función de la profundidad. Al principio aumenta de manera constante y poco a poco se estabiliza. La gráfica muestra una estimación de dicha variación:**



a) ¿Qué temperatura hay a 1 500 km de profundidad, aproximadamente? ¿Y a 3 000 km?

b) Estima la temperatura en el centro de la Tierra (6 371 km).

c) Suponiendo que en el primer tramo la temperatura crece de forma constante unos 20 °C/km, ¿a qué profundidad se alcanzan 1 000 °C? ¿Y 2 000 °C?

d) El punto de fusión del hierro es de 1 538 °C. ¿Desde qué profundidad podemos asegurar que el hierro se encuentra en estado líquido?

a) A 1 500 km, unos 3 500 °C. A 3 000 km, unos 4 500 °C.

b) La función parece que tiende a estabilizarse a 5 000 °C, por lo que estimamos que en el centro de la Tierra hará esa temperatura.

c) $\frac{1000}{20} = 50 \rightarrow$ A 50 km se alcanzan 1 000 °C, aproximadamente.

$\frac{2\,000}{20} = 100 \rightarrow$ A 100 km se alcanzan 2 000 °C, aproximadamente.

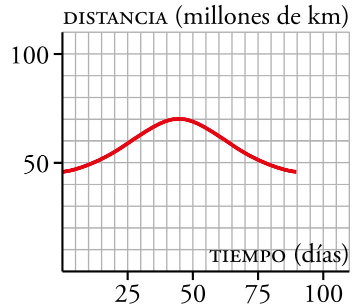
d) $\frac{1538}{20} = 76{,}9 \rightarrow$ A partir de los 76,9 km.

5 **Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros. Esta gráfica muestra su distancia al Sol:**

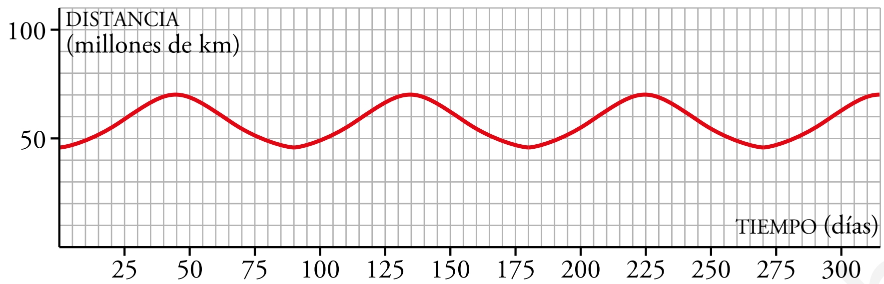
a) Copia y completa la gráfica para 300 días.

b) Estima su distancia al Sol dentro de dos años terrestres.

c) Cuando comienza la gráfica, Mercurio se encuentra a 46 millones de kilómetros del Sol. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que está a 60 millones de kilómetros?



a)



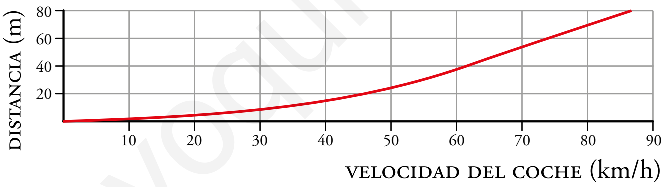
b) 2 años = 365 · 2 = 730 días.

730 días = 88 · 8 + 26 → En el día 730 estará en la misma posición que en el día 26.

Mirado la gráfica, estimamos que su distancia al sol dentro de dos años será de 62 millones de kilómetros.

c) Mirando la gráfica vemos que pasan 25 días, pues la función pasa por el punto (25, 60).

6 **La siguiente gráfica muestra la distancia que recorre un vehículo desde que presiona el freno hasta que para, en función de la velocidad que lleva:**



a) Aproximadamente, ¿cuántos metros recorre un vehículo al frenar si va a 55 km/h?

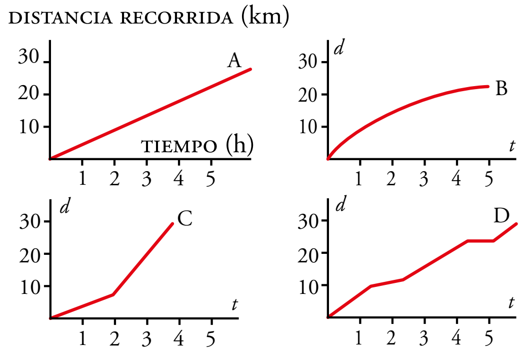
b) ¿A qué velocidad iba un vehículo que ha necesitado 50 m para frenar?

a) Aproximadamente, 30 metros.

b) Aproximadamente, a 65 km/h.

Página 145

7 **Las siguientes gráficas nos muestran la distancia recorrida por cuatro senderistas en función del tiempo que dura su marcha:**



a) Describe el ritmo de cada senderista.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

d) ¿Quién alcanza más velocidad?

e) Invento una gráfica correspondiente a una senderista que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

a) El montañero A lleva un ritmo constante.

El montañero B va decreciendo el ritmo según avanza el tiempo.

El montañero C comienza a un ritmo y a las dos horas acelera hasta que se para a las cuatro horas.

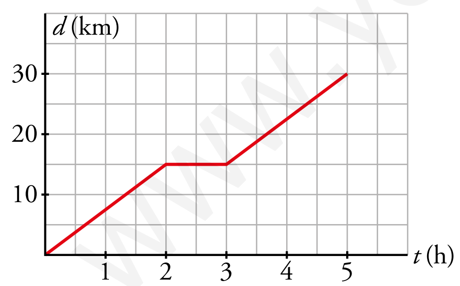
El montañero D va alternando un ritmo rápido con un ritmo más lento.

b) El montañero B recorre menos camino, recorre 20 km aproximadamente.

c) El montañero C camina durante menos tiempo, camina casi cuatro horas.

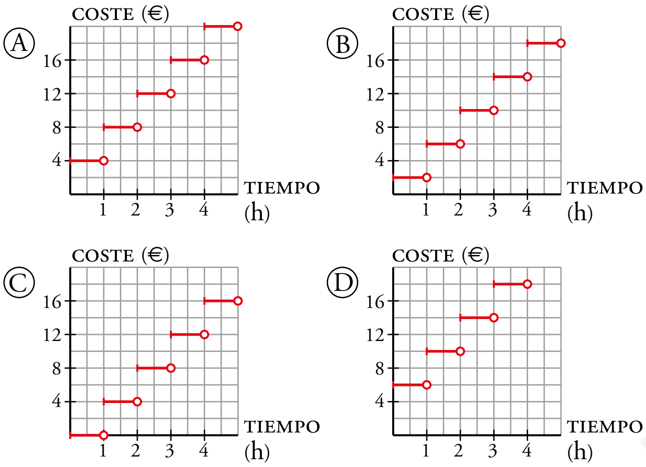
d) Alcanza más velocidad el montañero C.

e)



8 **La entrada a un parque de atracciones cuesta 2 €, y la pulsera para subir a todas las atracciones, 4 € cada hora o fracción (es decir, que te cobran la hora completa aunque la uses solo un rato).**

a) ¿Cuál de estas gráficas representa mejor el coste de entrar y montar en las atracciones?

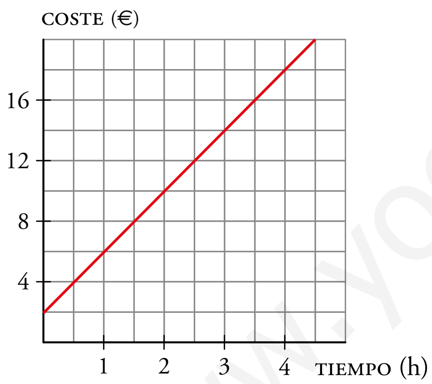


b) Dibuja en tu cuaderno una gráfica que represente el coste si cobran exactamente por el tiempo que has utilizado la pulsera.

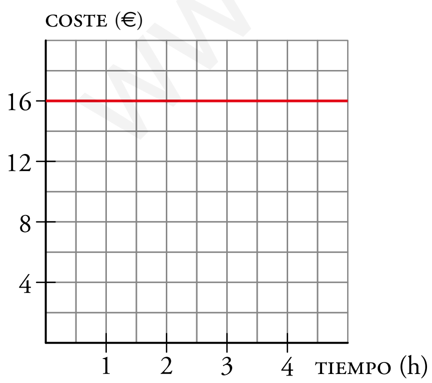
c) Dibuja otra que represente el coste de un bono en el que pagas 16 € para entrar y montarte en todas las atracciones el tiempo que quieras hasta que cierre el parque.

a) La gráfica Ⓓ, ya que por estar la 1ª hora te cobran 2 € de entrada más 4 € de la pulsera; es decir 6 €. Después, el precio de cada hora siguiente sube de 4 € en 4 €.

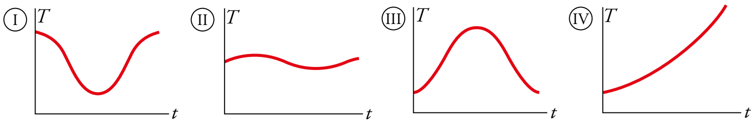
b)



c)



9 **Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:**



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de Ⓘ y Ⓘ, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

f) Dibuja una gráfica correspondiente a un lugar en el desierto del Sahara y otra a uno en la Antártida.

a) En la ciudad ⓑ.

b) Las gráficas ⓐ y ⓒ, porque cuando en una la temperatura es alta en la otra es baja y al revés.

c) La grafica ⓓ es absurda, porque la temperatura solo crece.

d) Para la variable tiempo, podemos hacer corresponder cada cuadradito con un mes.

Para la variable temperatura, cada cuadradito pueden ser 2 ó 5 grados centígrados.

e) El dominio es el intervalo 1-12 (o de Enero a Diciembre).

Son ciudades que no tienen inviernos muy fríos, ya que en ningún caso se alcanzan temperaturas bajo cero. La ciudad ⓐ tiene más variación entre sus temperaturas. En la ciudad ⓑ, la temperatura no varía demasiado a lo largo de los meses.

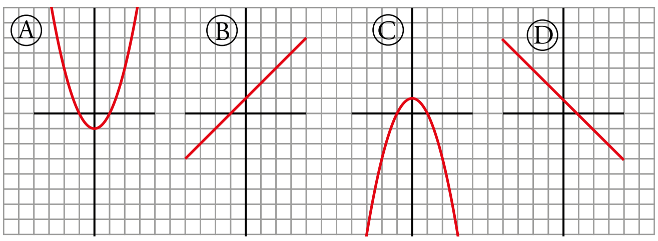
f) Respuesta abierta.

Relaciones gráficas y expresiones analíticas

10 **Relaciona cada gráfica con una de estas expresiones analíticas:**

I) $y = x + 1$ **II)** $y = 1 - x^2$

III) $y = x^2 - 1$ **IV)** $y = -x + 1$



i) → Ⓑ ii) → Ⓒ iii) → Ⓐ iv) → Ⓓ

11 **a) Sabiendo que la libra es una unidad de peso que equivale a 0,45 kg, copia y completa esta tabla:**

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)		0,45				

b) Escribe la expresión analítica que convierte libras en kilos.

c) Escribe la que convierte kilos en libras.

d) Representa en unos ejes coordenados las dos expresiones analíticas anteriores.

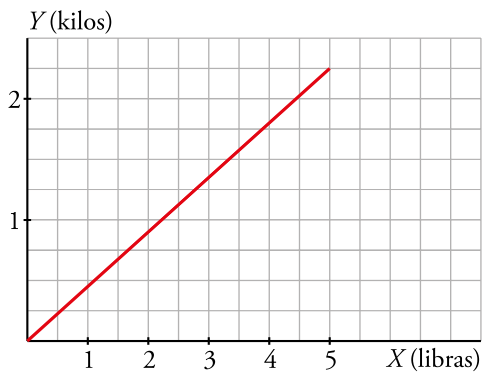
a)

x (LIBRAS)	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**	**4**	x
y (KILOS)	0,225	**0,45**	0,675	0,9	1,35	1,8	$0{,}45x$

b) $y = 0{,}45x \;\rightarrow\; 0{,}45x - y = 0$

c) $\dfrac{y}{0{,}45} = x \;\rightarrow\; 0{,}45x - y = 0$

d)



Son la misma gráfica.

Página 146

Resuelve problemas

12 **Indica, como en el ejemplo, la expresión analítica que corresponde a cada una de las siguientes situaciones:**

- **¿Cuánto tiempo de viaje nos queda si vamos a 120 km/h hacia nuestro destino, que está a x km?**

$$t = \frac{x}{120}$$

a) Si una garrafa vale 1,30 € y el litro de mosto, 0,90 €, ¿cuánto cuesta una garrafa con x litros de mosto?

b) ¿Cuál es el área de un triángulo de 10 cm de base y x cm de altura?

c) Si una botella de 5 litros tiene 1,5 litros de agua en su interior, ¿cuántos litros caben todavía después de echar x litros?

d) En una carrera de 10 km, ¿a qué distancia me encontraré de la meta después de correr a 8 km/h durante x horas?

e) ¿Cuál es el volumen de un ortoedro de base cuadrada de lado x cm y 20 cm de altura?

f) Si la temperatura de un líquido desciende 3 °C cada dos minutos, ¿qué temperatura tendrá un café t min después de sacarlo del microondas a 70 °C?

a) $y = 1{,}3 + 0{,}9x$

b) $A = \dfrac{10 \cdot x}{2} = 5x$

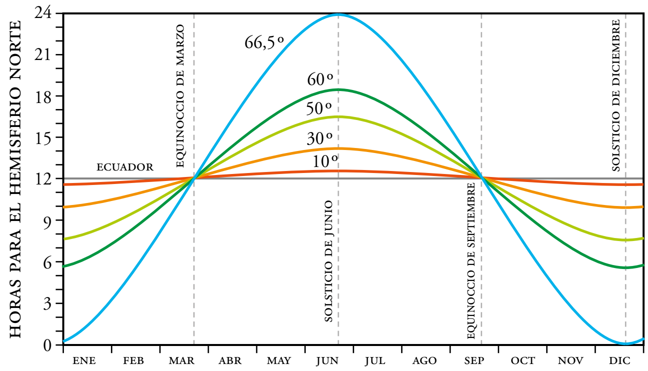
c) $y = 3{,}5 - x$

d) $e = 10 - 8x$

e) $V = 20x^2$

f) $T = 70 - \dfrac{3}{2}\,t$

13 **En esta gráfica se muestra la duración del día (en horas) según la latitud:**



a) ¿Cuántas horas de sol tiene como máximo una persona que vive en el paralelo 60°? ¿Y como mínimo?

b) En el ecuador, ¿varían las horas de sol según el mes?

c) ¿Qué ocurre en el paralelo 66,5° el 21 de junio? ¿Y el 21 de diciembre? Busca una ciudad que se encuentre más o menos en ese paralelo.

d) ¿Cuántas horas de sol tienen en cualquier lugar del planeta en los equinoccios de primavera y otoño?

e) Busca información sobre el número de horas de sol en el Polo Norte a lo largo del año.

a) Como máximo, 18 horas. Como mínimo, casi 6 horas.

b) No, no varían.

c) El 21 de junio no se pone el sol. El 21 de diciembre no sale el sol. Por ejemplo, la ciudad noruega de Bodø.

d) Tienen 12 horas de sol.

e) En el polo Norte, el sol sale y se pone solo una vez por año. Por tanto, la mitad del año es de día y la otra mitad, de noche.

14 **En la factura mensual del gas de una ciudad se paga una cantidad fija de 15 € y 0,75 € más por cada metro cúbico consumido.**

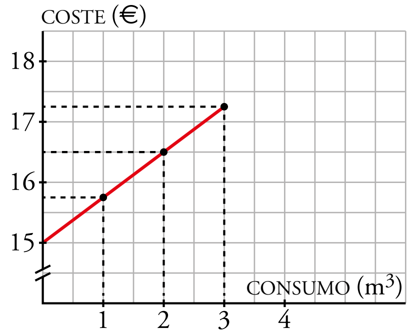
a) ¿Cuánto se paga por consumir 15 m^3 en un mes?

b) Dibuja la función: ***metros cúbicos consumidos-coste*****.**

c) Escribe la expresión analítica que indique el importe de la factura en función del volumen de gas consumido.

a) Por 15 m^3 se pagan $15 + 0{,}75 \cdot 15 = 26{,}25$ €

b)



c) $y = 15 + 0{,}75x$, donde x son los metros cúbicos consumidos e y es el importe total de la factura.

15 **Los cestillos de una noria suben y bajan a medida que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:**

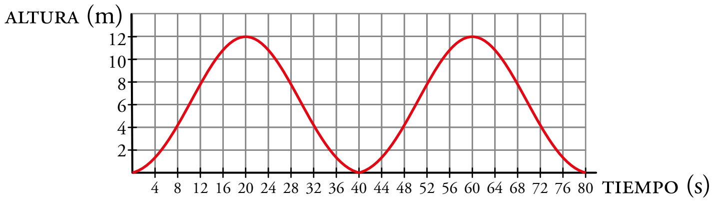
TIEMPO (s)	0	4	8	12	16	20
ALTURA (m)	0	1,2	4,1	7,9	10,8	12

a) Representa la gráfica de la función *tiempo-altura* de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.

b) ¿Es una función periódica? ¿A qué tiempos corresponden sus máximos y mínimos relativos?

c) ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

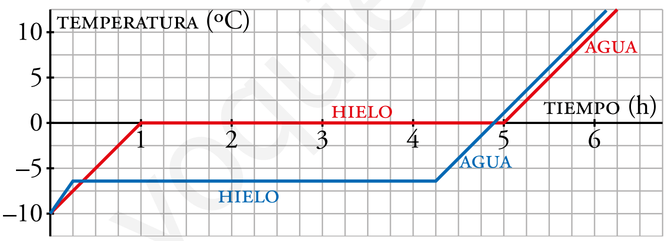
a)



b) Sí, es periódica de periodo 40. Los máximos y mínimos están en los múltiplos de 20.

c) $150 = 40 \cdot 3 + 30 \rightarrow$ A los 150 s estará a la misma altura que a los 30 segundos. Es decir, a unos 6 m.

16 **Cuando nieva, se echa sal en las calles. Al echarle sal, el hielo se derrite a menor temperatura (a unos –6 °C). Hasta que un bloque de hielo no está derretido completamente, no empieza a aumentar su temperatura. Estas son las gráficas *tiempo-tempertura* de un bloque de hielo (luego agua) con sal y de otro sin sal:**



a) ¿Cuál corresponde a cada uno?

b) ¿Cuánto tiempo tarda cada uno en derretirse?

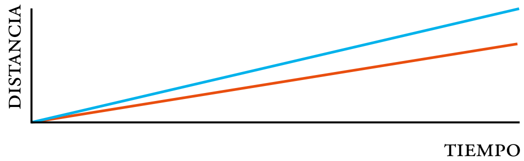
c) ¿Tendría sentido echar sal a la nieve con una temperatura ambiente de –12 °C? ¿Por qué?

a) La gráfica azul es el bloque de hielo con sal.

b) Los dos tardan 4 horas en derretirse.

c) No tendría sentido, ya que a esa temperatura el hielo no se derretiría aunque echásemos sal.

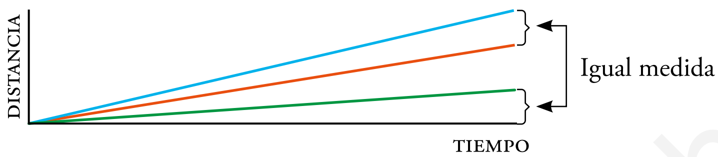
17 **Ana camina sobre el pasillo móvil de un aeropuerto y Marcos prefiere ir andando sobre el suelo. El siguiente gráfico permite comparar sus movimientos:**



Si ambos caminan igual de rápido, representa otra recta que muestre a Ana quieta sobre el pasillo móvil.

En el enunciado, la recta roja representa a Marcos y la azul, a Ana.

Si ambos caminan a la misma velocidad, la diferencia de alturas entre ambas rectas en cada punto la aporta el movimiento del pasillo móvil. Por tanto:

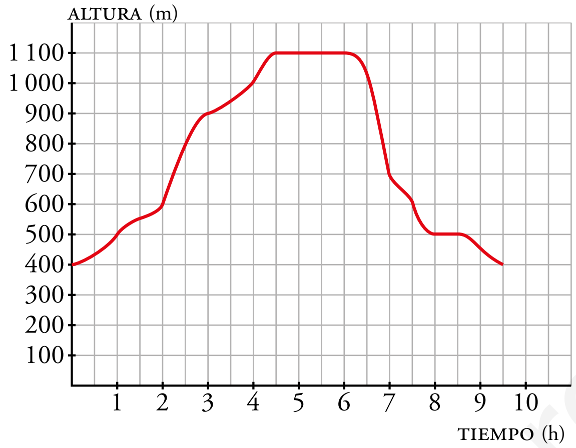


La recta verde representa a Ana quieta sobre el pasillo móvil.

AUTOEVALUACIÓN

Página 147

1 **Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión a cierta montaña:**



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?

c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?

d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

a) Intervienen las variables tiempo y altura. La variable tiempo utiliza un cuadradito para media hora; la variable altura, un cuadradito para 100 metros. El dominio de la función es 0 – 9,5.

b) La marcha ha durado 9 horas y media. Comienzan a 400 metros de altura. Alcanzan una altura máxima de 1 100 metros. Han parado a comer cuando llevaban 4 horas y media de camino, al llegar a la cima.

c) Suben más rápido entre las 2 y las 3 horas del comienzo. Bajan más rápido entre las 6 y las 7 horas.

d) Comienzan su marcha a 400 metros. En dos horas han ascendido hasta los 600 metros, y en ese momento comienzan a subir más rápido, y mantienen ese ritmo durante una hora, hasta llegar a los 900 metros de altura. Entonces disminuyen la velocidad y continúan su ascensión dos horas más hasta llegar a la cima, a 1 100 metros de altitud. Pasan allí dos horas. Inician su descenso a las 6 horas de travesía, lo hacen rápidamente la primera hora, hasta volver a los 700 metros, y andan una hora más a un ritmo más lento. Hacen una parada de media hora a los 500 metros y reanudan la marcha una hora y media más, descendiendo hasta los 400 metros.

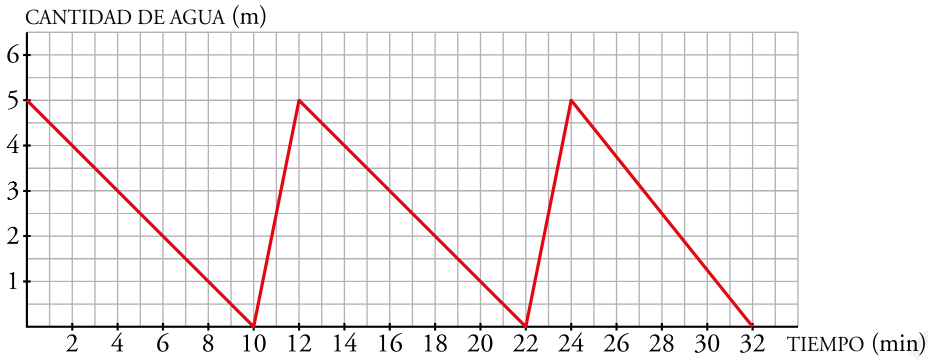
2 **Una cisterna contiene 5 L de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 min en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 min.**

a) Representa la función *tiempo-cantidad de agua*.

b) Explica si la función es periódica.

c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

a)

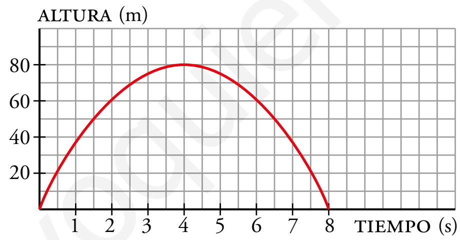


b) Es periódica, puesto que su comportamiento se va repitiendo en periodos de 12 minutos.

c) La cisterna está llena en los minutos 0, 12 y 24; y vacía en 10 y 22.

3 **Una de estas ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por una pelota que se lanza hacia arriba, y el tiempo, t. ¿Cuál de ellas es?**

Ⓐ $h = 8t - t^2$ Ⓑ $h = 40t - 5t^2$ Ⓒ $h = -4t^2 + 80t$



a) ¿Qué altura alcanza? ¿Cuánto tarda en caer?

b) Di la altura de la pelota a los 5 segundos:

— De forma aproximada, mirando la gráfica.

— Utilizando la expresión analítica.

Es la ecuación Ⓑ

a) Alcanza 80 m de altura y tarda 8 s en caer de nuevo hasta el suelo.

b) — Mirando la gráfica, la altura es, aproximadamente, de 75 metros.

— Utilizando la expresión analítica: $40 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 75$ m.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

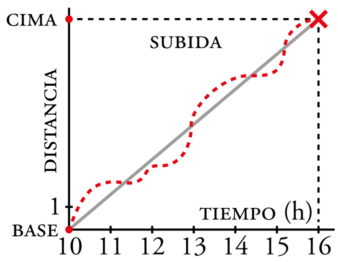
Página 147

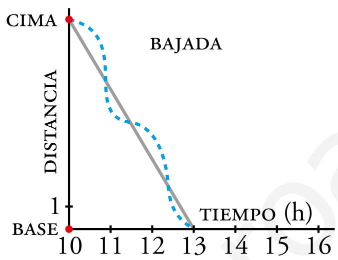
Subir y bajar

- **Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en el refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.**

¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?

Observa las gráficas de la derecha y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.

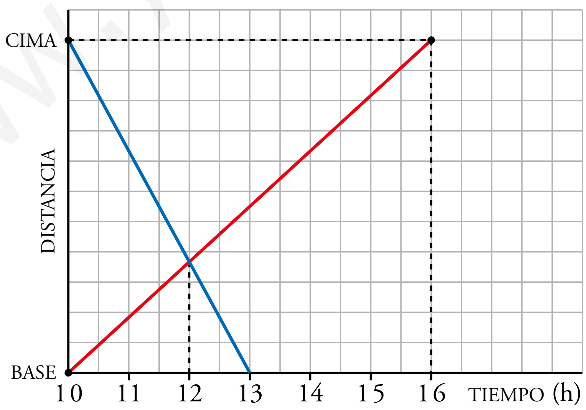




Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.



10 FUNCIONES LINEALES Y CUADRATICAS

1 FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD $y = mx$

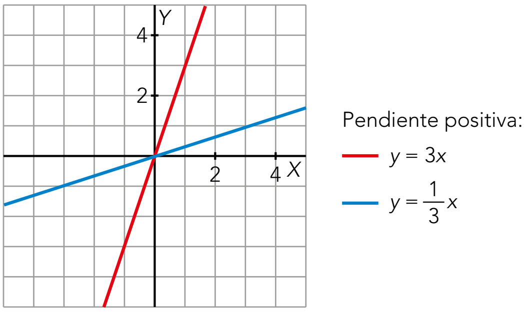
Página 149

1 **Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.**

Para que las rectas pasen por el origen, deben ser de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

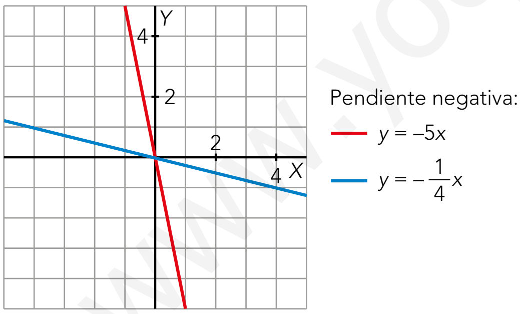
Ejemplos de rectas con pendiente positiva:

- $y = 3x$, con pendiente 3 e $y = \frac{1}{3}x$, con pendiente $\frac{1}{3}$.



Ejemplos de rectas con pendiente negativa:

- $y = -5x$, con pendiente -5 e $y = \frac{-1}{4}x$, con pendiente $\frac{-1}{4}$.



Página 150

2 **Representa las funciones siguientes:**

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$

d) $y = -2x$ **e)** $y = \frac{1}{3}x$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ **h)** $y = \frac{-3}{2}x$ **i)** $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

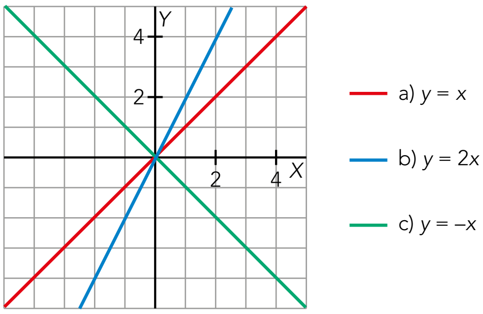
x	$y = x$
–3	–3
0	0
3	3

b)

x	$y = 2x$
–2	–4
0	0
2	4

c)

x	$y = -x$
–2	2
0	0
2	–2



d)

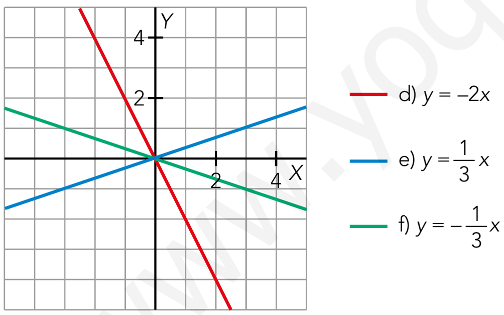
x	$y = -2x$
–1	2
0	0
1	–2

e)

x	$y = 1/3x$
–3	–1
0	0
3	1

f)

x	$y = -1/3\ x$
–3	1
0	0
3	–1



g)

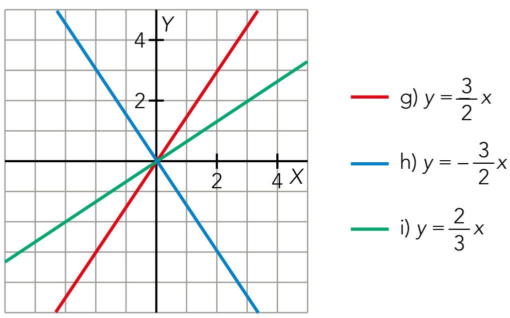
x	$y = 3/2x$
–2	–3
0	0
2	3

h)

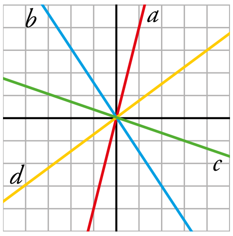
x	$y = -3/2x$
–2	3
0	0
2	–3

i)

x	$y = 2/3x$
–3	–2
0	0
3	2



3 **Relaciona cada recta con su ecuación:**



I) $y = 4x$

II) $y = \frac{3}{4}x$

III) $y = -\frac{3}{2}x$

IV) $y = -\frac{1}{3}x$

a) → I)

b) → III)

c) → IV)

d) → II)

2 ▶ FUNCIÓN LINEAL $y = mx + n$

Página 151

1 **Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:**

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = 3 - 2x$ **c)** $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ **e)** $y = -2$ **f)** $y = \frac{5x - 3}{2}$

Representamos las funciones:

a)

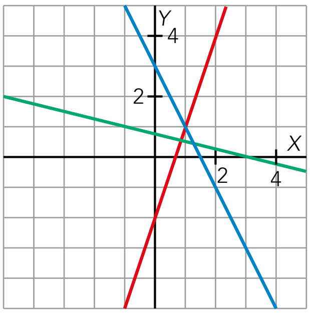
x	$y = 3x - 2$
–1	–5
0	–2
1	1

b)

x	$y = 3 - 2x$
–1	5
0	3
1	1

c)

x	$y = 3/4 - 1/4x$
–1	1
0	3/4
3	0



— a) $y = 3x - 2$

— b) $y = 3 - 2x$

— c) $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d)

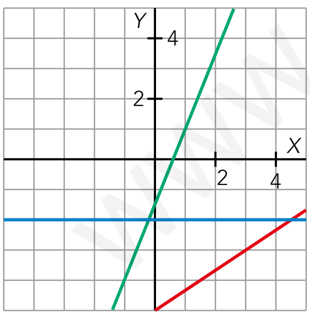
x	$y = 2/3x - 5$
0	–5
3	–3
6	–1

e)

x	$y = -2$
–2	–2
0	–2
2	–2

f)

x	$y = (5x - 3)/2$
–1	–4
0	–3/2
1	1

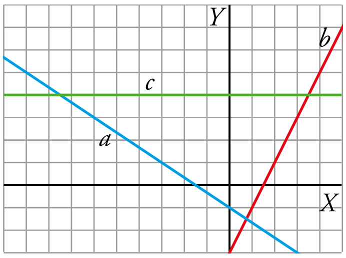


— d) $y = \frac{2}{3}x - 5$

— e) $y = -2$

— f) $y = \frac{5x - 3}{2}$

2 Escribe la ecuación de cada una de las rectas de la derecha:



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por (0, –1) y (3, –3):

$$\left.\begin{array}{l} m = -\dfrac{2}{3} \\ n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por (0, –3) y (2, 1):

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array}\right\} \rightarrow y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por (0, 4) y (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ n = 4 \end{array}\right\} \rightarrow y = 4$$

Página 152

3 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:**

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ **b)** $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

c) $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$ **d)** $P(0, 0)$, $m = -1$

e) $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$ **f)** $P(0, -2)$, $m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x - 4) \rightarrow y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

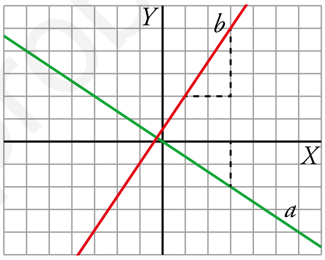
c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x + 0) \rightarrow y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x + 1) \rightarrow y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x + 0) \rightarrow y = -2$

4 **Escribe la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.**



Tomamos dos puntos con coordenadas enteras:

- Recta a:

  $P(0, 0)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  En lugar de (0, 0), tomamos $Q(3, -2)$:

  $Q(3, -2)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  Obtenemos la misma ecuación.

- Recta b:

  $R(1, 2)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 2 + \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow y = 2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

  En lugar de R(1, 2)), tomamos S(3, 5):

  $S(3, 5)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 5 + \frac{3}{2}(x - 3) \rightarrow y = 5 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

  Obtenemos la misma ecuación.

Página 153

5 **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:**

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ **b)** $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$

c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$ **d)** $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$

e) $P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$ **f)** $P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \dfrac{6-5}{-3-2} = -\dfrac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\dfrac{1}{5} \to y = 5 - \dfrac{1}{5}(x-2) \to y = \dfrac{27}{5} - \dfrac{1}{5}x$

b) $m = \dfrac{-1-(-4)}{-2-3} = -\dfrac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\dfrac{3}{5} \to y = -4 - \dfrac{3}{5}(x-3) \to y = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{5}x$

c) $m = \dfrac{5-0}{5-(-1)} = \dfrac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\dfrac{5}{6} \to y = 0 + \dfrac{5}{6}(x+1) \to y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{6}$

d) $m = \dfrac{4-1}{3-(-7)} = \dfrac{3}{10}$

Recta que pasa por $P(-7, 1)$ y tiene pendiente $\dfrac{3}{10} \to y = 1 + \dfrac{3}{10}(x+7) \to y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{31}{10}$

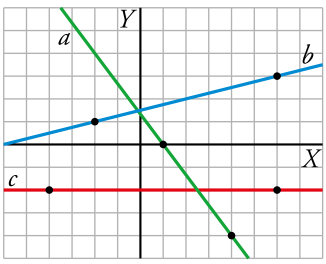
e) $m = \dfrac{1-1}{-2-3} = 0$

Recta que pasa por $P(3, 1)$ y tiene pendiente $0 \to y = 1 - 0(x-3) \to y = 1$

f) $m = \dfrac{5-(-2)}{2-2} = \dfrac{7}{0}$ $\to$ Es una recta vertical (pendiente infinita).

La ordenada de cualquier abscisa es 2 $\to x = 2$.

6 **Halla las ecuaciones de las rectas a, b y c. Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.**



- En la recta a:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{-4}{3} \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \to y = 0 + \left(\dfrac{-4}{3}\right)(x-1) \to y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3}x$$

- En la recta b:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \\ P(-2, 1) \end{array}\right\} \to y = 1 + \dfrac{1}{4}(x+2) \to y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$$

- En la recta c:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ P(-4, -2) \end{array}\right\} \to y = -2 + 0(x+4) \to y = -2$$

3 APLICACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL. PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS

Página 154

1 Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). ¿Qué distancia recorre en t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

2 Un robot marcha a 7 m/min. Lo pusimos en marcha hace 2 min. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

En 2 minutos recorre $d = 7 \cdot 2 = 14$ m.

Dentro de t min estará a una distancia $d = 14 + 7t$.

3 Un robot está a 40 m de nosotros y se nos acerca a 5 m/min. ¿A qué distancia estará dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que estará de nosotros, $d = 40 - 5t$.

4 A las 10:00 alquilamos una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. ¿Cuánto nos han de devolver si la llevamos de vuelta a las t horas de ese día?

Si llamamos D al dinero que han de devolvernos, $D = 100 - 5(t - 10)$.

4 ESTUDIO CONJUNTO DE DOS FUNCIONES LINEALES

Página 155

1 Un tren AVE ha salido a las 10 de la mañana de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías salió dos horas antes de nuestra ciudad y va a 50 km/h por una vía paralela a la del AVE.

a) Expresa mediante dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren al cabo de t horas.

b) Representa las dos rectas correspondientes a las funciones en unos ejes de coordenadas.

c) Indica en qué punto se cortan las dos rectas y di qué significa cada una de sus coordenadas.

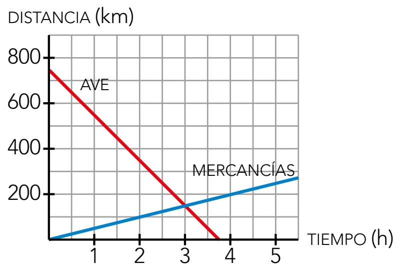
d) Calcula mediante un sistema de ecuaciones la hora a la que se cruzan los trenes y a qué distancia de nuestra ciudad se encuentran.

a) Si llamamos d a la distancia que hay desde nuestra ciudad a cada tren al cabo de t horas:

$d_{\text{AVE}} = 750 - 200t$

$d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t$

b)



c) Se cortan en el punto (3, 150), lo que significa que se cruzarán a las 3 horas, a 150 km de distancia de nuestra ciudad.

d) $\left.\begin{array}{l} d_{\text{AVE}} = 750 - 200t \\ d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t \end{array}\right\} \rightarrow 750 - 200t = 50t \rightarrow 750 = 250t \rightarrow t = 3$ horas

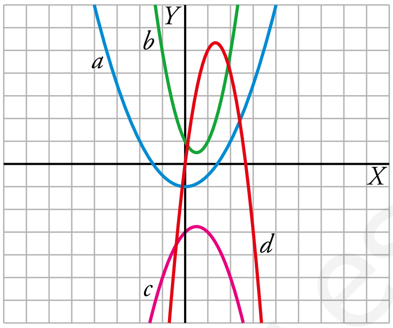
Para $t = 3$ horas, $d_{\text{AVE}} = d_{\text{MERCANCÍAS}} = 150$ km

Se encuentran a las 3 horas, a 150 km de nuestra ciudad.

5 PARÁBOLAS Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

Página 156

1 **Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:**



I) $y = 2x^2 - 2x + 1$

II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

IV) $y = -3x^2 + 8x$

I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

Página 157

2 Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

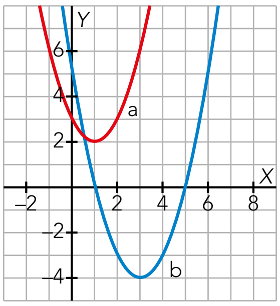
La parábola no corta al eje X.

x	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



3 **Dibuja estas funciones:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

Calculamos, en ambos casos, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$

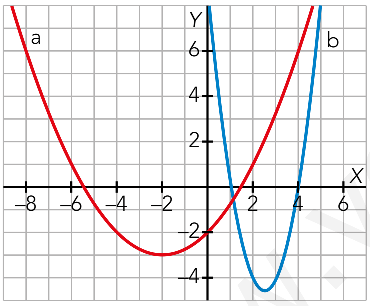
$$\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \rightarrow (-2 + 2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \rightarrow (-2 - 2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

x	–6	$-2-2\sqrt{3}$	–4	–2	0	$-2+2\sqrt{3}$	2
y	1	0	–2	–3	–2	0	1

b) $p = \dfrac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{2}$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow (4, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	8	0	–4	$-\frac{9}{2}$	–4	0	8



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 158

Practica

Funciones lineales. Rectas

1 **Asocia cada recta con su ecuación:**

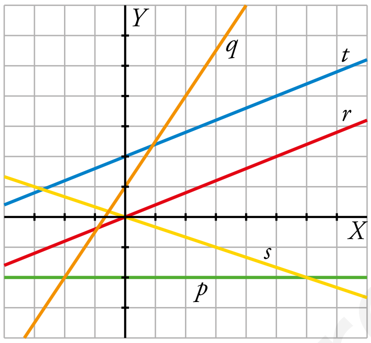
a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{3}{2}x + 1$

c) $y = \frac{2}{5}x$

d) $y = \frac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$



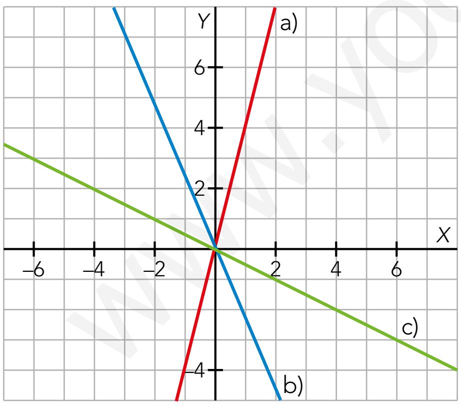
a) s b) q c) r d) t e) p

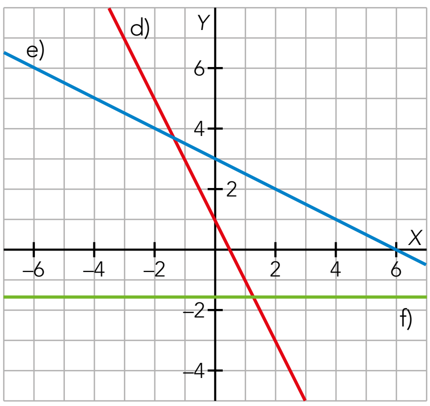
2 **Representa las rectas siguientes:**

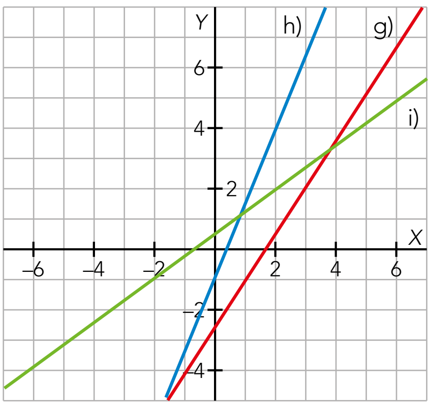
a) $y = 4x$ **b)** $y = -2{,}4x$ **c)** $y = -\frac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$ **e)** $y = -\frac{x}{2} + 3$ **f)** $y = -\frac{8}{5}$

g) $y = \frac{3x - 5}{2}$ **h)** $y = 2{,}5x - 1$ **i)** $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$







3 **Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?**

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x - 3$ **c)** $2x - y + 1 = 0$ **d)** $4x - 2y + 5 = 0$

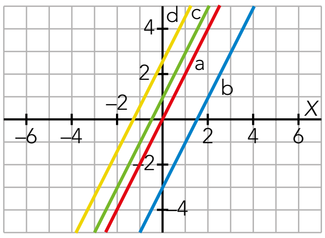
Las pendientes de las rectas son:

a) $m = 2$

b) $m = 2$

c) $2x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow m = 2$

d) $4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \dfrac{5}{2} \rightarrow m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

4 **Indica la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas de los ejercicios 1 y 2. ¿Cuáles de ellas corresponden a funciones de proporcionalidad?**

1. a) $m = -\dfrac{1}{3};\ n = 0$ 1. b) $m = \dfrac{3}{2};\ n = 1$

1. c) $m = \dfrac{2}{5};\ n = 0$ 1. d) $m = \dfrac{2}{5};\ n = 2$

1. e) $m = 0;\ n = -2$ 2. a) $m = 4;\ n = 0$

2. b) $m = -2{,}4;\ n = 0$ 2. c) $m = -\dfrac{1}{2};\ n = 0$

2. d) $m = -2;\ n = 0$ 2. e) $m = -\dfrac{1}{2};\ n = 3$

2. f) $m = 0;\ n = -\dfrac{8}{5}$ 2. g) $m = \dfrac{3}{2};\ n = -\dfrac{5}{2}$

2. h) $m = 2{,}5;\ n = -1$ 2. i) $m = \dfrac{3}{4};\ n = \dfrac{1}{2}$

Son funciones de proporcionalidad 1. a); 1. c); 2. a); 2. b); 2. c); 2. d).

5 **Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:**

a) $P(-2, 5),\ m = 3$ **b)** $P(0, -5),\ m = -2$

c) $P(0, 0),\ m = \dfrac{3}{2}$ **d)** $P(-2, -4),\ m = -\dfrac{2}{3}$

a) $y = 5 + 3(x + 2)$ b) $y = -5 - 2(x - 0) \rightarrow y = -2x - 5$

c) $y = 0 + \dfrac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x$ d) $y = -4 - \dfrac{2}{3}(x + 2)$

6 **Escribe las pendientes de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:**

a) $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$

b) $A(0, 0)$ y $B(1, -2)$

c) $A(1, 3)$ y $B(5, 3)$

d) $A(0, 2)$ y $B(2, 0)$

e) $A(-5, -2)$ y $B(-1, 3)$

f) $A(3, -2)$ y $B(0, -1)$

g) $A\left(\frac{4}{5}, 1\right)$ y $B\left(3, -\frac{2}{3}\right)$

h) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right)$

a) $A(0, 0);\ B(1, 1);\ \to\ m = \frac{1-0}{1-0} = 1$

b) $A(0, 0);\ B(1, -2);\ \to\ m = \frac{-2-0}{1-0} = -2$

c) $A(1, 3);\ B(5, 3);\ \to\ m = \frac{3-3}{5-1} = 0$

d) $A(0, 2);\ B(2, 0);\ \to\ m = \frac{0-2}{2-0} = -1$

e) $A(-5, -2);\ B(-1, 3);\ \to\ m = \frac{3-(-2)}{-1-(-5)} = \frac{5}{4}$

f) $A(3, -2);\ B(0, -1);\ \to\ m = \frac{-1-(-2)}{0-3} = \frac{-1}{3}$

g) $A\left(\frac{4}{5}, 1\right);\ B\left(3, -\frac{2}{3}\right);\ \to\ m = \dfrac{-\frac{2}{3}-1}{3-\frac{4}{5}} = \dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{11}{5}} = \frac{-25}{33}$

h) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right);\ B\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right);\ \to\ m = \dfrac{-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{14}{15}}{\frac{11}{6}} = \frac{-14 \cdot 6}{15 \cdot 11} = \frac{28}{55}$

7 **Obtén la ecuación de la recta que pasa por** A **y** B**.**

a) $A(2, -1),\ B(3, 4)$

b) $A(-5, 2),\ B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right),\ B\left(1, \frac{2}{3}\right)$

d) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right),\ B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) $m = \frac{4-(-1)}{3-2} = 5$

$y = -1 + 5(x-2)$

b) $m = \frac{1-2}{-3-(-5)} = \frac{-1}{2}$

$y = 2 - \frac{1}{2}(x+5)$

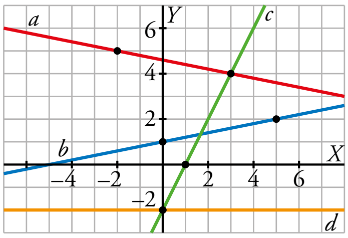
c) $m = \dfrac{\frac{2}{3}-2}{1-\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \frac{8}{3}$

$y = 2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

d) $m = \dfrac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{10}$

$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

8 **Escribe la ecuación de cada una de estas rectas. Ayúdate de los puntos representados:**



Utilizamos los puntos marcados para hallar la pendiente de cada recta.

- La recta a tiene pendiente $m = \frac{-1}{5}$ y pasa por el punto (3, 4).

  Su ecuación es $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3)$.

- La recta b tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$ y pasa por el punto (0, 1).

  Su ecuación es $y = \frac{1}{5}x + 1$.

- La recta c tiene pendiente $m = \frac{4}{2} = 2$ y pasa por (0, –2).

  Su ecuación es $y = 2x - 2$.

- La ecuación de la recta d es $y = -2$.

9 **¿Cuáles de las funciones de la actividad anterior son crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.**

Las funciones b y c son crecientes, y tienen pendiente positiva.

La función a es decreciente, y tiene pendiente negativa.

La función d es constante, y su pendiente es 0.

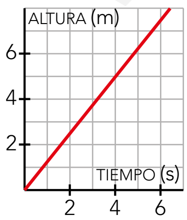
10 **Un grifo llena un depósito de 5 m de alto. La altura del agua varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).**

a) Represéntala.

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a) $a(t) = \frac{5}{4}t$. Es una función lineal de pendiente $\frac{5}{4}$. Pasa por los puntos (0, 0) y (4, 5).



Si la altura es 5 m, el dominio de la función es el tramo 0 – 4.

b) Sí, se trata de una función de proporcionalidad.

c) La pendiente es $\frac{5}{4}$. Significa que por cada cuatro segundos que pasen, la altura del depósito aumenta 5 metros.

11 **Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.**

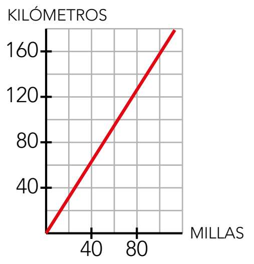
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5	10	20	50	100
KILÓMETROS	1,6	3,2	4,8	6,4	8	16	32	80	160

b) La ecuación es $y = 1{,}6x$



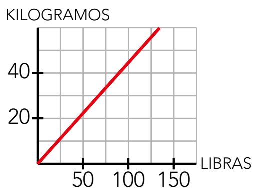
12 **Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:**

a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, *y*, que equivalen a *x* libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

a) x: libras; y: kilos $\rightarrow$ $y = \dfrac{45}{100}x$

b) La gráfica pasa por (0, 0) y por (100, 45)



13 **Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:**

t (min)	0	1	2	3	5
V (*L*)	20	18	16	14	10

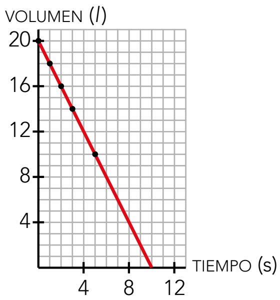
a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

d) ¿Es una función de proporcionalidad?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{-2}{1} = -2$ y su ordenada en el origen es $n = 20$.

La ecuación de la función es $y = -2x + 20$. Su dominio de definición es el tramo 0 – 10.

c) La pendiente es $m = -2$ y significa que por cada minuto que está el desagüe abierto, el volumen de agua que hay en el depósito disminuye 2 litros.

d) No, no es una función de proporcionalidad. Es una función afín.

Página 159

14 **Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:**

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

a) Escribe la ecuación que relaciona la longitud de la sombra con la altura del poste en ese instante.

b) ¿Qué longitud tiene la sombra de un poste de 3,5 m de altura? ¿Cuál es la altura de un poste que arroja una sombra de 3 m?

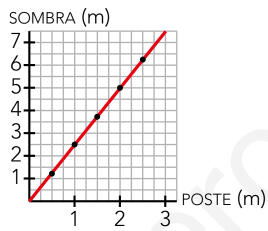
c) Representa la función *altura del poste* → *longitud de la sombra*.

a) Es una función de proporcionalidad de constante 2,5. Por tanto, la ecuación pedida es $y = 2{,}5x$.

b) • Si $x = 3{,}5$ m → $y = 2{,}5 \cdot 3{,}5 = 8{,}75$ → 8,75 m

• Si $y = 3$ m → $3 = 2{,}5 \cdot x$ → $x = 1{,}2$ → 1,2 m

c) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



15 **Mamen anda a una velocidad de 3 km/h y su casa se encuentra a 10 km de la piscina. Asocia cada uno de estos enunciados con una de las ecuaciones de más abajo:**

a) Si empieza a andar ahora, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

b) Si empezó a andar hace 3 h, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

c) Si sale de su casa para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

d) Si salió desde su casa a las 10:00 h para bañarse, ¿a qué distancia se encontrará de la piscina a las *t* horas?

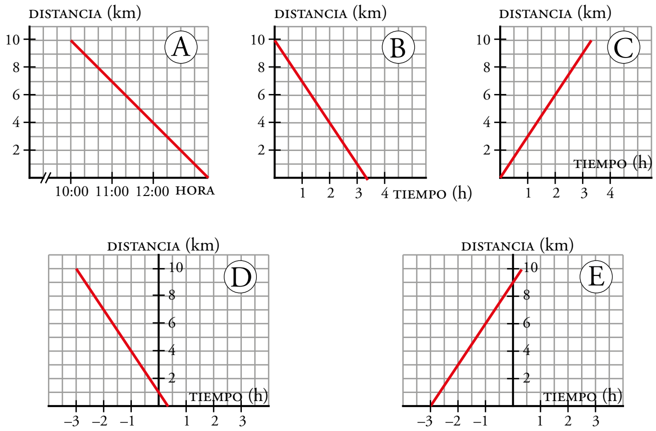
e) Si salió de su casa hace 3 horas para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

$d = 3t + 3$	$d = 10 + 3(t - 10)$	$d = 3(t + 3)$
$d = 3(t - 3)$	$d = 10 - 3(t - 10)$	$d = 10 - 3t$
$d = 3t$	$d = 10 - 3(t + 3)$	$d = 10 + 3(t + 3)$

a) $d = 3t$ b) $d = 3(t + 3)$ c) $d = 10 - 3t$

d) $d = 10 - 3(t - 10)$ e) $d = 10 - 3(t + 3)$

16 **Indica cuál es la gráfica correspondiente a cada uno de los enunciados de la actividad anterior.**



a) → Ⓒ b) → Ⓔ c) → Ⓑ

d) → Ⓐ b) → Ⓓ

Funciones cuadráticas. Parábolas

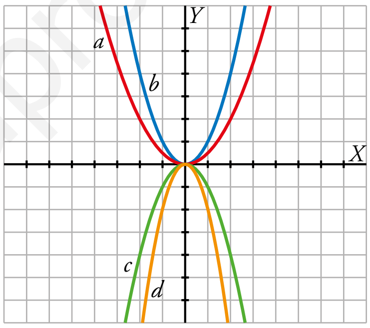
17 **Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:**

I) $y = x^2$

II) $y = -x^2$

III) $y = -2x^2$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



I) b II) c III) d IV) a

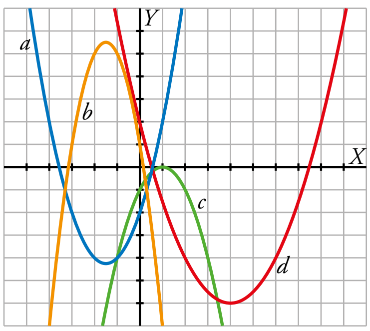
18 **Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:**

I) $y = x^2 + 3x - 2$

II) $y = -x^2 + 2x - 1$

III) $y = -2x^2 - 6x + 1$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



I) a II) c III) b IV) d

19 **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo:**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$ **c)** $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 5x^2 + 20x + 20$ **e)** $y = -\frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$

a) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0;\ f(0) = -5;\ V(0, -5).$

Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

b) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0;\ f(0) = 3;\ V(0, 3).$

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

c) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1;\ f(-1) = 5;\ V(-1,-5).$

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

d) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot 5} = -2;\ f(-2) = 0;\ V(-2, 0).$

Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

e) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot \frac{-5}{2}} = 1;\ f(1) = 1;\ V(1, 1).$

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

20 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

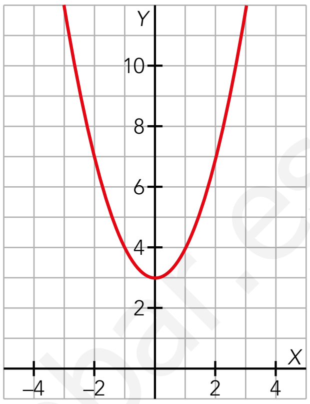
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4$ **c)** $y = 2x^2$ **d)** $y = 0,5x^2$

a) $y = x^2 + 3$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

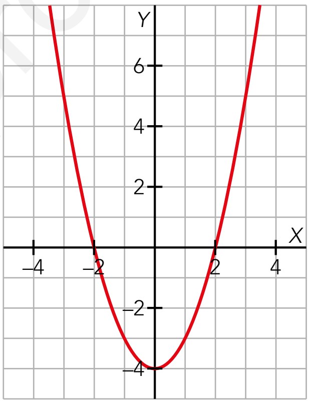
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 3).



b) $y = x^2 - 4$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12

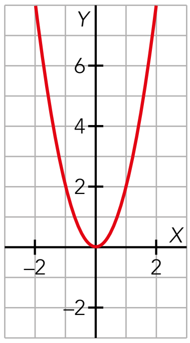
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, –4).



c) $y = 2x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

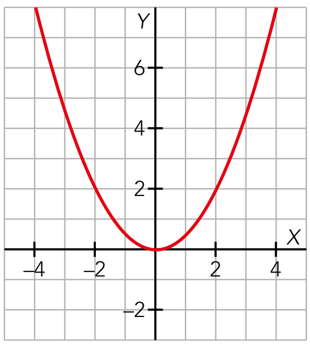
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



d) $y = 0,5x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



21 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 4)^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ **c)** $y = -3x^2 + 6x - 3$ **d)** $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x + 4)^2 \rightarrow y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-8}{2} = -4$

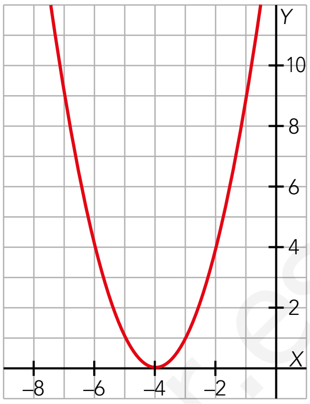
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 0 + 16 \rightarrow (0, 16)$

$y = 0 \rightarrow (x + 4)^2 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (-4, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -3$

Calculamos los cortes con los ejes:

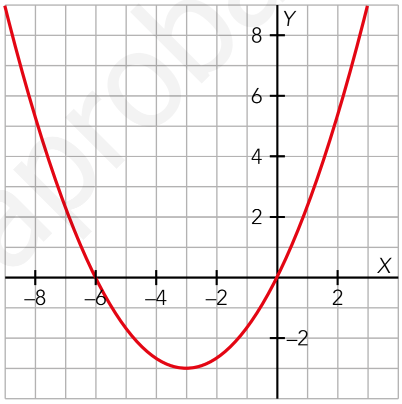
$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -6 \rightarrow (-6, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–9	–6	–4	–3	–2	0	3
y	9	0	–2,667	–3	–2,667	0	9



c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

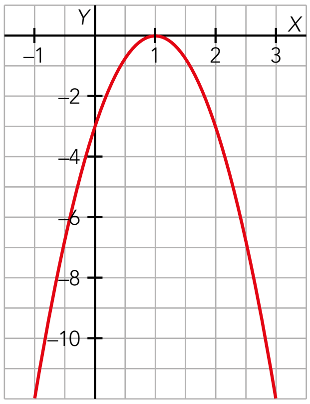
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$y = 0 \rightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow -3(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–1	0	1	2	3
y	–12	–3	0	–3	–12



d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

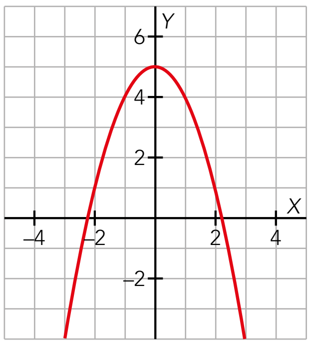
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \rightarrow (-\sqrt{5}, 0) \\ x = \sqrt{5} \rightarrow (\sqrt{5}, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

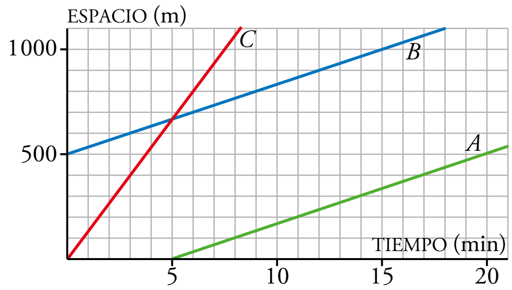
x	–3	$-\sqrt{5}$	–2	–1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
y	–4	0	1	4	5	4	1	0	–4



Página 160

Resuelve problemas

22 **Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:**



a) ¿Qué velocidad, en m/min, lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

a) La velocidad se corresponde con la pendiente de cada función.

A lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

B lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

C lleva una velocidad de $\frac{400}{3} \approx 133,3$ m/min

b) $A \rightarrow y = 500 + \frac{100}{3}(x - 20)$

$B \rightarrow y = \frac{100}{3}x + 500$

$C \rightarrow y = \frac{400}{3}x$

23 **En cada uno de los siguientes enunciados, halla la ecuación y representa la función lineal en unos ejes coordenados:**

a) Antonio compra naranjas a 3 €/kg. ¿Cuánto le costarán p kg de naranjas?

b) Sonia sale de viaje a las 8:00 h a 120 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido a las t horas?

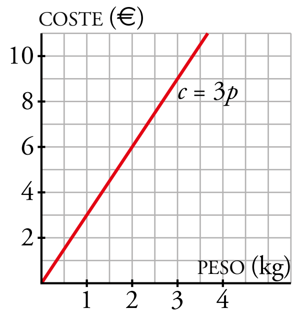
c) A Juan le cobran 5 € por alquilar unos patines, más 1 € por cada hora que esté patinando. ¿Cuánto le cobrarán por t horas de patinaje?

d) Tengo 25 € y el taxi me ha cobrado 2,50 € por la bajada de bandera más 1,20 € por kilómetro recorrido. ¿Cuánto dinero me quedará si el taxi me lleva a d km de distancia?

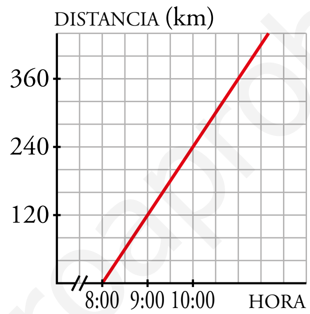
e) A las 12:00 he sacado un refresco a 10 °C de la nevera. Si cada minuto se calienta 1,5 °C, ¿a qué temperatura estará a las t horas?

f) Hace 10 min he abierto el grifo que llena la bañera. Si el nivel sube a razón de 2 cm de altura por minuto y la bañera tiene 40 cm de profundidad, ¿cuántos centímetros faltarán para que rebose el agua dentro de t minutos?

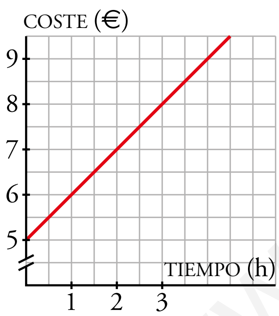
a) $c = 3p$



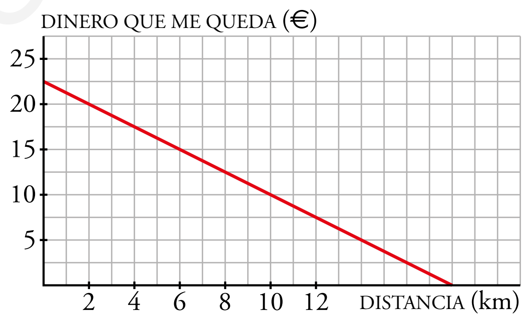
b) $d = 120(t - 8) \rightarrow d = 120t - 960$



c) $c = 5 + t$

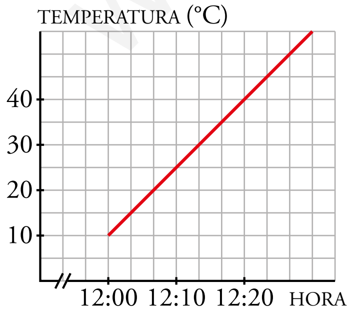


d) $D = 25 - (2{,}50 + 1{,}20d) \rightarrow D = -1{,}2d + 22{,}5$



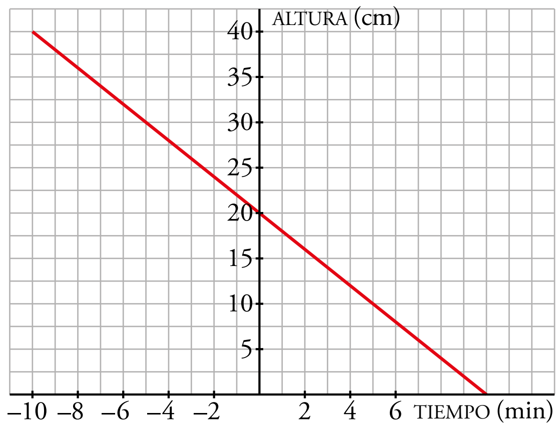
e) $g = 10 + 1{,}5 \cdot 60(t - 12) \rightarrow$

$\rightarrow g = 10 + 90t - 1\,080 \rightarrow g = 90t - 1\,070$



f) $n = 40 - 2(t + 10) \rightarrow n = 40 - 2t - 20 \rightarrow$

$\rightarrow n = -2t + 20$

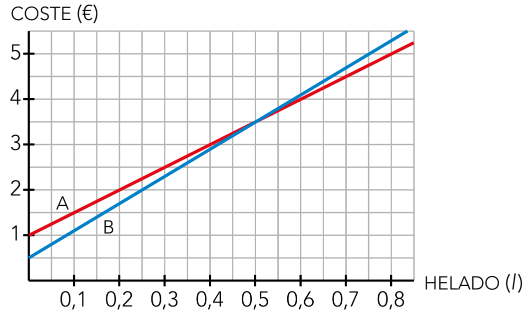


24 En una heladería A venden el helado a 5 € el litro, y cobran 1 € por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0,50 € por un envase y 6 € por cada litro de helado.

a) Representa la función *litros de helado - coste* para cada heladería y escribe sus ecuaciones.

b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compremos.

a)



Si y es el coste del helado, en euros, y x es la cantidad de helado, en litros:

Heladería A $\rightarrow$ $y = 1 + 5x$

Heladería B $\rightarrow$ $y = 0,5 + 6x$

b) Si compramos menos de medio litro de helado, es más barato comprar en la heladería B. Si compramos más de medio litro, la heladería A es la mejor opción.

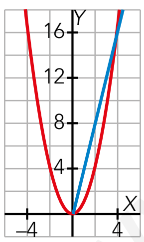
25 a) ¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área?

b) Dibuja ambas funciones.

a) El perímetro, y, en función del lado, x, viene dado por $y = 4x$.

El área en función del lado viene dada por $y = x^2$

b)



26 **La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 ºC, y en la Fahrenheit es 32 ºF. La ebullición del agua es 100 ºC, que equivale a 212 ºF.**

a) Encuentra y representa la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas.

b) Pasa a grados Fahrenheit 25 ºC; 36,5 ºC y 10 ºC.

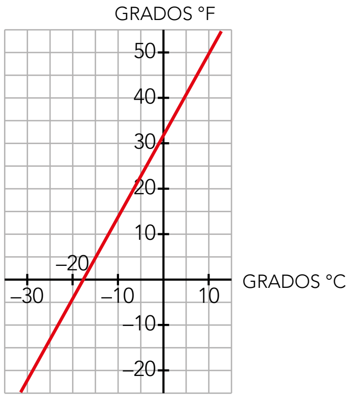
c) Pasa a grados centígrados 86 ºF y 63,5 ºF.

GRADOS °C	0	100
GRADOS °F	32	212

a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 32 + 1,8(x - 0) \rightarrow y = 1,8x + 32$



b) $y = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77$ °F; 25 °C $\Leftrightarrow$ 77 °F

$y = 1,8 \cdot 36,5 + 32 = 97,7$ °F; 36,5 °C $\Leftrightarrow$ 97,7 °F

$y = 1,8 \cdot 10 + 32 = 50$ °F; 10 °C $\Leftrightarrow$ 50 °F

c) $86 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{86 - 32}{1,8} = 30$ °C; 86 °F $\Leftrightarrow$ 30 °C

$63,5 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{63,5 - 32}{1,8} = 17,5$ °C; 63,5 °F $\Leftrightarrow$ 17,5 °C

27 **La altura, *a*, a la que se encuentra en cada instante, *t*, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba es $a = 20t - 5t^2$.**

a) Representa gráficamente la función.

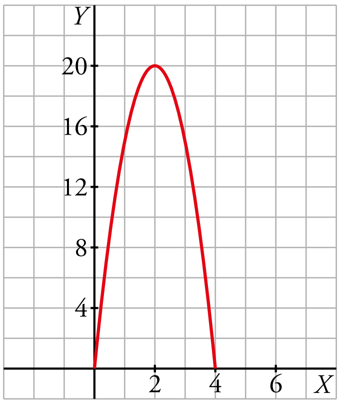
b) Di cuál es el dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento toca la piedra el suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a)



b) El dominio de definición es el intervalo 0-4, incluyendo los extremos.

c) Alcanza su altura máxima a los 2 s de ser lanzada, llegando a los 20 m de altura.

d) Toca el suelo a los 4 s de haber sido lanzada.

e) En el intervalo 1-3, sin tener en cuenta los extremos, ya que se pide una altura superior, no igual.

28 **a) Resuelve el sistema formado por las ecuaciones $y = x^2 - 5x + 2$ e $y = 5x - 23$, y comprueba que tiene una única solución, (5, 2). Represéntalas y observa que la recta y la parábola son tangentes en el punto (5, 2).**

b) Averigua si alguna de estas rectas es tangente a la parábola anterior:

i) $y = x - 1$ ii) $2x + y = 4$ iii) $y = -3$

iv) $y = -x - 2$ v) $x + y = -8$ vi) $x = -3y$

a) Parábola: $y = x^2 - 5x + 2$. Recta: $y = 5x - 23$.

$x^2 - 5x + 2 = 5x - 23 \rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$

$$x_0 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$$

Si $x = 5$, $y = 5 \cdot 5 - 23 = 25 - 23 \rightarrow y = 2$

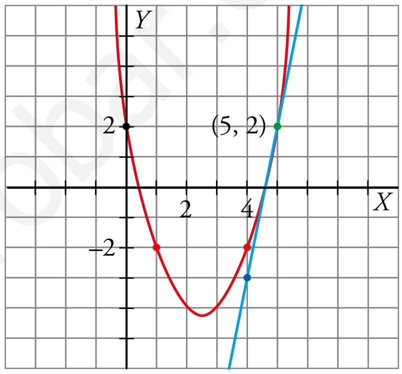
El único punto de corte de la recta y la parábola es (5, 2)

- La recta pasa por (5, 2) y (4, –3)
- Calculamos el vértice de la parábola y algunos puntos cercanos:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \qquad y_0 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 2 = -\frac{17}{4}$$

El vértice está en (2, 5; –4, 25)

x	0	1	2	3	4	5
y	2	–2	–4	–4	–2	2



b) i) $y = x - 1$ pasa por (0, –1) y (1, 0) $\rightarrow$ No es tangente.

ii) $2x + y = 4$ pasa por (0, 4) y (1, 2) $\rightarrow$ No es tangente.

iii) $y = -3$ pasa por (0, –3) y (1, –3) $\rightarrow$ No es tangente.

iv) $x^2 - 5x + 2 = -x - 2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -4 \rightarrow$ Sí es tangente en (2, –4).

v) $x + y = -8$ pasa por (0, –8) y (–1, –7) $\rightarrow$ No es tangente.

vi) $x = -3y$ pasa por (0, 0) y (–3, 1) $\rightarrow$ No es tangente.

29 Los gastos anuales, en euros, que una empresa tiene por la fabricación de x ordenadores son:

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

Y los ingresos, también en euros, que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que los ingresos superen a los gastos y haya beneficios?

$G(x) = 20\,000 + 250x$

$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$

Veamos los puntos de corte de ambas funciones:

$20\,000 + 250x = 600x - 0{,}1x^2 \rightarrow 0{,}1x^2 - 350x + 20\,000 = 0$

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{122\,500 - 8\,000}}{0{,}2} = \frac{350 \pm 338{,}38}{0{,}2} \rightarrow \begin{cases} x = 58{,}1 \\ x = 3\,441{,}9 \end{cases}$$

Ahora comprobemos en qué tramos los ingresos están por encima de los gastos:

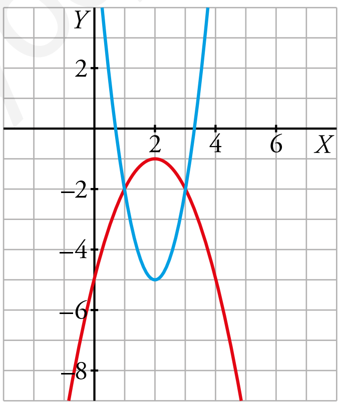
- Si $x < 58{,}1 \rightarrow G(x) > I(x)$
- Si $58{,}1 < x < 3\,441{,}9 \rightarrow G(x) < I(x)$
- Si $x > 3\,441{,}9 \rightarrow G(x) > I(x)$

Para que los ingresos superen a los gastos, es decir, para que haya beneficios, deben fabricarse entre 59 y 3 441 ordenadores.

30 Dibuja las parábolas cuyas ecuaciones son:

$$y = 3x^2 - 12x + 7 \qquad y = -x^2 + 4x - 5$$

Busca los puntos de corte mediante un sistema de ecuaciones y comprueba que corresponden a los hallados gráficamente.



$$\left.\begin{aligned} y &= 3x^2 - 12x + 7 \\ y &= -x^2 + 4x - 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow 3x^2 - 12x + 7 = -x^2 + 4x - 5 \rightarrow 4x^2 - 16x + 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = -2 \\ x = 3 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN

Página 161

1 **¿Asocia cada una de estas funciones lineales con su ecuación y escribe su pendiente:**

a) $y = 3x - 4$

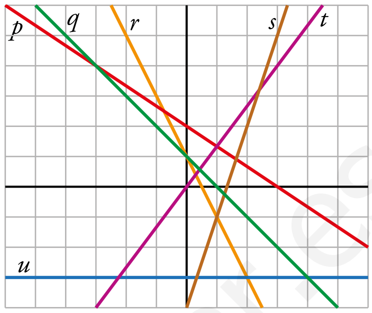
b) $y = -2x + 1$

c) $y = (4/3)x$

d) $y = -2/3x + 2$

e) $y = -3$

f) $y = -x + 1$



a) Recta s, $m = 3$ b) Recta r, $m = -2$ c) Recta t, $m = 4/3$

d) Recta p, $m = -2/3$ e) Recta u, $m = 0$ f) Recta q, $m = -1$

2 **Representa estas funciones lineales y escribe la ecuación de las tres últimas:**

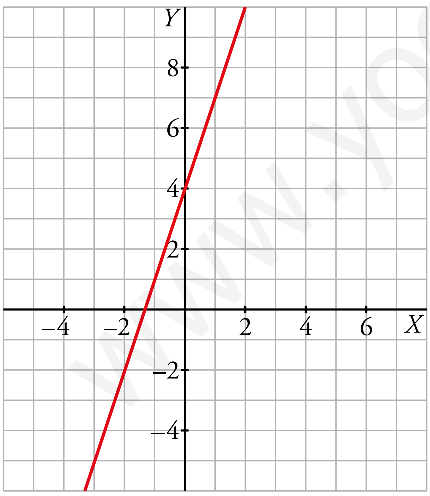
a) $y = 3x + 4$ **b)** $3x + 2y = 5$

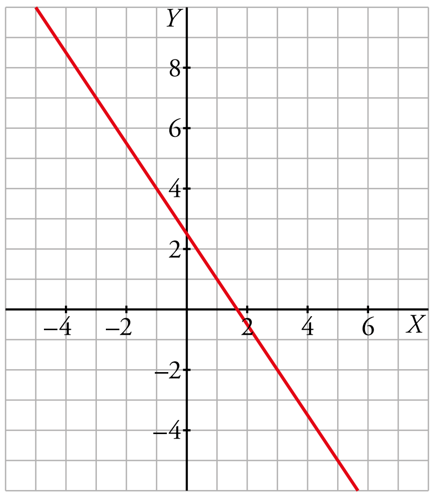
c) Recta de pendiente 1/4 que pasa por (3, 0).

d) Recta que pasa por los puntos (4, 1) y (–2, 4).

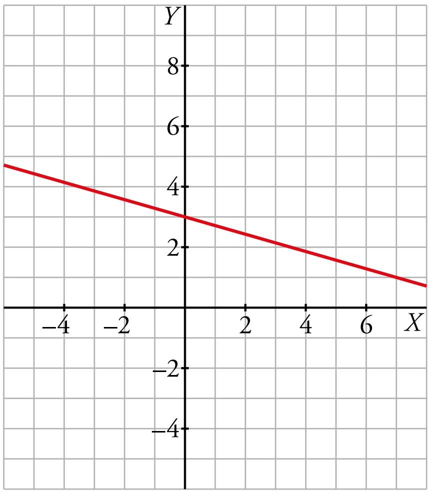
e) Función de proporcionalidad que pasa por (4, –3).

a) $y = 3x + 4$ b) $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$

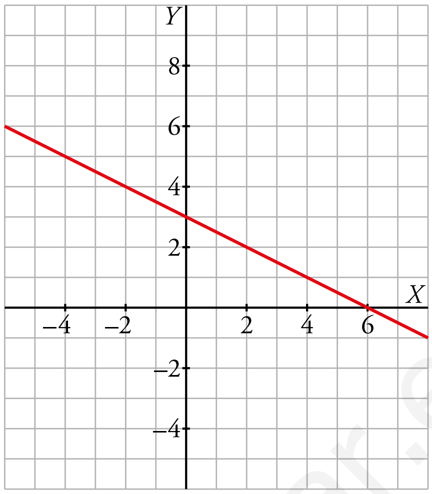




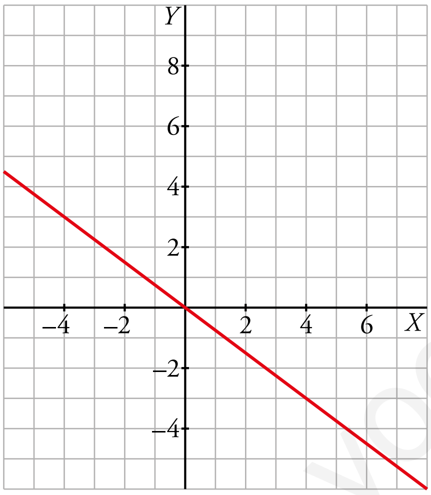
c) $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$



d) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3}{-6} = -\dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$



e) La función pasa por (0, 0). $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-3}{4}$; $y = -\dfrac{3}{4}x$



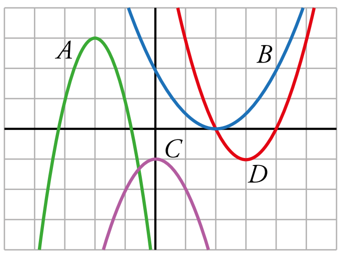
3 **Asocia cada ecuación con su parábola:**

$\boldsymbol{y = -x^2 - 1}$

$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2}$

$\boldsymbol{y = -2x^2 - 8x - 5}$

$\boldsymbol{y = x^2 - 6x + 8}$



A $\rightarrow$ $y = -2x^2 - 8x - 5$

B $\rightarrow$ $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

C $\rightarrow$ $y = -x^2 - 1$

D $\rightarrow$ $y = x^2 - 6x + 8$

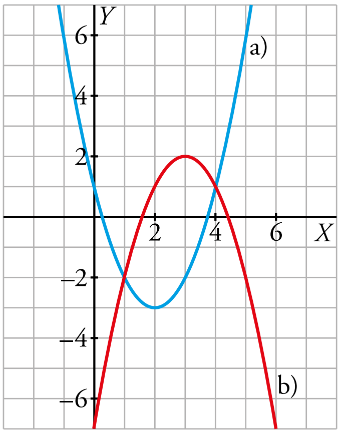
4 **Representa estas parábolas:**

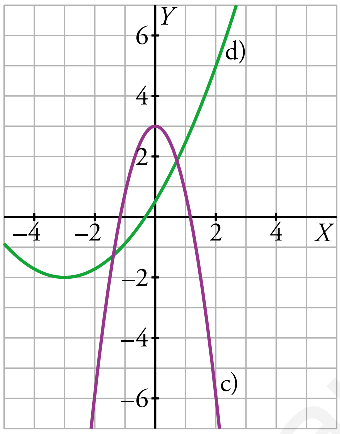
a) $y = x^2 - 4x + 1$

b) $y = -x^2 + 6x - 7$

c) $y = -2x^2 + 3$

d) $y = (1/3)x^2 + 2x + 1$





5 **Hoy hay 20 °C, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura desciende, aproximadamente, 6 °C por cada kilómetro de ascensión.**

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km? ¿Cuánto habremos ascendido si estamos a 11 °C?

b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

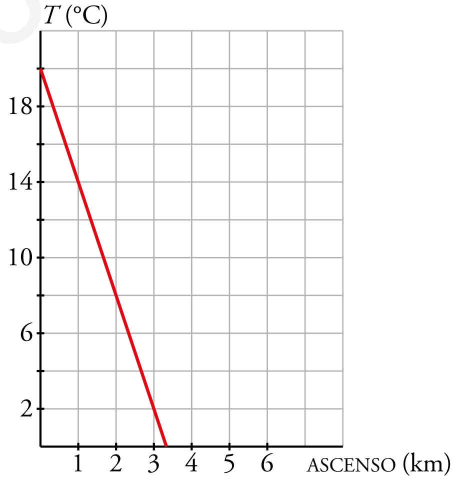
a) $20 - 6 \cdot 3 = 2°$

Si estamos a 11 °C habremos ascendido 1,5 km.

b) Pasa por (0, 20) y (3, 2).

$$m = \frac{2 - 20}{3 - 0} = -3$$

$y = 20 - 3x$



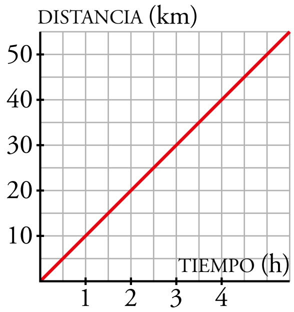
6 **Halla la ecuación para cada uno de estos enunciados y representa las funciones correspondientes:**

a) Begoña empieza ahora a correr a 10 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

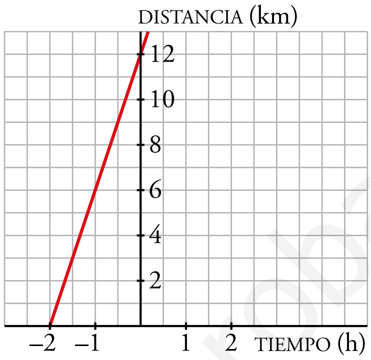
b) Andrés salió de casa hace dos horas a 6 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

c) Mariajo sale a 4 km/h desde su casa hacia la mía, que está a 18 km. ¿A qué distancia se encontrará de mi casa dentro de *t* horas?

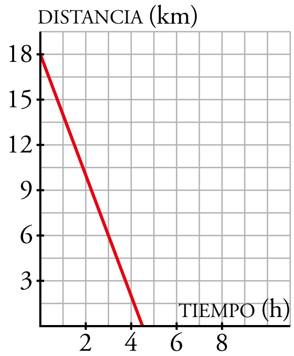
a) $d = 10t$



b) $d = 6(t + 2) \rightarrow d = 6t + 12$



c) $d = 18 - 4t$



7 **Hace dos horas, Bárbara salió en bici de su casa hacia la de Víctor a 15 km/h. Víctor sale ahora andando a 6 km/h en su busca. Sabiendo que viven a 58 km y tomando como origen cuando salió Víctor:**

a) Expresa mediante dos funciones la distancia de cada uno a casa de Víctor.

b) Representa, en unos ejes coordenados, las dos rectas correspondientes a las funciones. Indica el punto de corte de ambas rectas y lo que representa.

c) Sabiendo que Bárbara salió de su casa a las 8:00 a.m., ¿a qué hora y a qué distancia de la casa de Bárbara se encuentran?

a) Llamamos d a la distancia de cada uno a casa de Víctor.

Bárbara: $d = 28 - 15 \cdot t$

Cuando sale Víctor, Bárbara lleva 2 h moviéndose a 15 km/h, es decir, ha hecho 30 km y ya está a 28 km de la casa de Víctor.

Víctor: $d = 6 \cdot t$

b) Calculamos el punto de corte:

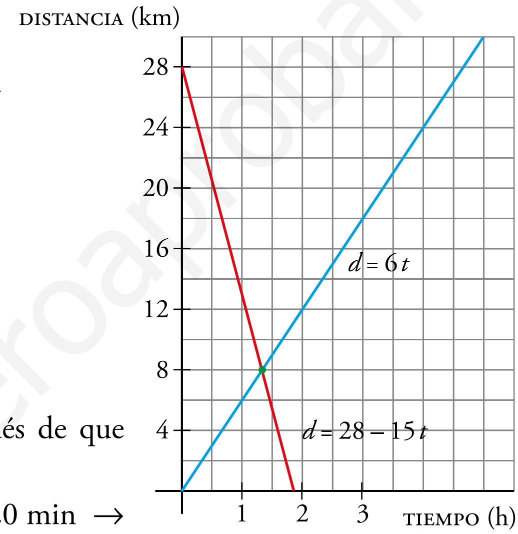
$$\left.\begin{array}{l} d = 28 - 15t \\ d = 6t \end{array}\right\} \to 28 - 15t = 6t \to 28 = 21t \to$$

$$\to t = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} \text{ h}$$

$$d = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8 \text{ km}$$

Punto de corte: $\left(\frac{4}{3}, 8\right)$

Significa que se encuentran 1 h 20 min después de que salga Víctor a 8 km de su casa.



c) Sale a las 8:00 am, se mueve dos horas más 1 h 20 min $\to$ $\to$ 11:20 am.

Lleva 30 km y hace otros 8 km $\to$ 38 km.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Página 161

¿Cuál es cuál?

- **Cada gráfica representa dos vehículos que van a velocidad constante. Así, la función que relaciona la distancia y el tiempo, en cada vehículo, es una recta. Asocia cada enunciado con una gráfica:**

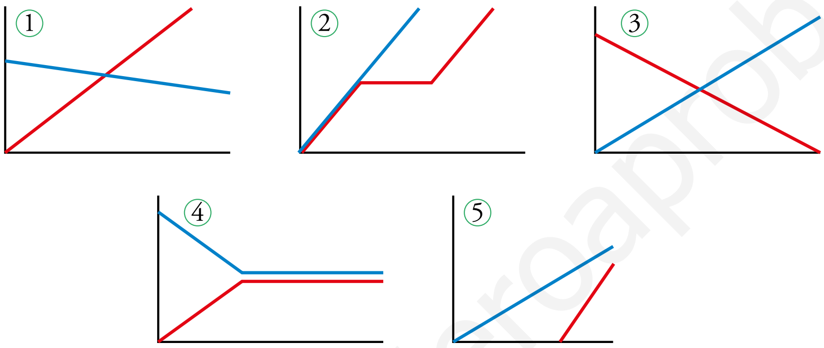
  Ⓐ **Un coche partió y una moto salió en su persecución.**

  Ⓑ **Un coche va, otro viene, y chocan.**

  Ⓒ **Un coche va, un camión viene, y se cruzan.**

  Ⓓ **Un coche se acerca y otro se aleja.**

  Ⓔ **Dos autobuses salen juntos y uno de ellos hace un descanso.**



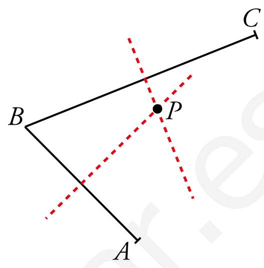
A ↔ 5 B ↔ 4 C ↔ 1 D ↔ 3 E ↔ 2

11 ELEMENTOS DE GEOMETRÍA PLANA

1 DOS RECTAS IMPORTANTES

Página 165

1 **Dibuja dos segmentos concatenados, AB y BC. Traza sus mediatrices y llama P al punto en que se cortan.**

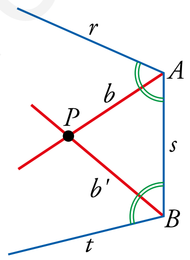


— Comprueba que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

— Razona por qué P está a la misma distancia (equidista) de A, de B y de C.

- P está en la mediatriz del segmento AB, por tanto: $\overline{PA} = \overline{PB}$.
- P está en la mediatriz del segmento BC, por tanto: $\overline{PB} = \overline{PC}$.
- Concluimos, pues, que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$; esto es, que P equidista de A, B y C.

2 **Dibuja en tu cuaderno dos ángulos $\widehat{rs}$ y $\widehat{st}$ como se ve en la figura.**



— Traza sus bisectrices, b y b', que se cortan en un punto P.

— Razona que las distancias del punto P a las rectas r, s y t coinciden.

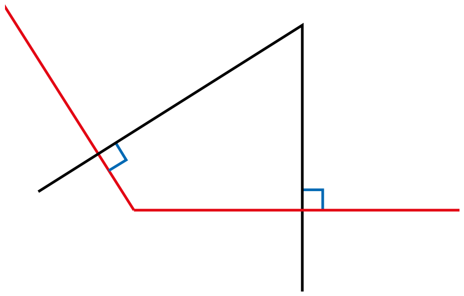
- P está en la bisectriz del ángulo $\widehat{rs}$; por tanto, está a igual distancia de los lados del ángulo, r y s.
- P está en la bisectriz del ángulo $\widehat{st}$; por tanto, está a igual distancia de los lados del ángulo, s y t.
- Concluimos, pues, que P está a igual distancia de las rectas r, s y t.

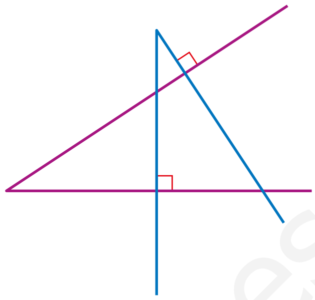
2 RELACIONES ANGULARES

Página 166

1 **Dos ángulos de lados perpendiculares pueden ser iguales, pero también pueden ser suplementarios.**

Justifícalo en tu cuaderno con un dibujo.





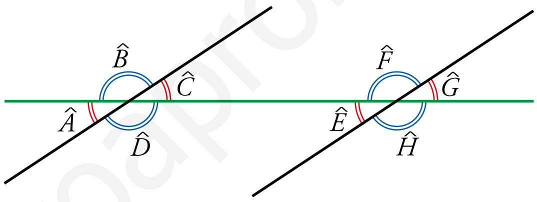
2 **De estos ángulos, di dos que sean iguales por ser:**

a) Opuestos por el vértice.

b) Correspondientes.

c) Alternos internos.

d) Alternos externos.



a) $\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$; $\hat{E} = \hat{G}$; $\hat{F} = \hat{H}$

b) $\hat{A} = \hat{E}$; $\hat{B} = \hat{F}$; $\hat{C} = \hat{G}$; $\hat{D} = \hat{H}$

c) $\hat{A} = \hat{G}$; $\hat{B} = \hat{H}$

d) $\hat{D} = \hat{F}$; $\hat{C} = \hat{E}$

Página 167

3 **Cinco de los ángulos de un hexágono irregular miden 147°, 101°, 93°, 122° y 134°. Halla la medida del sexto ángulo.**

Los seis ángulos de un hexágono suman: $(6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$

$720° - (147° + 101° + 93° + 122° + 134°) = 720° - 597° = 123°$

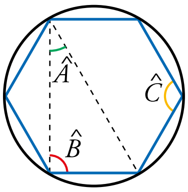
El sexto ángulo mide 123°.

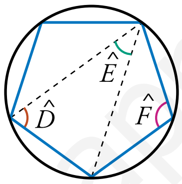
4 **¿Cuánto mide cada ángulo de un hexágono regular? ¿Y de un pentágono regular?**

– La suma de los ángulos de un hexágono es $(6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$.
  Por tanto, cada ángulo mide $720° : 6 = 120°$.

– La suma de los ángulos de un pentágono es $(5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$.
  Entonces, cada ángulo de un pentágono regular mide $540° : 5 = 108°$.

5 **Halla el valor de cada uno de los ángulos señalados:**





$\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $\frac{360°}{6} = 60° \rightarrow \hat{A} = \frac{60°}{2} = 30°$

$\hat{B}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $180° \rightarrow \hat{B} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\hat{C}$ es uno de los ángulos del hexágono $\rightarrow \hat{C} = \frac{(6-2)\,180°}{6} = 120°$

$\hat{D}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $2 \cdot \frac{360°}{5} = 144° \rightarrow \hat{D} = \frac{144°}{2} = 72°$

$\hat{E}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide $\frac{360°}{5} = 72° \rightarrow \hat{E} = \frac{72°}{2} = 36°$

$\hat{F}$ es uno de los ángulos del pentágono $\rightarrow \hat{F} = \frac{(5-2)\,180°}{5} = 108°$

3 FIGURAS SEMEJANTES

Página 168

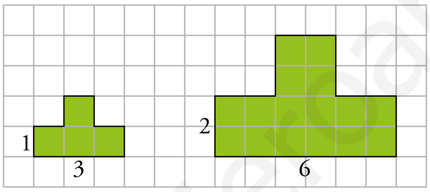
1 **Estas dos figuras son semejantes. Mide y encuentra la razón de semejanza.**

Por ejemplo, medimos las guitarras a lo largo del mástil. Entonces, la guitarra de mayor tamaño mide, aproximadamente, 4 cm y la de menor tamaño mide 3 cm aproximadamente.

$4 \cdot 0,75 = 3$

Por tanto, la razón de semejanza es $r \approx 0,75$.

2 **Estas dos figuras son semejantes y su razón de semejanza es 2:**



¿Cuántos cuadrados ocupa la primera? ¿Y la segunda? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

La primera figura ocupa 4 cuadrados.

La segunda figura ocupa 16 cuadrados.

La razón entre las áreas es: $r = \dfrac{16}{4} = 4$.

Página 169

3 **Considera el plano del primer ejemplo.**

a) Calcula la anchura de la vivienda.

b) ¿Cuánto mediría esa misma longitud en un plano construido a escala 1/100?

a) En la imagen, el ancho mide 4,9 cm.

La anchura de la vivienda mide $4,9 \cdot 200 = 980$ cm = 9,8 m.

b) A escala 1/100, la anchura de la vivienda medirá, $4,9 \cdot 100 = 490$ cm = 4,9 m.

4 **a) Calcula la distancia real entre Arrecife de Lanzarote y Las Palmas de Gran Canaria.**

b) ¿A qué escala debería estar el plano para que esa distancia, sobre el papel, fuera el doble?

a) En la imagen, la distancia entre el Arrecife y Las Palmas de Gran Canaria es 4,1 cm.

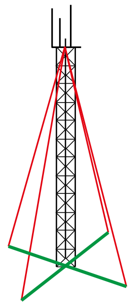
Por tanto, la dimensión real es $4,1 \cdot 5\,000\,000 = 20\,500\,000$ cm = 205 km.

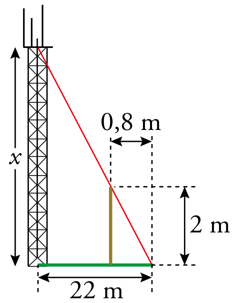
b) Para que la distancia fuera el doble, el plano debería estar a una escala 1/2 500 000.

4 TRIÁNGULOS SEMEJANTES. TEOREMA DE TALES

Página 171

1 **Una torre de comunicaciones se sustenta por cuatro cables amarrados a su extremo superior y al suelo. Para calcular su altura, Aurora ha colocado un listón de dos metros como indica la figura. Con esos datos, calcula tú la altura de la torre.**





$$\frac{2}{0,8} = \frac{x}{22} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 22}{0,8} = 55 \text{ m}$$

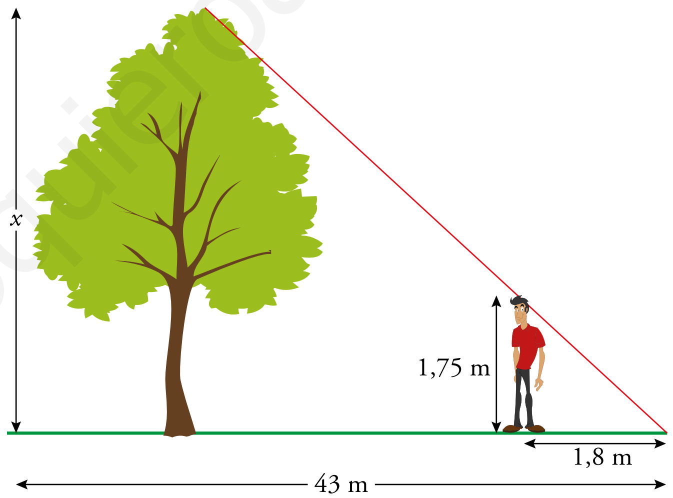
La altura de la torre mide 55 m.

2 **Cuando mi sombra mide 1,8 m, la del pino del parque mide 43 m. Mi altura es 1,75 m. ¿Cuál es la altura del pino?**

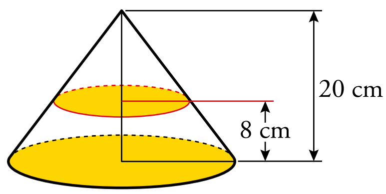
$$\frac{1,75}{1,8} = \frac{x}{43}$$

$$x = \frac{1,75 \cdot 73}{1,8} = 41,81 \text{ m}$$

El pino mide 41,81 m.



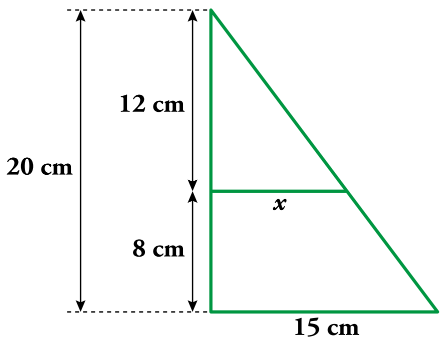
3 **La altura de un cono recto mide 20 cm, y el radio de la base, 15 cm. ¿Cuál es el radio de la nueva base, si se corta de forma que su altura disminuya en 8 cm?**



$$\frac{x}{15} = \frac{12}{20}$$

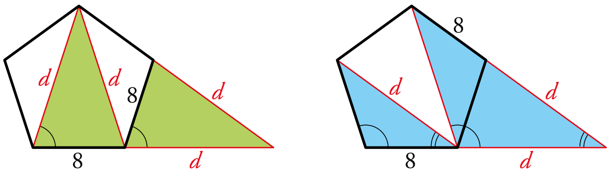
$$x = \frac{12 \cdot 15}{20} = 9 \text{ cm}$$

El radio de la nueva base mide 9 cm.



4 **Calcula la diagonal de un pentágono regular de 8 cm de lado.**

Observa en la figura que los dos triángulos verdes son iguales, y que los dos azules son semejantes.



$\frac{8+d}{d} = \frac{d}{8} \rightarrow 8(8+d) = d \cdot d \rightarrow 64 + 8d = d^2 \rightarrow d^2 - 8d - 64 = 0$

$d = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64+256}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{320}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{5}}{2}$ cm $\begin{cases} 4 + 4\sqrt{5} \approx 12{,}94 \text{ cm} \\ 4 - 4\sqrt{5} \approx -4{,}94 \text{ cm} \end{cases}$

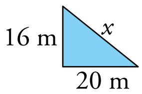
Solución: La diagonal mide $4 + 4\sqrt{5} \approx 12{,}94$ cm.

5 EL TEOREMA DE PITÁGORAS

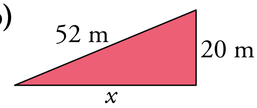
Página 173

1 **Calcula el lado desconocido en cada triángulo:**

a)



b)



a) $x^2 = 20^2 + 16^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{400+256} = \sqrt{656} = 4\sqrt{41} \approx 25{,}6$ m.

b) $52^2 = 20^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 52^2 - 20^2$

$x = \sqrt{2\,704 - 400} = \sqrt{2\,304} = 48$ m

2 **Averigua cómo son (acutángulos, rectángulos u obtusángulos) los triángulos de lados:**

a) 49 m, 18 m y 52 m **b) 44 cm, 17 cm y 39 cm**

c) 68 cm, 85 dm, 51 cm **d) 15 cm, 15 cm, 15 cm**

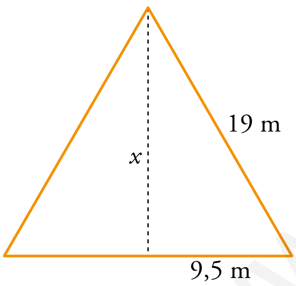
a) $18^2 + 49^2 = 2\,725 > 2\,704 = 52^2 \;\rightarrow$ Triángulo acutángulo.

b) $17^2 + 39^2 = 1\,810 < 1\,936 = 44^2 \;\rightarrow$ Triángulo obtusángulo.

c) $68^2 + 51^2 = 7\,225 = 85^2 \;\rightarrow$ Triángulo rectángulo.

d) $15^2 + 15^2 = 450 > 225 = 15^2 \;\rightarrow$ Triángulo acutángulo.

3 **Halla la altura de un triángulo equilátero de 19 m de lado. Da la solución aproximando hasta los centímetros.**

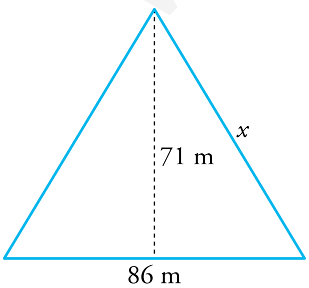


$19^2 = x^2 + 9{,}5^2 \;\rightarrow\; x^2 = 19^2 - 9{,}5^2$

$x = \sqrt{361 - 90{,}25} = \sqrt{270{,}75} \approx 16{,}45$ m

Solución: La altura mide 16,45 m.

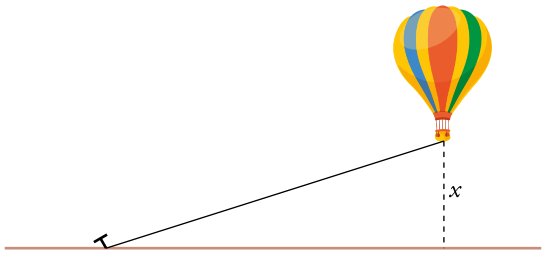
4 **Halla el perímetro de un triángulo isósceles de lado desigual 86 m y altura correspondiente 71 m.**

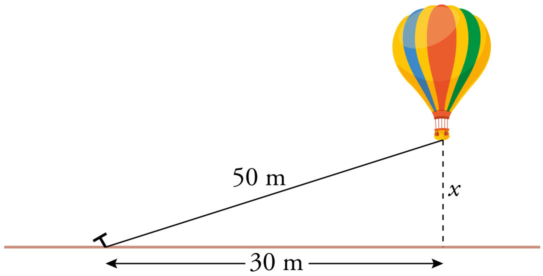


$x^2 = 71^2 + 43^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{6\,890} = 83{,}01$ m

$P = 2 \cdot 83{,}01 + 86 = 252{,}02$ m

5 **Un globo cautivo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 metros, ha sido desplazado por el viento 30 metros hacia el oeste. ¿A qué altura se encuentra?**



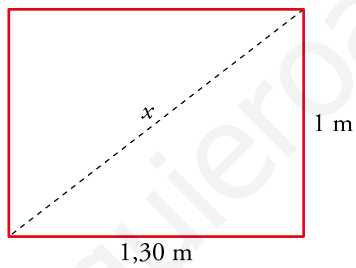


$50^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 50^2 - 30^2$

$x = \sqrt{2\,500 - 900} = \sqrt{1\,600} = 40 \text{ m}$

Solución: Se encuentra a 40 m de altura.

6 **¿Será posible introducir, durante una mudanza, el tablero de una mesa de 1,5 × 2 metros, a través del hueco de una ventana de 1 × 1,30 metros? Razona tu respuesta.**



$x^2 = 1{,}30^2 + 1^2 \rightarrow x = \sqrt{1{,}69 + 1} = \sqrt{2{,}69}$

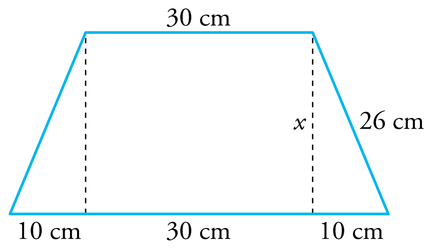
$x = 1{,}64$ m

$1{,}5 < 1{,}64$

Solución: Sí, será posible. El ancho de la mesa es 1,5 m y la diagonal de la ventana mide 1,64 m.

Página 175

7 **Los lados de un trapecio isósceles miden 50 cm, 30 cm, 26 cm y 26 cm. Halla su altura.**

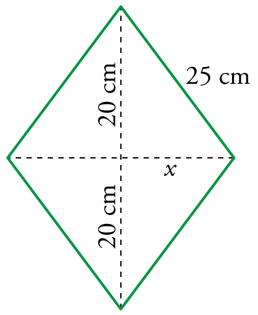


$26^2 = x^2 + 10^2 \rightarrow x^2 = 26^2 - 10^2$

$x = \sqrt{576} = 24$ cm

La altura del trapecio isósceles es 24 cm.

8 **Cada uno de los lados de un rombo miden 25 cm, y una de sus diagonales, 40 cm. Halla la longitud de la otra diagonal.**

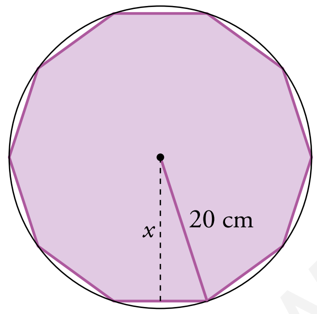


$25^2 = x^2 + 20^2 \rightarrow x^2 = 25^2 - 20^2$

$x = \sqrt{225} = 15$ cm

La longitud de la otra diagonal es $15 \cdot 2 = 30$ cm.

9 **El perímetro de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio mide 124,9 cm. Halla su apotema.**



Perímetro = 124,9 cm

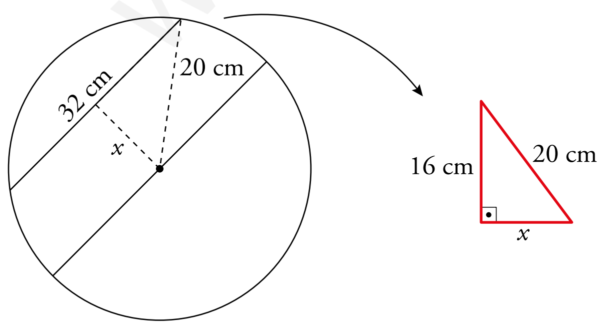
Cada lado del decágono mide 124,9 : 10 = 12,49 cm

$20^2 = x^2 + \left(\frac{12,49}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 6,245^2$

$x \approx \sqrt{400 - 39} \approx \sqrt{361} \approx 19$ cm

La apotema mide, aproximadamente, 19 cm.

10 **En una circunferencia hemos dibujado un diámetro de 40 cm y una cuerda paralela a él de 32 cm. ¿A qué distancia están estos dos segmentos?**

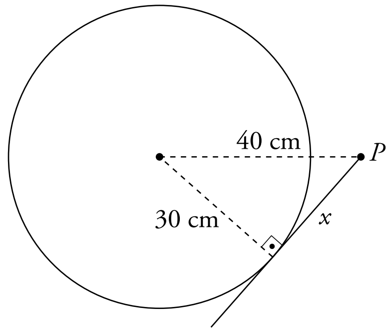


$20^2 = 16^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 16^2$

$x = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ cm

Solución: Están a 12 cm de distancia.

11 **Desde un punto que dista 40 cm del centro de una circunferencia de 60 cm de diámetro, hemos trazado un segmento tangente a ella. ¿Cuál es su longitud?**

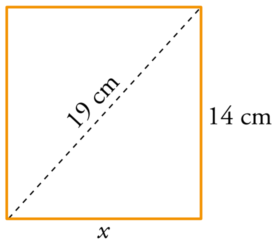


$40^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 40^2 - 30^2$

$x = \sqrt{1600 - 900} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7} = 26,46$ cm

Solución: El segmento mide 26,46 cm.

12 **Halla el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 19 cm, y su lado menor, 14 cm.**



$19^2 = 14^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 19^2 - 14^2$

$x = \sqrt{361 - 196} = \sqrt{165} = 12,85$ cm

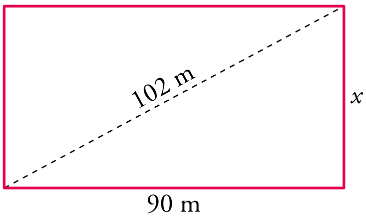
$P = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 12,85 = 53,7$ cm

Solución: El perímetro mide 53,7 cm.

6 ÁREAS DE POLÍGONOS

Página 177

1 **Un estadio rectangular mide 90 metros de largo, y su diagonal, 102 m. Halla su anchura y su área.**



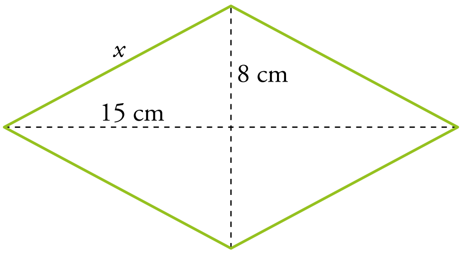
$102^2 = 90^2 + x^2 \ \rightarrow\ x^2 = 102^2 - 90^2$

$x = \sqrt{10\,404 - 8\,100} = \sqrt{2\,304} = 48$ m

Área $= 90 \cdot 48 = 4\,320$ m^2

Solución: El estadio mide 48 m de ancho y su área es de 4 320 m^2.

2 **Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 30 cm, respectivamente. Halla el perímetro y el área del rombo.**



$x^2 = 15^2 + 8^2 \ \rightarrow\ x = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$ cm.

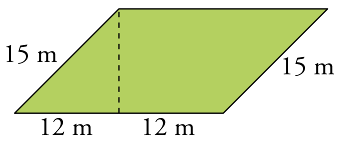
Perímetro $= 4 \cdot 17 = 68$ cm

Área $= \dfrac{30 \cdot 16}{2} = 240$ cm^2

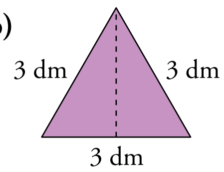
El perímetro mide 68 cm y el área, 240 cm^2.

3 **Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras, calculando previamente el elemento que falta:**

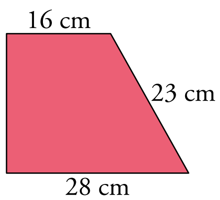
a)



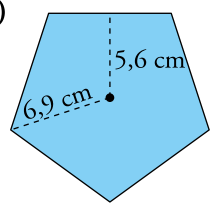
b)



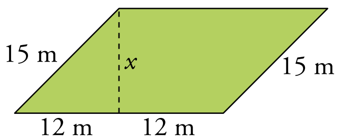
c)



d)



a) Calculamos la altura:



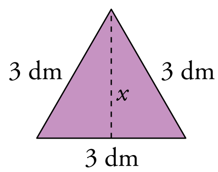
$15^2 = 12^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 15^2 - 12^2$

$x = \sqrt{225-144} = \sqrt{81} = 9\ \text{m}$

Área = $9 \cdot (12 + 12) = 9 \cdot 24 = 216\ \text{m}^2$

Perímetro = $15 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 78$ m

b) Calculamos la altura:



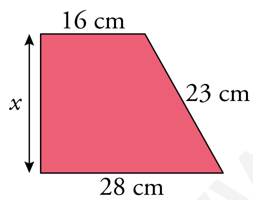
$3^2 = 1{,}5^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 3^2 - 1{,}5^2$

$x = \sqrt{9-2{,}25} = \sqrt{6{,}75} = 2{,}6\ \text{dm}$

Área = $\dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 3{,}9\ \text{dm}^2$

Perímetro = $3 \cdot 3 = 9$ dm

c)



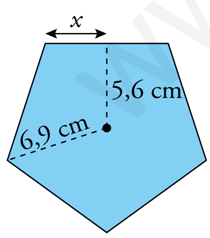
$23^2 = x^2 + 12^2 \;\rightarrow\; x^2 = 23^2 - 12^2$

$x = \sqrt{529-144} = \sqrt{385} = 19{,}6\ \text{cm}$

Área = $\dfrac{16+28}{2} \cdot 19{,}6 = 431{,}2\ \text{cm}^2$

Perímetro = $19{,}6 + 28 + 23 + 16 = 86{,}6$ cm

d)



$6{,}9^2 = 5{,}6^2 + x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 6{,}9^2 - 5{,}6^2$

$x = \sqrt{47{,}61-31{,}36} = \sqrt{16{,}25} \approx 4\ \text{cm} \;\rightarrow\;$ lado ≈ 8 cm

Área = $\dfrac{(5 \cdot 8) \cdot 5{,}6}{2} = 112\ \text{cm}^2$

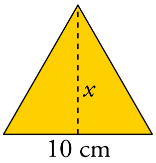
Perímetro = $5 \cdot 8 = 40$ cm

4 **Calcula:**

a) El área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

b) El área de un hexágono regular de lado 10 cm.

a)

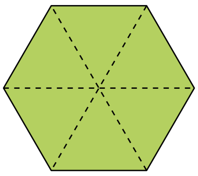


$$10^2 = 5^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 10^2 - 5^2$$

$$x = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$$

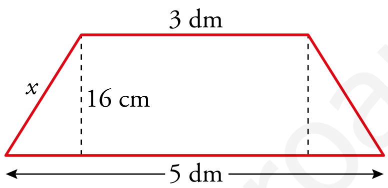
$$\text{Área} = \frac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$$

b) El hexágono regular está formado por seis triángulos como el del apartado a).



$$\text{Área} = 6 \cdot 43,3 = 259,8 \text{ cm}^2$$

5 **La altura de un trapecio isósceles mide 16 cm, y sus bases, 5 dm y 3 dm. Halla el perímetro (aproximando a los milímetros) y el área.**



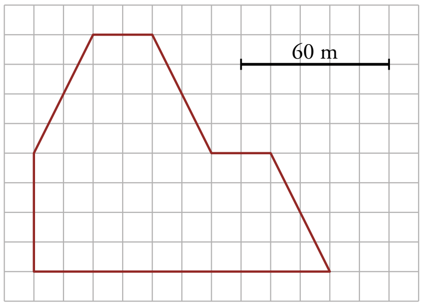
$$x^2 = 16^2 + 10^2 \rightarrow x = \sqrt{256+100} = \sqrt{356} = 18,9 \text{ cm}$$

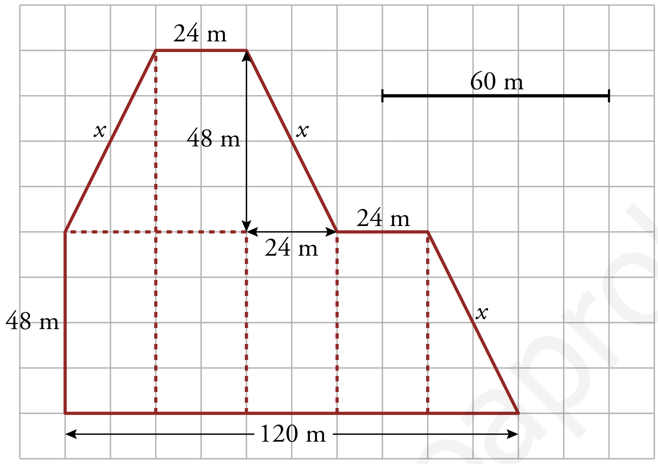
Perímetro = 30 + 50 + 2 · 18,9 = 117,8 cm

$$\text{Área} = \frac{30+50}{2} \cdot 16 = 640 \text{ cm}^2$$

Solución: El perímetro mide 117,8 cm y el área, 640 cm^2.

6 **En la figura puedes ver el plano de una parcela de terreno. Calcula su superficie y la longitud de la valla.**





Cinco cuadraditos son 60 m, entonces, un cuadradito son 12 m.

$x^2 = 24^2 + 48^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{576 + 2\,304} = \sqrt{2\,880} = 53,67 \text{ m}$

Hemos dividido la parcela en rectángulos y triángulos y hemos obtenido 5 rectángulos y 3 triángulos, con las mismas medidas, respectivamente.

Área de un rectángulo $= 24 \cdot 48 = 1\,152 \text{ m}^2$

Área de un triángulo $= \dfrac{24 \cdot 48}{2} = 576 \text{ m}^2$

Área total $= 5 \cdot 1\,152 + 3 \cdot 576 = 7\,488 \text{ m}^2$

Perímetro $= 120 + 48 + 3 \cdot 53,67 + 2 \cdot 24 \approx 377$ m

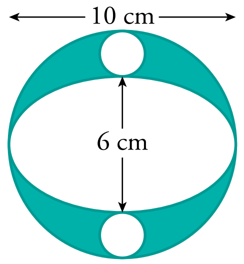
Solución: La superficie de la parcela es de $7\,488 \text{ m}^2$ y la longitud de la valla, 377 m.

7 ÁREAS Y PERÍMETROS DE ALGUNAS FIGURAS CURVAS

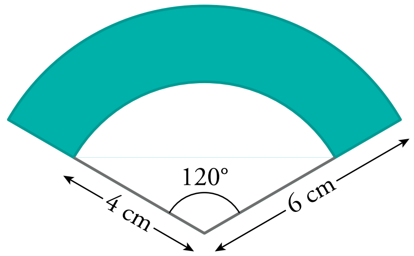
Página 178

1 Halla el área de las figuras coloreadas.

a)



b)



a) Área del círculo grande = $\pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 78{,}54\ \text{cm}^2$

Área del círculo pequeño = $\pi \cdot 1^2 = 3{,}14\ \text{cm}^2$

Área de la elipse = $\pi \cdot 3 \cdot 5 = 47{,}12\ \text{cm}^2$

Área = $78{,}54 - 3{,}14 - 47{,}12 = 28{,}28\ \text{cm}^2$

b) Área = $\dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} = \dfrac{\pi(36 - 16)}{3} = 20{,}94\ \text{cm}^2$

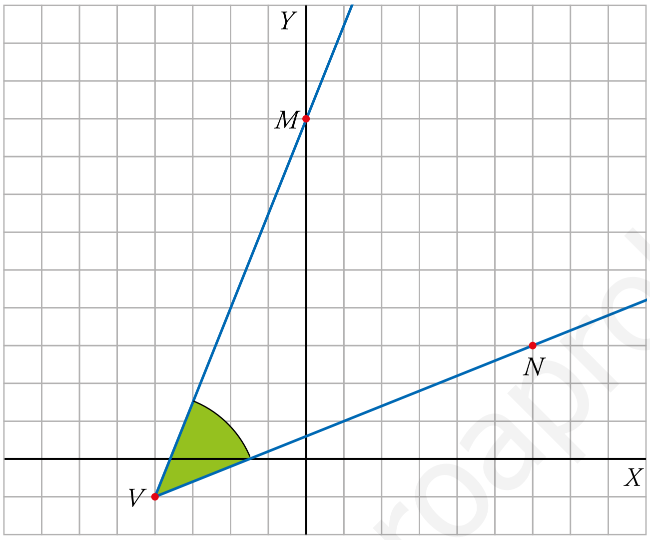
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 179

Practica

Bisectriz y mediatriz

1 **Copia esta figura en tu cuaderno (con cuadrícula grande trabajarás mejor):**

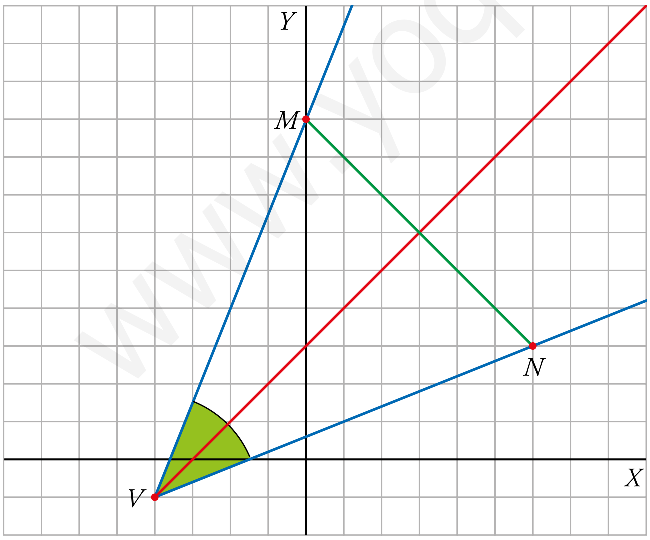


a) Traza la bisectriz del ángulo $\widehat{MVN}$.

b) Comprueba que los segmentos *VM* y *VN* tienen la misma longitud.

c) Dibuja el segmento *MN* y traza su mediatriz. ¿Qué observas?

a)

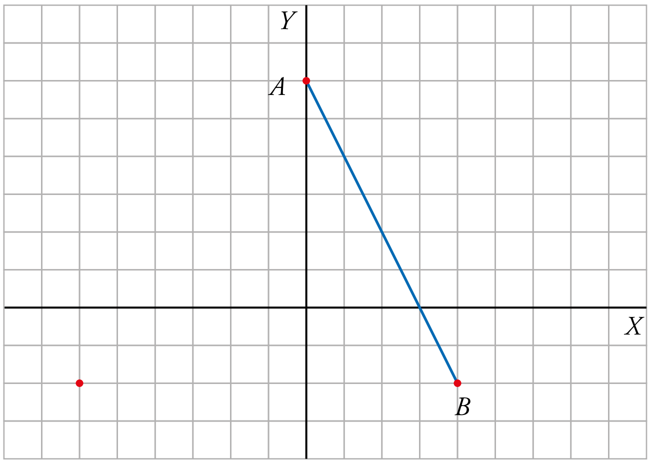


b) Midiendo con una regla, se comprueba que *VM* y *VN* tienen la misma longitud.

También puede comprobarse fijándonos en que los segmentos *VM* y *VN* son las hipotenusas de triángulos rectángulos en los que los catetos miden 10 y 4 cuadraditos de la cuadrícula.

c) La mediatriz del segmento *MN* coincide con la bisectriz del ángulo $\widehat{MVN}$.

2 **Observa y reproduce esta figura en tu cuaderno (con cuadrícula grande trabajarás mejor):**

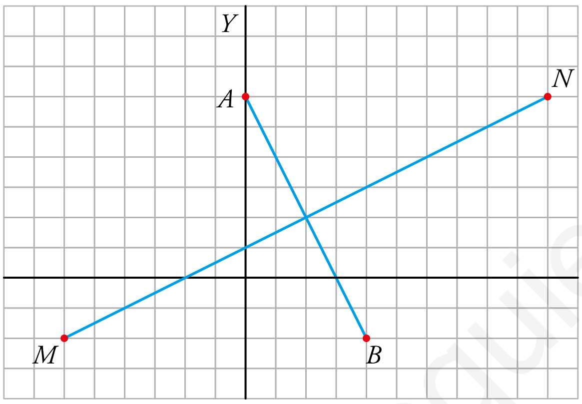


a) Traza la mediatriz del segmento *AB* y comprueba que pasa por *M*.

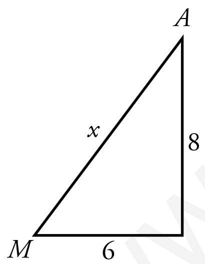
b) Tomando el lado de la cuadrícula como unidad, ¿a qué distancia está *A* de *M*?

c) Señala el punto, *N*, simétrico de *M* respecto al segmento *AB*. ¿Cuáles son sus coordenadas?

a)



b)



$x^2 = 8^2 + 6 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$

M dista 10 unidades del punto *A*.

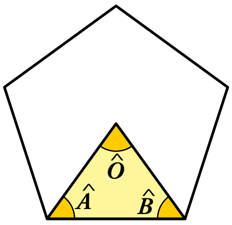
c) $N = (10, 6)$

Ángulos

3 **Observa el triángulo coloreado dentro del pentágono regular y explica el proceso seguido para obtener la medida de cada uno de sus ángulos, $\hat{O}$, $\hat{A}$ y $\hat{B}$:**

$$\hat{O} = \frac{360}{5} = 72°$$

$$\hat{A} = \frac{180 - 72}{2} = 54° = \hat{B}$$



A la vista de los ángulos, ¿cómo es el triángulo, equilátero, isósceles o escaleno?

- $\hat{O}$ es el ángulo central de un pentágono regular, por tanto:

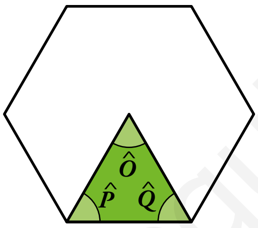
  $$\hat{O} = \frac{360°}{5} = 72°$$

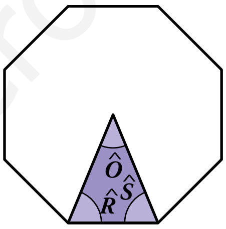
- La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En el triángulo amarillo, además, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son iguales. Por tanto:

  $$\hat{A} = \frac{180 - 72}{2} = 54° = \hat{B}$$

- El triángulo es isósceles.

4 **Siguiendo un proceso similar al del ejercicio anterior, calcula los ángulos señalados en el hexágono regular y en el octógono regular.**





¿Cómo son los triángulos coloreados?

- Hexágono regular:

  $$\hat{O} = \frac{360°}{6} = 60° \qquad \hat{P} = \frac{180° - 60°}{2} = 60° = \hat{Q}$$

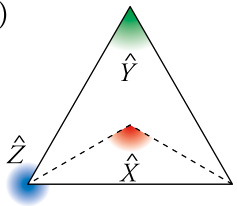
  El triángulo es equilátero.

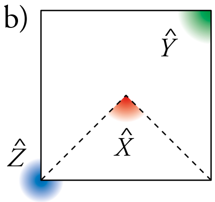
- Octógono regular:

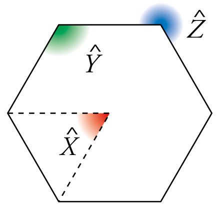
  $$\hat{O} = \frac{360°}{8} = 45° \qquad \hat{R} = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5° = \hat{S}$$

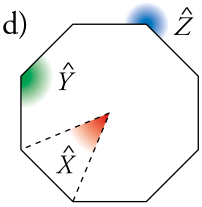
  El triángulo es isósceles.

5 **Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**

a)


b)


c)


d)


a) $\hat{X} = 360° : 3 = 120°$

$\hat{Y}$ es un ángulo del triángulo equilátero. $\hat{Y} = 60°$

$\hat{Z} = 360° - 60° = 300°$

b) $\hat{X} = 360° : 4 = 90°$

$\hat{Y}$ es un ángulo del cuadrado. $\hat{Y} = 90°$

$\hat{Z} = 360° - 90° = 270\ °$

c) $\hat{X} = 360° : 6 = 60°$

$$\hat{Y} = \frac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 4 \cdot 30° = 120°$$

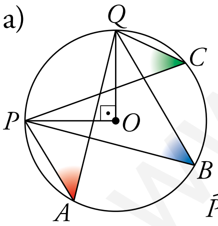
$\hat{Z} = 360° - 120° = 240°$

d) $\hat{X} = 360° : 8 = 45°$

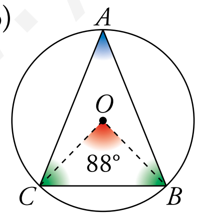
$$\hat{Y} = \frac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$$

$\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

6 **¿Cuánto miden los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ en cada una de estas figuras?**

a)


$\widehat{POQ} = 90°$

b)


$\overline{AB} = \overline{AC}$

a) $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son ángulos inscritos cuyo central correspondiente es $\widehat{POQ} = 90°$.

Entonces $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{90°}{2} = 45°$

b) $\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es $\widehat{BOC} = 88°$.

$\hat{A} = 88° : 2 = 44°$

$\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ suman 180° y $\hat{B} = \hat{C}$.

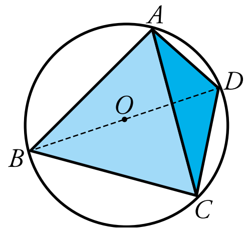
$(180° - 44°) : 2 = 136° : 2 = 68°$

$\hat{A} = 44°$, $\hat{B} = \hat{C} = 68°$

Página 180

7 **El triángulo *ABC* es equilátero y *O* es el centro de la circunferencia.**

Calcula los ángulos del trapezoide *ABCD*.



- $\hat{B} = 60°$
- $\hat{D}$ es un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un arco de 240°. Por tanto:

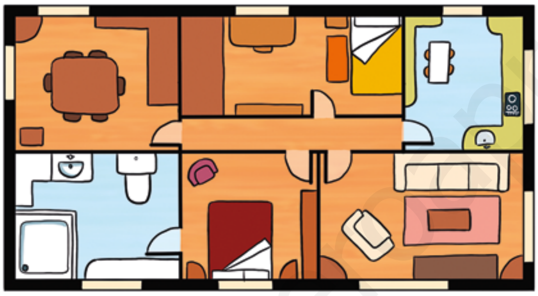
$$\hat{D} = \frac{240°}{2} = 120°$$

- Los cuatro ángulos del trapezoide tienen que sumar 360°. Además $\hat{A} = \hat{C}$. Por tanto:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° \rightarrow \hat{A} + 60° + \hat{C} + 120° = 360° \rightarrow 2\hat{A} = 180° \rightarrow \hat{A} = 90° = \hat{C}.$$

Semejanza

8 **Debajo tienes el plano de un piso a escala 1/250. Calcula sus dimensiones (largo y ancho) y su superficie.**

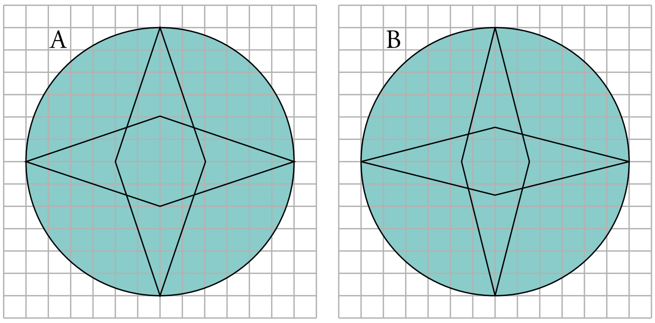


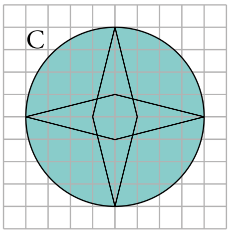
Ancho $\rightarrow$ 3,7 cm · 250 = 925 cm = 9,25 m

Largo $\rightarrow$ 7 · 250 = 1 750 cm = 17,5 m

Área = 9,25 · 17,5 = 161,875 m^2

9 **Dos de estas figuras son semejantes. ¿Cuáles?**



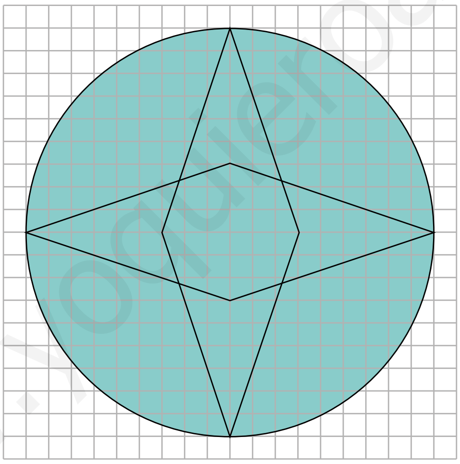


¿Cuál es la razón de semejanza?

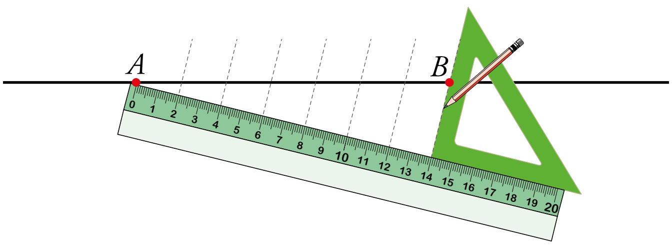
Dibuja en tu cuaderno una figura semejante a la figura A, de forma que la razón de semejanza sea 3/2.

Las figuras B y C son semejantes. Su razón de semejanza es $r = \frac{2}{3}$

Para dibujar la figura semejante a A, multiplico cada medida por $\frac{3}{2}$



10 **Dibuja en tu cuaderno un segmento cualquiera, *AB*, y divídelo en 7 partes iguales como se hace en la ilustración. Justifica el procedimiento seguido.**



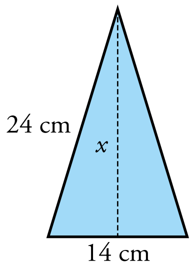
La razón entre dos segmentos cualesquiera de los señalados sobre la regla es siempre 1, pues todos miden lo mismo.

Por el teorema de Tales, la razón entre dos segmentos cualesquiera de los señalados sobre el segmento *AB* también tiene que ser 1, pues tiene que coincidir con la razón de los segmentos correspondientes de los señalados sobre la regla. Si la razón entre dos segmentos es 1, quiere decir que miden lo mismo. Por tanto, el segmento *AB* está dividido en 7 partes iguales.

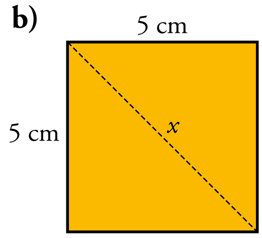
Teorema de Pitágoras

11 **Calcula el valor de *x* en cada figura:**

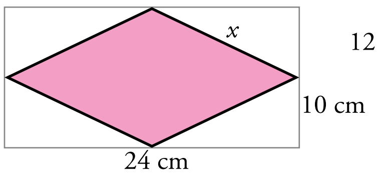
a)



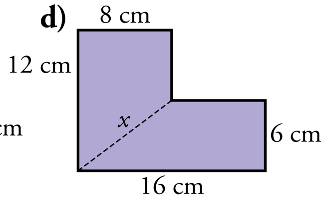
b)



c)



d)



a) $24^2 = x^2 + 7^2 \rightarrow 576 = x^2 + 49 \rightarrow x^2 = 527$

$x = \sqrt{527} = 22{,}96$ cm.

b) $x^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 25 + 25 \rightarrow x^2 = 50$

$x = \sqrt{50} \rightarrow x = 7{,}07$ cm.

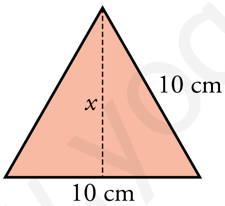
c) $x^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 144 + 25 \rightarrow x^2 = 169$

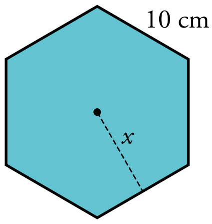
$x = \sqrt{169} \rightarrow x = 13$ cm.

d) $x^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 64 + 36 \rightarrow x^2 = 100$

$x = \sqrt{100} \rightarrow x = 10$ cm.

12 **Calcula la altura del triángulo equilátero y la apotema del hexágono regular.**





- Altura del triángulo equilátero.

  $10^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 100 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 75$

  $x = \sqrt{75} \rightarrow x = 8{,}66$ cm.

- Apotema del hexágono regular:

  Teniendo en cuenta que en un hexágono regular el lado mide lo mismo que el radio, su apotema es la altura de un triángulo equilátero de lado 10 cm; es decir, lo que se ha calculado en el caso anterior.

  Por tanto: $x = 8{,}66$ cm.

13 **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 5 m, 6 m y 7 m **b) 13 m, 15 m y 20 m**

c) 45 m, 27 m y 36 m **d) 35 m, 28 m y 46 m**

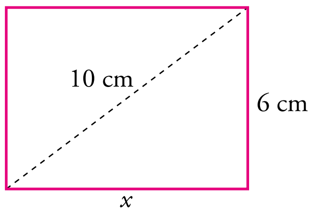
a) $5^2 + 6^2 = 61 > 49 = 7^2 \rightarrow$ Triángulo acutángulo

b) $13^2 + 15^2 = 394 < 400 = 20^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo

c) $27^2 + 36^2 = 2\,025 = 45^2 \rightarrow$ Triángulo rectángulo

d) $28^2 + 35^2 = 2\,009 < 2\,116 = 46^2 \rightarrow$ Triángulo obtusángulo

14 **La diagonal de un rectángulo mide 10 cm, y uno de los lados, 6 cm. Calcula su perímetro.**

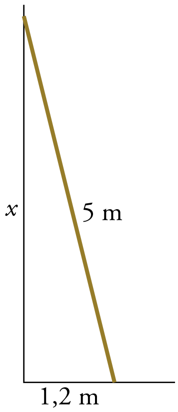


$10^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow 100 = 36 + x^2 \rightarrow x^2 = 100 - 36$

$x = \sqrt{64} \rightarrow x = 8$ cm

$P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28$ cm

15 **Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de ella. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?**

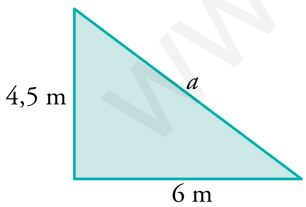


$5^2 = 1{,}2^2 + x^2 \rightarrow 25 = 1{,}44 + x^2 \rightarrow x^2 = 25 - 1{,}44$

$x = \sqrt{23{,}56} = 4{,}85$ m

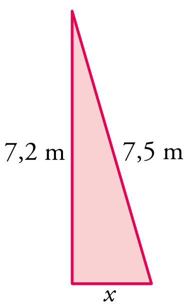
Solución: El extremo superior alcanza una altura de 4,85 m.

16 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m. En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa, 7,5 m. ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?**



$a^2 = 6^2 + 4{,}5^2 \rightarrow a^2 = 36 + 20{,}25 \rightarrow a = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ m

$P = 7{,}5 + 4{,}5 + 6 = 18$ m



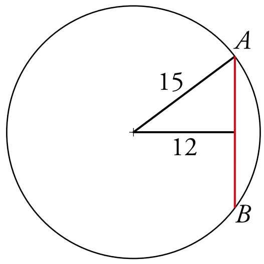
$7{,}5^2 = 7{,}2^2 + x^2 \rightarrow 56{,}25 = 51{,}84 + x^2 \rightarrow x^2 = 56{,}25 - 51{,}84$

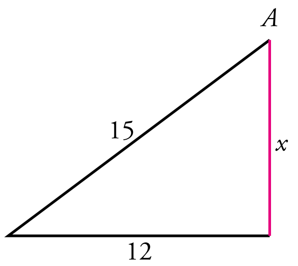
$x = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ m

$P = 7{,}5 + 7{,}2 + 2{,}1 = 16{,}8$ m

Solución: El primer triángulo tiene mayor perímetro.

17 **En una circunferencia de 15 cm de radio, se traza una cuerda, *AB*, a 12 cm del centro. ¿Cuál es la longitud de *AB*?**





$\rightarrow 15^2 = x^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = 9$ cm

$\overline{AB} = 2 \cdot x = 2 \cdot 9 = 18$ cm

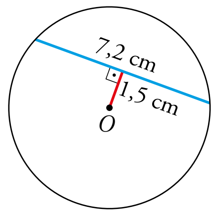
Página 181

18 **Observa y calcula:**

a) El radio de la circunferencia.

b) La longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm.

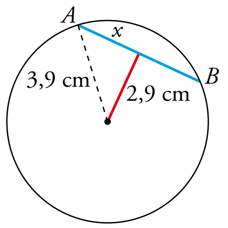
c) La distancia al centro de una cuerda que mide 4,68 cm.



a) $r^2 = 1{,}5^2 + 3{,}6^2 \rightarrow r^2 = 2{,}25 + 12{,}96 \rightarrow r^2 = 15{,}21$

$r = \sqrt{15{,}21} \rightarrow r = 3{,}9$ cm

b)

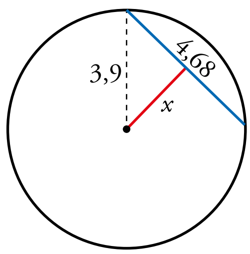


$3{,}9^2 = x^2 + 2{,}9^2 \rightarrow 15{,}21 = x^2 + 8{,}41 \rightarrow x^2 = 15{,}21 - 8{,}41$

$x = \sqrt{6{,}8} \rightarrow x = 2{,}6$ cm

$\overline{AB} = 2 \cdot 2{,}6 = 5{,}2$ cm

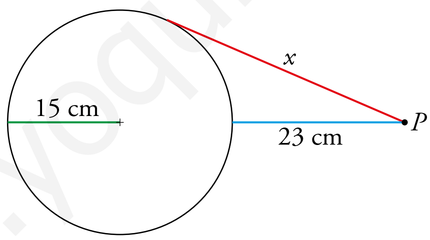
c)

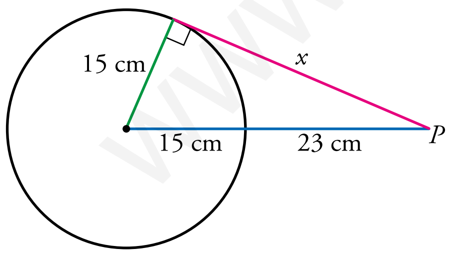


$3{,}9^2 = x^2 + (4{,}68 : 2)^2 \rightarrow 15{,}21 = x^2 + 5{,}4756$

$x^2 = 9{,}7344 \rightarrow x = 3{,}12$ cm

19 **Un punto *P* está a 23 cm de una circunferencia de 30 cm de diámetro. Calcula la longitud del segmento tangente desde *P* a la circunferencia.**

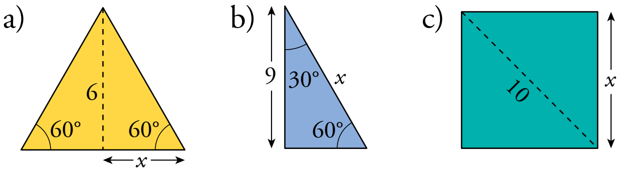




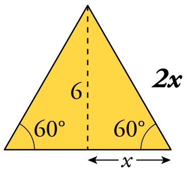
$(15 + 23)^2 = x^2 + 15^2 \rightarrow 1\,444 = x^2 + 225$

$x^2 = 1\,219 \rightarrow x = 34{,}91$ cm

20 **Calcula *x* en cada caso (todas las medidas están en centímetros):**



a) El triángulo amarillo es equilátero y el lado mide 2x.



$(2x)^2 = x^2 + 6^2$

b) ¿Se puede contemplar el triángulo azul como la mitad de un triángulo equilátero?

a) $(2x)^2 = x^2 + 6 \rightarrow 4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow 3x^2 = 36$

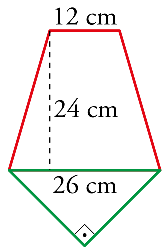
$x^2 = 12 \rightarrow x = 3{,}46$ cm

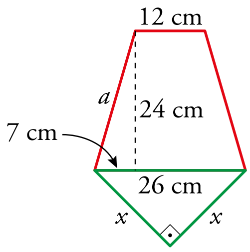
b) $x^2 = 9^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = 81 + \frac{x^2}{4} \rightarrow 4x^2 = 324 + x^2 \rightarrow 3x^2 = 324 \rightarrow x^2 = 108 \rightarrow x = 10{,}39$ cm

c) $10^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 100 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 50$

$x = 7{,}07$ cm

21 **Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.**





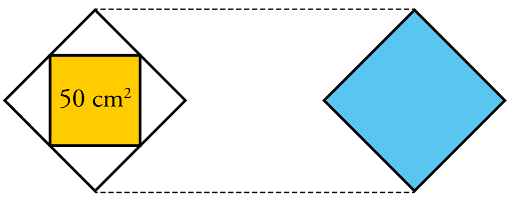
$a^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow a^2 = 576 + 49 \rightarrow a = \sqrt{625} \rightarrow a = 25$ cm

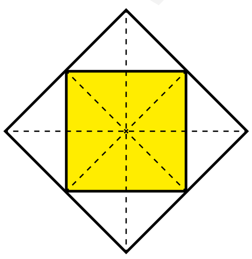
$26^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 676 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 338 \rightarrow x = \sqrt{338} = 18{,}3$ cm

$P = 12 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 18{,}3 = 98{,}6$ cm

Áreas

22 **El área del cuadrado amarillo es 50 cm².** **Calcula el área y el lado del cuadrado azul.**

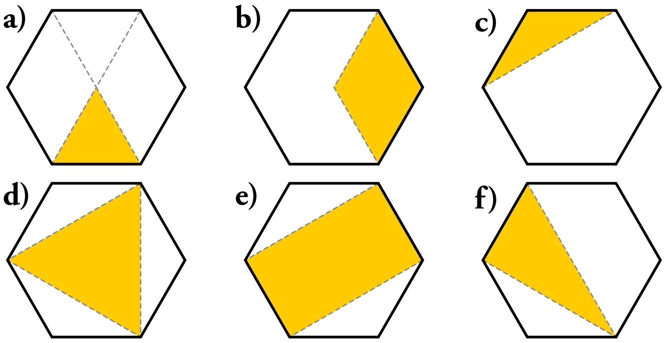




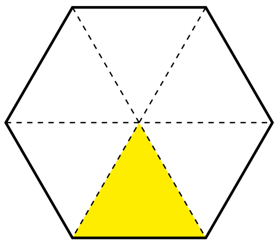
Sin hacer ningún cálculo, solo dividiendo la figura, vemos que la superficie del cuadrado azul es dos veces la del cuadrado amarilo $\rightarrow A = 5 \cdot 50 = 100$ cm²

• El lado de un cuadrado de 100 cm² de área es: $l = \sqrt{100} = 10$ cm

23 El área de un hexágono regular mide 18 m². Calcula el área de cada una de las zonas señaladas en su interior.

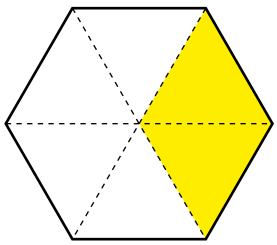


a)



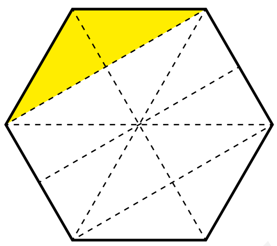
$$A = \frac{18}{6} = 3\ \text{m}^2$$

b)



$$A = \frac{18}{6} = 6\ \text{m}^2$$

c)



$$A = \frac{2}{12} \cdot 18 = 3\ \text{m}^2$$

d) Fijándonos en el apartado anterior:

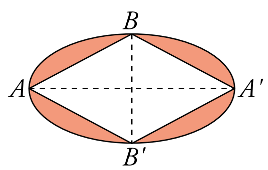
$A = 18 - 3 \cdot 3 = 9\ \text{m}^2$

e) Fijándonos en el apartado c):

$A = 18 - 2 \cdot 3 = 12\ \text{m}^2$

f) $A = 18 - 9 - 3 = 6\ \text{m}^2$

24 Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.



Área de la elipse = $\pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi\ \text{cm}^2 \approx 377\ \text{cm}^2$

Área del rombo = $\dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240\ \text{cm}^2$

Área total = $120\pi - 240 = 136{,}9\ \text{cm}^2$

25 Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:

a) 90° **b) 120°** **c) 72°** **d) 153°**

a) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 90°}{360°} = 176,7 \text{ cm}^2$

Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 90°}{360°} + 2 \cdot 15 = 53,5 \text{ cm}$

b) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 120°}{360°} = 235,6 \text{ cm}^2$

Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 120°}{360°} + 2 \cdot 15 = 61,4 \text{ cm}$

c) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 72°}{360°} = 141,4 \text{ cm}^2$

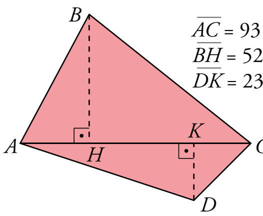
Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 72°}{360°} + 2 \cdot 15 = 48,8 \text{ cm}$

d) Área $= \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 153°}{360°} = 300,4 \text{ cm}^2$

Perímetro $= \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 153°}{360°} + 2 \cdot 15 = 70,1 \text{ cm}$

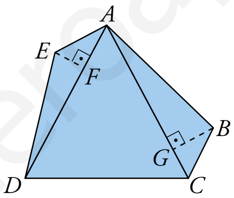
26 Halla el área de estos polígonos:

a)



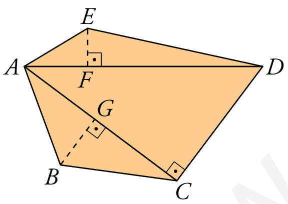
$\overline{AC} = 93$ m
$\overline{BH} = 52$ m
$\overline{DK} = 23$ m

b)



$\overline{AD} = \overline{AC} = 17$ m $\overline{DC} = 16$ m
$\overline{BG} = 4,5$ m $\overline{EF} = 3,2$ m

c)



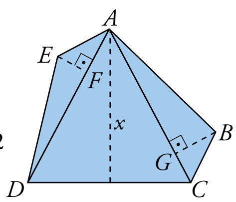
$\overline{BG} = 8,4$ m $\overline{AC} = 28$ m
$\overline{CD} = 21$ m $\overline{EF} = 5,6$ m

a) Área $= \dfrac{93 \cdot 52}{2} + \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 2\,418 + 1\,069,5 = 3\,487,5 \text{ m}^2$

b) $17^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 289 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 225$

$x = \sqrt{225} \rightarrow x = 15$ m

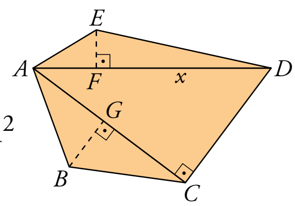
Calculamos el área como suma de las áreas de los tres triángulos.



Área $= \dfrac{3,2 \cdot 17}{2} + \dfrac{4,5 \cdot 17}{2} + \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 27,2 + 38,25 + 120 = 185,45 \text{ m}^2$

Área = 185 45 m^2

c) Calculamos el área como suma de las áres de los tres triángulos

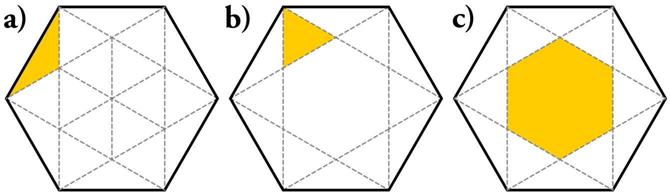


$x^2 = 28^2 + 21^2 \rightarrow x^2 = 1\,225 \rightarrow x = \sqrt{1\,225} \rightarrow x = 35$ m

Área $= \dfrac{35 \cdot 5,6}{2} + \dfrac{8,4 \cdot 28}{2} + \dfrac{28 \cdot 21}{2} = 98 + 117,6 + 294 = 509,6 \text{ m}^2$

Área = 509,6 m^2

27 **Calcula el área de cada una de las zonas señaladas dentro del hexágono de área 18 m²:**



a) Todos los triángulos en los que está dividido el hexágono tienen la misma área. Por tanto:

$$A = \frac{18}{18} = 1 \text{ m}^2$$

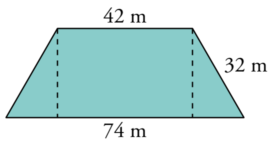
b) A = 1 m², por el apartado anterior.

c) A = 18 – 12 = 6 m²

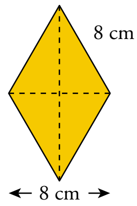
Página 182

28 Calcula el área de las figuras coloreadas.

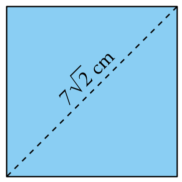
a)



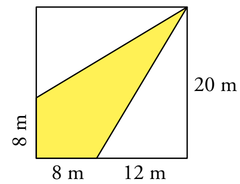
b)



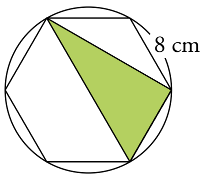
c)



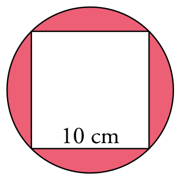
d)



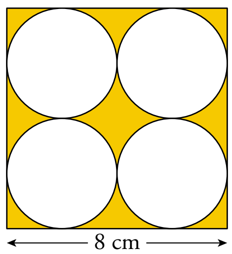
e)



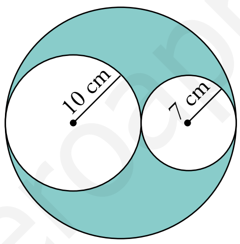
f)



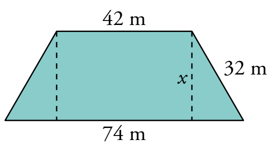
g)



h)



a)

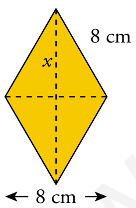


$32^2 = 16^2 + x^2 \to 1\,024 = 256 + x^2 \to x^2 = 768$

$x = \sqrt{768} \to x = 16\sqrt{3}$ m $\approx 27{,}71$ m

$\text{Área} = \dfrac{42 + 74}{2} \cdot 16\sqrt{3} = 928\sqrt{3}$ m $\approx 1\,607{,}3$ m^2

b)



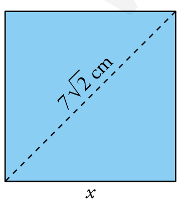
$8^2 = 4^2 + x^2 \to 64 = 16 + x^2 \to x^2 = 64 - 16$

$x = \sqrt{48} \to x = 4\sqrt{3}$ cm $\approx 6{,}9$ cm

$D = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ cm $\approx 13{,}8$ cm

$\text{Área} = \dfrac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$ cm$^2 \approx 55{,}4$ cm^2

c)



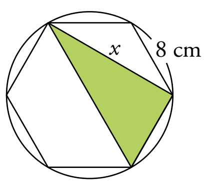
$x^2 + x^2 = \left(7\sqrt{2}\right)^2 \to 2x^2 = 2 \cdot 49 \to x^2 = 49$

$x = 7$ cm

$\text{Área} = 7^2 = 49$ cm^2

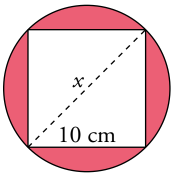
d) $A_{\text{CUADRADO}} = 20^2 = 400$ u^2; $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120$ u^2; Área $= 400 - 2 \cdot 120 = 160$ u^2

e)



$16^2 = x^2 + 8^2 \to 256 = x^2 + 64 \to x^2 = 192 \to x = 8\sqrt{3} \approx 13{,}8$ cm

$\text{Área} = \dfrac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3} \approx 55{,}4$ cm^2

f) 

$x^2 = 10^2 + 10^2 \;\rightarrow\; x^2 = 200 \;\rightarrow\; x = 10\sqrt{2} \approx 14,1 \text{ cm}$

$r = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm} \approx 7{,}07 \text{ cm}$

$\text{Área} = \pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 10^2 = 50\pi - 100 = 57,1 \text{ cm}^2$

g) Área del cuadrado = $8^2 = 64 \text{ cm}^2$

Área del círculo = $\pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2 \approx 12{,}56 \text{ cm}^2$

Área = $64 - 4 \cdot 4\pi = 64 - 16\pi = 13{,}73 \text{ cm}^2$

h) Área círculo grande = $\pi \cdot 17^2 = 289\pi \text{ cm}^2 \approx 907{,}9 \text{ cm}^2$

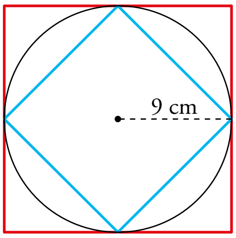
Área círculo mediano = $\pi \cdot 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2 \approx 314{,}2 \text{ cm}^2$

Área círculo pequeño = $\pi \cdot 7^2 = 49\pi \text{ cm}^2 \approx 153{,}9 \text{ cm}^2$

Área total = $289\pi - (100\pi + 49\pi) = 140\pi \approx 439{,}8 \text{ cm}^2$

29 En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja el cuadrado circunscrito y el cuadrado inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma π = 3,14).

Calculamos el radio: $56{,}52 = 2\pi \cdot r \;\rightarrow\; r = \dfrac{56,52}{2\pi} \;\rightarrow\; r = 9 \text{ cm}$



Área cuadrado circunscrito = $18^2 = 324 \text{ cm}^2$

Perímetro cuadrado circunscrito = $4 \cdot 18 = 72$ cm

Calculamos el lado del cuadrado inscrito:

$x^2 = 9^2 + 9^2 \;\rightarrow\; x^2 = 81 + 81 \;\rightarrow\; x^2 = 162 \;\rightarrow\; x = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12,7 \text{ cm}$

Área cuadrado inscrito = $\left(9\sqrt{2}\right)^2 = 162 \text{ cm}^2$

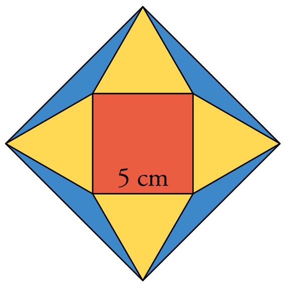
Perímetro cuadrado inscrito = $4 \cdot 9\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \approx 50,9 \text{ cm}$

30 Calcula:

a) La superficie de la zona coloreada de rojo.

b) La superficie de la zona coloreada de amarillo.

c) La superficie de la zona coloreada de azul.



a) Área zona roja = $5^2 = 25 \text{ cm}^2$

b) $x^2 + 2{,}5^2 = 5^2 \;\rightarrow\; x^2 = 25 - 6{,}25 \;\rightarrow\; x^2 = 18{,}75 \;\rightarrow\; x = 4{,}3$ cm

Área de un triángulo = $\dfrac{5 \cdot 4,3}{2} = 10,75 \text{ cm}^2$

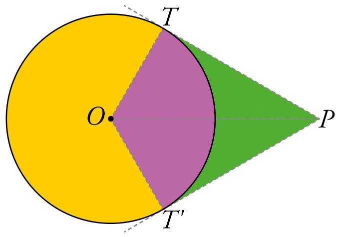
Área zona amarilla = $4 \cdot 10{,}75 = 43 \text{ cm}^2$

c) Calculamos las diagonales: $5 + 2 \cdot 4{,}3 = 13{,}6$ cm

Área cuadrado grande = $\dfrac{13,6 \cdot \dfrac{13,6}{2}}{2} \cdot 2 = \dfrac{13,6 \cdot 13,6}{2} = 92,48 \text{ cm}^2$

Área zona azul = $92{,}48 - (25 + 43) = 24{,}48 \text{ cm}^2$

31 Calcula el área que ocupa cada color:



$\overline{OT} = 15$ cm

$\overline{OP} = 30$ cm

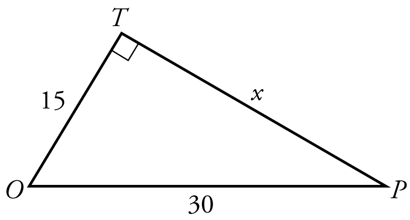
- El color morado ocupa $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de la superficie del círculo:

$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 = 235,62 \text{ cm}^2$

- El color amarillo ocupa $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de la superficie del círculo:

$A_2 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 = 471,24 \text{ cm}^2$

- Para calcular la superficie verde, empezamos calculando la longitud del segmento *TP*:



$30^2 = x^2 + 15^2 \rightarrow x = 25,98$

$x = 25,98$ cm

El área del triángulo *OTP* es $\frac{15 \cdot 25,98}{2} = 194,85 \text{ cm}^2$.

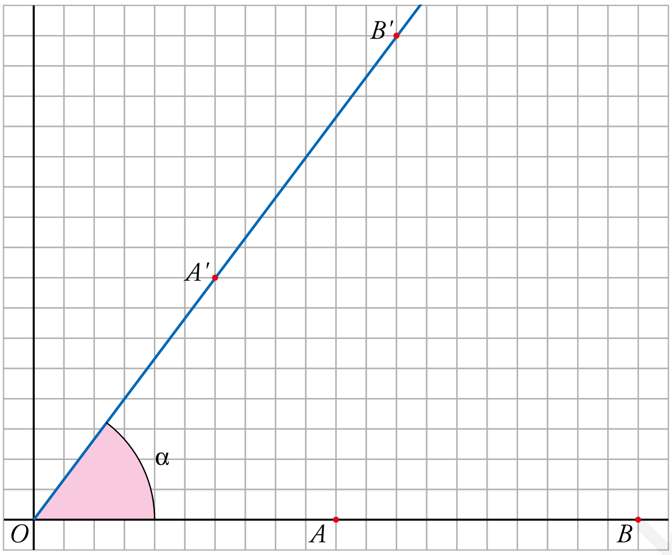
El área del cuadrilátero *OTPT'* es 194,85 · 2 = 397,7 cm^2.

El área que ocupa la zona verde es la que ocupa el cuadrilátero *OTPT'* menos la que ocupa la zona morada:

$A_3 = 397,7 - 235,62 = 154.08$ cm^2.

Resuelve problemas

32 **Observa y reproduce esta figura en tu cuaderno:**



a) Comprueba que $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{OA'} = \overline{A'B'}$.

b) Traza la bisectriz del ángulo α.

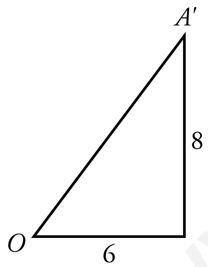
c) Traza las mediatrices de los segmentos OB y OB' y llama C al punto en el que se cortan.

d) Tomando como unidad el lado de la cuadrícula, ¿cuánto mide $\overline{CA}$? ¿Y $\overline{CA'}$?

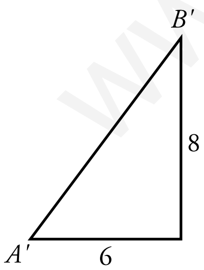
e) ¿Qué puedes decir del punto C?

a) Tomando como unidad la medida de un lado de la cuadrícula:

$\overline{OA} = \overline{OB} = 10 \text{ u}$

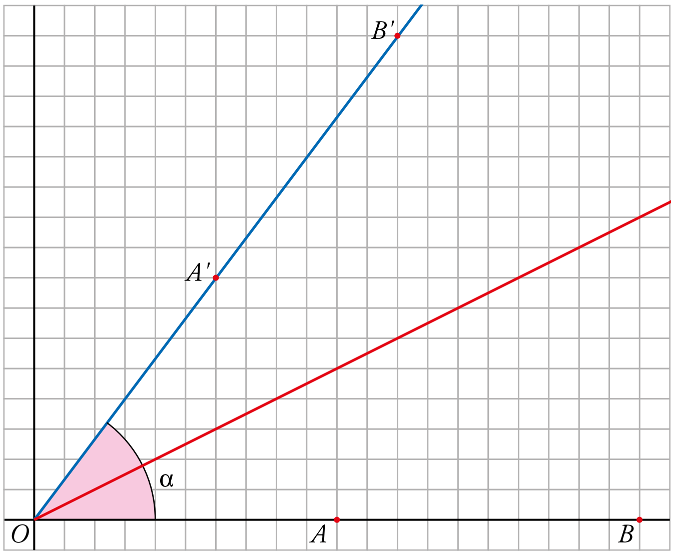


$\rightarrow \overline{OA'} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ u}$

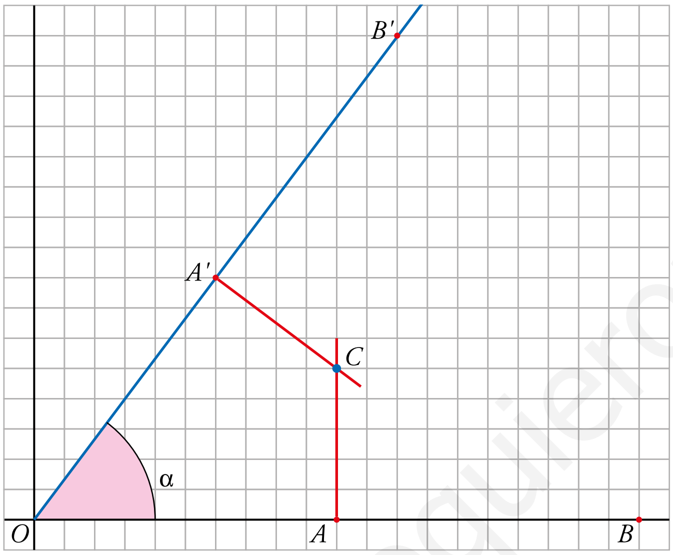


$\rightarrow \overline{A'B'} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ u}$

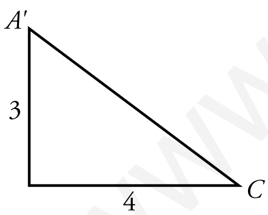
b)



c)



d) $\overline{CA} = 5$ u

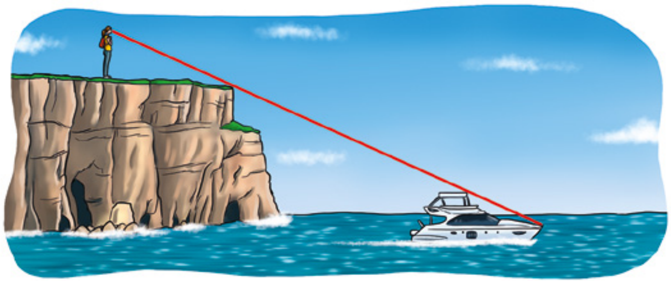


$\overline{CA'} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ u

$\overline{CA} = \overline{CA'} = 5$ u

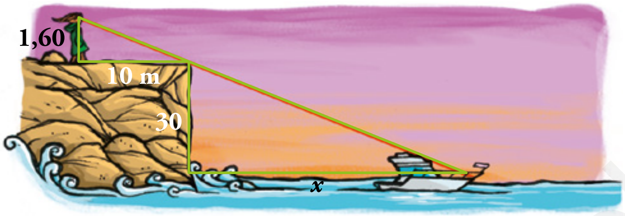
e) El punto C pertenece a la bisectriz del ángulo α.

33 Maribel mide 1,60 m de altura y se encuentra sobre un acantilado, a 30 m sobre el nivel del mar. Ve una barca que navega a cierta distancia de la costa y comprueba que, si se aleja más de 10 metros del borde, hacia el interior, deja de ver la barca. ¿A qué distancia se encuentra la embarcación de la base del acantilado?

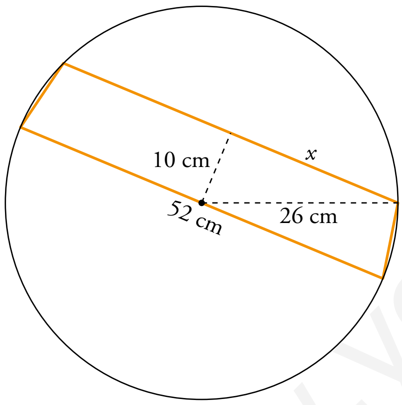


Son triángulos semejantes: $\frac{30}{1,6} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 10}{1,6} \rightarrow x = 187,5$ m

Solución: La embarcación se encuentra a 187,5 m de la base del acantilado.



34 En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.



$26^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow 676 = 100 + x^2 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{576} \rightarrow x = 24$ cm

La base menor mide 24 · 2 = 48 cm

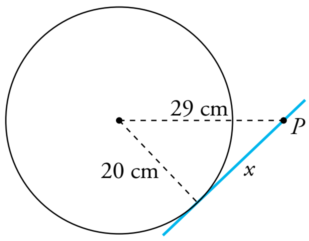
Área = $\frac{48 + 52}{2} \cdot 10 = 500$ cm^2

Solución: El área del cuadrilátero es de 500 cm^2.

35 Desde un punto *P* que dista 29 cm del centro de una circunferencia de radio 20 cm, se traza una tangente. Calcula la distancia de *P* al punto de tangencia.

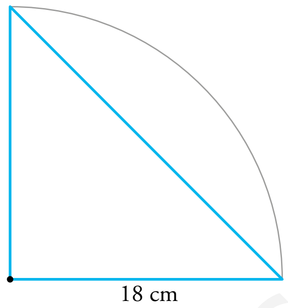
a) $29^2 = 20^2 + x^2 \rightarrow 841 = 400 + x^2 \rightarrow x^2 = 441 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{441} \rightarrow x = 21$ cm



Página 183

37 **Calcula el área de un segmento circular de 90° de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.**

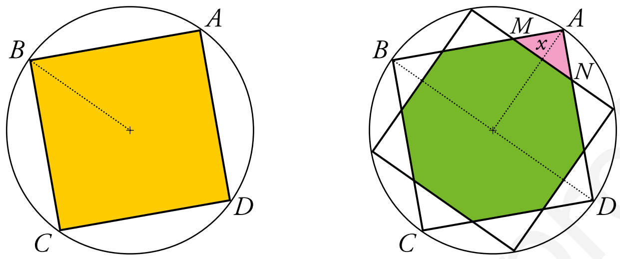


$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90°}{360°} = 254,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254,5 - 162 = 92,5 \text{ cm}^2$$

38 **Observa las figuras y calcula los elementos que se te piden después:**

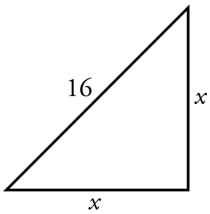


a) La apotema del cuadrado amarillo y del octógono verde.

b) El lado del octógono (los triángulos *ABD* y *AMN* son semejantes).

c) El área del cuadrado y el área del octógono.

a) Las dos apotemas miden lo mismo. Calculamos la del cuadrado amarillo, que mide lo mismo que medio lado.

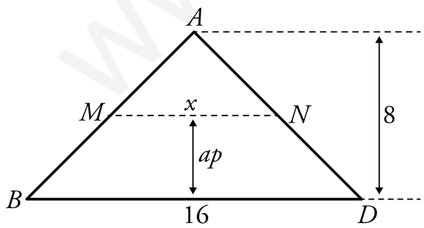


$$16^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 16^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{16^2}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 11,31$ cm mide el lado del cuadrado.

Las apotemas del cuadrado y del octógono miden $ap = \frac{11,31}{2} = 5,66 \text{ cm}$.

b)



Por semejanza de los triángulos *ABD* y *AMN*:

$$\frac{16}{8} = \frac{x}{8 - ap} \rightarrow x = \frac{16(8 - ap)}{8} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 2(8 - ap) = 2(8 - 5,66) = 4,68$ cm.

El lado del octógono mide 4,68 cm.

c) • En el apartado a) hemos calculado que el lado del cuadrado mide 11,31 cm. Su área es, por tanto:

$$A_{\text{CUADRADO}} = 128 \text{ cm}^2$$

• Calculamos el área del octógono:

$$A_{\text{OCTÓGONO}} = \frac{8 \cdot 4,68 \cdot 5,66}{2} = 105,96 \text{ cm}^2$$

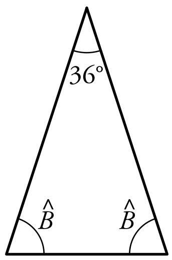
AUTOEVALUACIÓN

Página 183

1 **Calcula el ángulo central y el ángulo interior de un decágono regular.**

- Ángulo central $= \dfrac{360°}{10} = 36°$

- Ángulo interior:



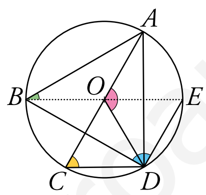
$36° + \widehat{B} + \widehat{B} = 180° \rightarrow \widehat{B} = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$

El ángulo interior mide $2\widehat{B} = 144°$.

2 **El triángulo *ABD* es equilátero.**

Calcula los ángulos coloreados:

$\widehat{ABE}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{ACD}$, $\widehat{BDE}$



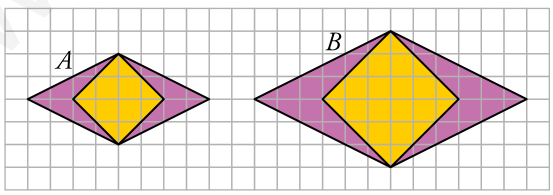
$\widehat{ABE} = \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

$\widehat{AOD} = \widehat{AD} = \dfrac{360°}{3} = 120°$

$\widehat{ACD} = \dfrac{\widehat{AD}}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$

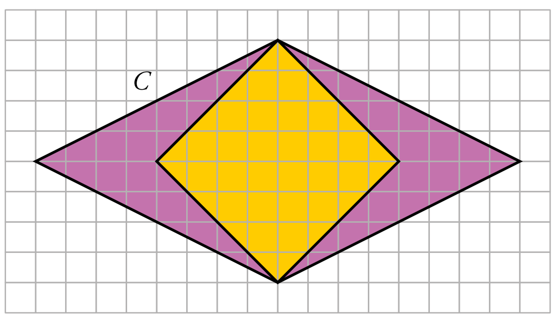
$\widehat{BDE} = \dfrac{\widehat{BE}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

3 ***A* y *B* son semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza?**



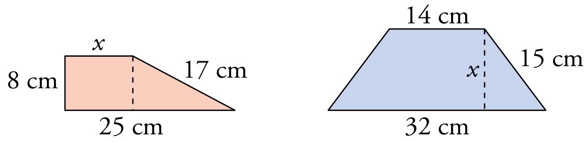
Dibuja en tu cuaderno otra figura semejante, *C*, de forma que la razón de semejanza *B/C* sea 3/4.

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{2}{3} \rightarrow$ La razón de semejanza de *A* y *B* es 2/3.

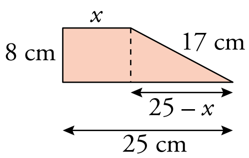


4 **a) Calcula x en cada uno de estos trapecios.**

b) Halla las longitudes de sus diagonales.



a)



$17^2 = 8^2 + (25 - x)^2$

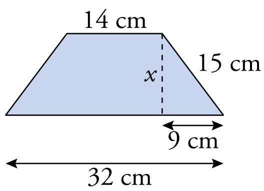
$289 = 64 + 625 - 50x + x^2$

$x^2 - 50x + 400 = 0$

$$x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 1\,600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2} \begin{cases} \dfrac{50+30}{2} = 40 \text{ cm} \\ \dfrac{50-30}{2} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$x = 40$ no vale porque es mayor que 25.

Solución: $x = 10$ cm.

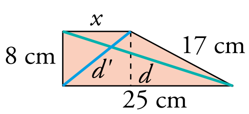


$15^2 = 9^2 + x^2 \rightarrow 225 = 81 + x^2 \rightarrow x^2 = 225 - 81$

$x = \sqrt{144} = 12$ cm

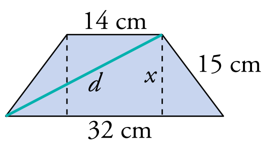
Solución: $x = 12$ cm.

b)



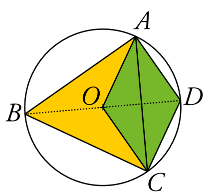
$d^2 = 8^2 + 25^2 = 689 \rightarrow d = \sqrt{689} = 26,2$ cm

$d'^2 = 8^2 + 10^2 = 164 \rightarrow d' = \sqrt{164} = 12,8$ cm



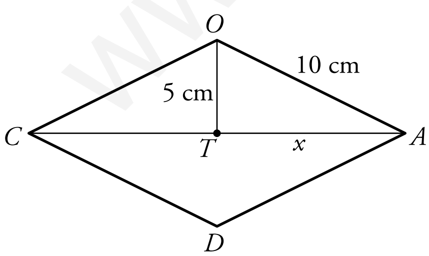
$d^2 = 23^2 + 12^2 = 673 \rightarrow d = \sqrt{673} = 25,9$ cm

5 **El triángulo *ABC* es equilátero y el radio de la circunferencia mide 10 cm. Calcula el área de los cuadriláteros:**



a) *AOCD* **b) *ABCO***

a)



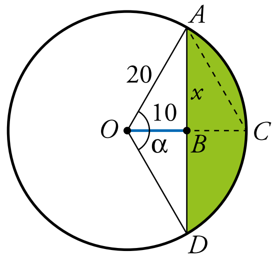
$x^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow x^2 = 75 \rightarrow x = 5\sqrt{3}$ cm

$$A_{OTA} = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_{AOCD} = 4 \cdot \left(\frac{25}{2} \cdot \sqrt{3}\right) = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 86,60 \text{ cm}^2$$

b) $A_{ABCO} = 4 \cdot A_{OTA} = A_{AOCD} = 86,60 \text{ cm}^2$

6 **En una circunferencia de radio 20 cm, se traza una cuerda a 10 cm del centro. Calcula el área del segmento circular delimitado por la cuerda y el arco correspondiente.**



Calculamos x: $20^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow x = 10\sqrt{3}$ cm

- El triángulo AOC es equilátero, por tanto, $\alpha = 120°$.
- Calculamos el área del sector circular de 120°:

$$A_{SECTOR} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 120}{360} = 418{,}88 \text{ cm}^2$$

- Calculamos el área del triángulo OAD:

$$A_{OAD} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 100\sqrt{3} = 173{,}21 \text{ cm}^2$$

- El área del segmento circular coloreado es el área del sector menos el área del triángulo OAD:

$$A_{SEGMENTO} = A_{SECTOR} - A_{OAD} = 418{,}88 - 173{,}21 = 245{,}67 \text{ cm}^2$$

12 FIGURAS EN EL ESPACIO

1 POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Página 185

1 **Describe cada uno de los cinco poliedros de arriba diciendo cómo son sus caras (por ejemplo, el C tiene siete caras, seis de ellas triángulos y una hexágono), cuántas aristas y cuántos vértices tiene.**

—A tiene 6 caras rectangulares, 12 aristas y 8 vértices.

—B tiene 5 caras. Dos de ellas, las bases, son triángulos y las tres caras laterales son rectángulos. Tiene 9 aristas y 6 vértices.

—C tiene siete caras, seis de ellas son triángulos y una, un hexágono. Tiene 12 aristas y 7 vértices.

—D tiene 12 caras. Dos de ellas son cuadrados, dos, rombos y las cuatro restantes son rectángulos. Tiene 24 aristas y 14 vértices.

—E tiene 8 caras. Dos de ellas, las bases, son hexágonos regulares, y las otras seis son trapecios isósceles. Tiene 18 aristas y 12 vértices.

—F tiene 2 caras. Una de ellas es un círculo que actúa como base, la otra, una cara curva. Tiene un único vértice y una arista. Es un cuerpo de revolución.

—G tiene 3 caras. Dos de ellas son círculos y actúan como bases, la tercera es una cara curva. No tiene vértices y tiene 2 aristas. Es un cuerpo de revolución.

—H tiene 7 caras. Cuatro de ellas son rectángulos. Tiene 15 aristas y 10 vértices.

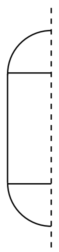
—I tiene 3 caras curvas, 2 aristas y ningún vértice.

—J tiene 3 caras. Dos de ellas planas y una curva. Tiene 3 aristas y 2 vértices.

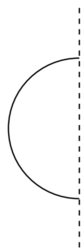
—K tiene una única cara circular. No tiene ni vértices ni aristas.

2 **Dibuja cómo se obtienen los cuerpos I y K haciendo girar una figura plana alrededor de un eje.**

I

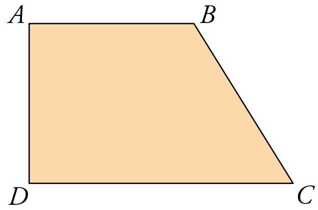


K

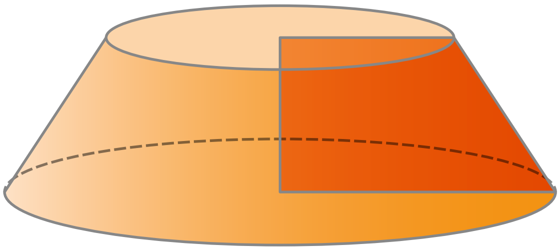


3 **Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene haciendo girar este trapecio alrededor de:**

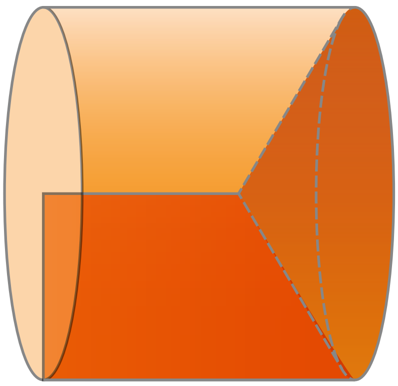
a) ***AD*** **b)** ***AB*** **c)** ***CD***



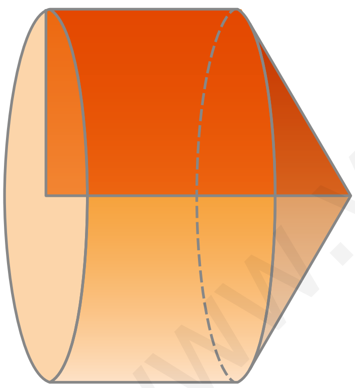
a) *AD*



b) *AB*



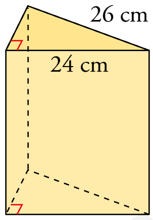
c) *CD*

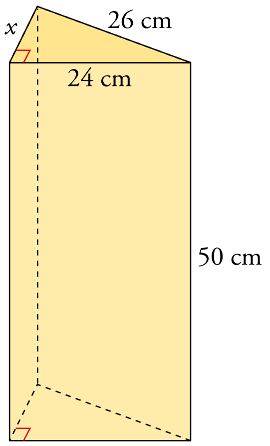


2 ▸ PRISMAS

Página 187

1 **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 26 cm, y uno de sus catetos, 24 cm. La altura del prisma es 50 cm. Halla el área total y el volumen del prisma.**





Calculamos la altura de la base:

$x^2 + 24^2 = 26^2 \to x^2 + 576 = 676 \to x^2 = 100 \to x = 10$ cm

PERÍMETRO DE LA BASE: $P = 10 + 24 + 26 = 60$ cm

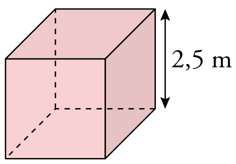
ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = P \cdot h = 60 \cdot 50 = 3\,000 \text{ cm}^2$

ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = \dfrac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 3\,000 + 2 \cdot 120 = 3\,240 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = A_{BASE} \cdot h = 120 \cdot 50 = 6\,000 \text{ cm}^3$

2 **Halla el área total y el volumen de un cubo de 2,5 m de arista.**



ÁREA DE UNA CARA: $l^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25 \text{ m}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 6{,}25 \cdot 6 = 37{,}5 \text{ m}^2$

VOLUMEN: $V = l^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625 \text{ m}^3$

3 **Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 5 cm y 8 cm.**

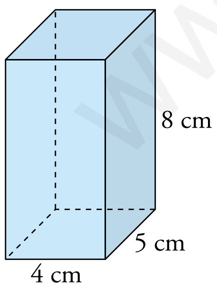
a) Dibújalo en tu cuaderno.

b) Dibuja su desarrollo. Escribe, al lado de cada arista, su longitud.

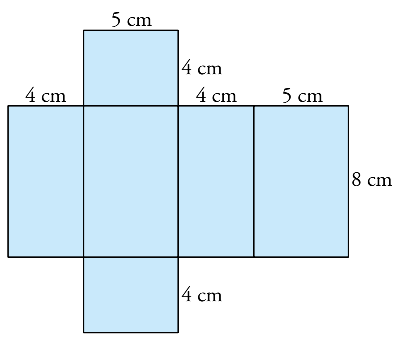
c) Halla su área.

d) Halla su volumen.

a)



b)



c) $A_{LAT} = P \cdot h = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 5) \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 144 + 2 \cdot (5 \cdot 4) = 184 \text{ cm}^2$

d) $V = A_{BASE} \cdot h = (5 \cdot 4) \cdot 8 = 160 \text{ cm}^3$

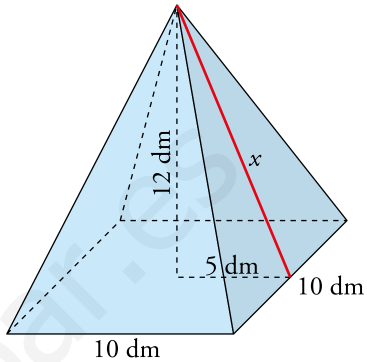
3 PIRÁMIDES

Página 189

1 **La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 dm de lado. Su altura, 12 dm. Halla su área y su volumen.**

Calculamos la apotema de la pirámide:

$x^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 25 + 144 \rightarrow x^2 = 169 \rightarrow x = \sqrt{169} \rightarrow x = 13$ dm



ÁREA DE UNA CARA: $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{10 \cdot 13}{2} = 65 \text{ dm}^2$

ÁREA DE LA BASE: $A_{BASE} = l^2 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = 100 + 4 \cdot 65 = 360 \text{ dm}^2$

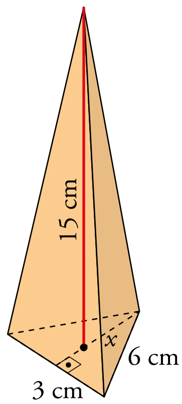
VOLUMEN: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 1\,200 = 400 \text{ dm}^3$

2 **Un triángulo equilátero de 6 cm de lado es la base de una pirámide regular cuya altura es 15 cm. Halla su área y su volumen.**

Calculamos la altura del triángulo equilátero:

$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow 36 = x^2 + 9 \rightarrow x^2 = 36 - 9 \rightarrow x^2 = 27 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{27} \rightarrow x = 5{,}2$ cm



$A_{BASE} = \frac{\text{base} \cdot h}{2} = \frac{5{,}2 \cdot 6}{2} \approx 15{,}6 \text{ cm}^2$

Calculamos la apotema de la pirámide:

El pie de la altura cae a $\frac{1}{3}$ de la altura de la base $\rightarrow \frac{1}{3} \cdot 50{,}2 = 1{,}73$ cm

$a^2 = 15^2 + (1{,}73)^2 \rightarrow a^2 \approx 225 + 3 \rightarrow a^2 \approx 228 \rightarrow a = \sqrt{228} \rightarrow$

$\rightarrow a \approx 15{,}1$ cm

ÁREA LATERAL: $A_{LAT} = \frac{\text{Perímetro de la base} \cdot a}{2} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 15{,}1}{2} = 135{,}9 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL: $A_{TOT} = A_{BASE} + A_{LAT} = 15{,}6 + 135{,}9 = 151{,}5 \text{ cm}^2$

VOLUMEN: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 15{,}6 \cdot 15 = 78 \text{ cm}^3$

4 POLIEDROS REGULARES

Página 190

1 **Haz una tabla en tu cuaderno en la que aparezcan el número de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros regulares.**

	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
C					
V					
A					

a) A partir de la tabla anterior, comprueba que el dodecaedro y el icosaedro cumplen las condiciones necesarias para ser duales.

b) Comprueba, también, que el tetraedro cumple las condiciones para ser dual de sí mismo.

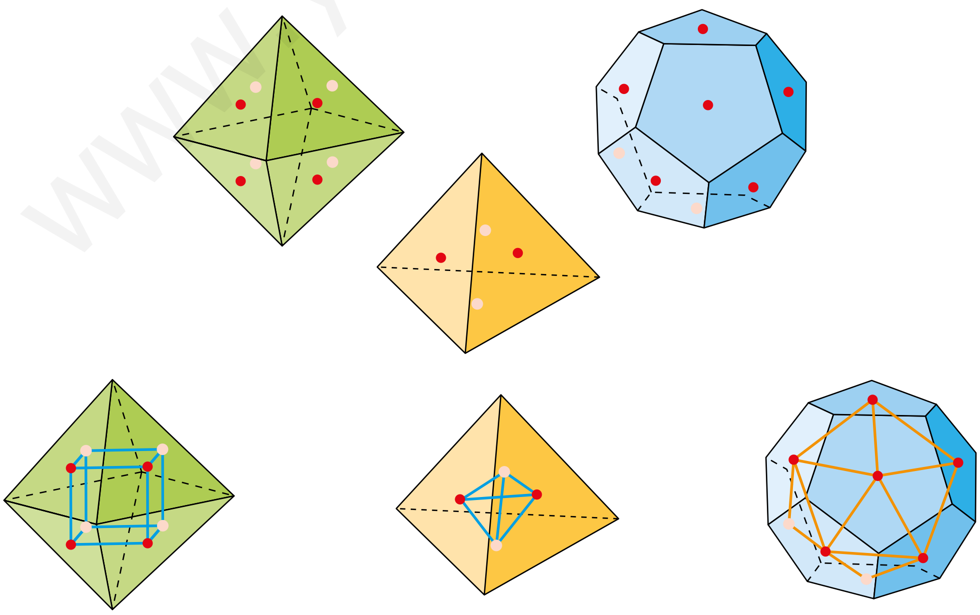
	TETR.	CUBO	OCT.	DODEC.	ICOS.
C	4	4	8	12	20
V	4	8	6	20	12
A	6	12	12	30	30

a) Efectivamente, tienen el mismo número de aristas y, el número de caras de cada uno de ellos, coincide con el de vértices del otro.

b) Obviamente tiene el mismo número de aristas. El número de vértices y caras son iguales.

2 **Hemos señalado en rojo los centros de las caras «frontales» de estos poliedros, y en rosa, los centros de algunas caras «ocultas».**

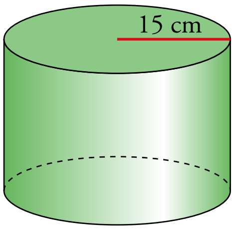
Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.



5 CILINDROS

Página 191

1 **Halla el área total y el volumen de un cilindro recto del que conocemos sus dimensiones: r = 15 cm y h = 2 dm.**



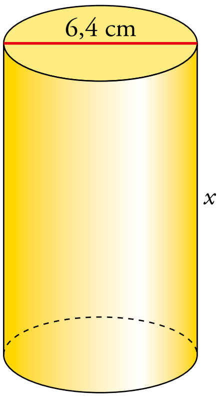
$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 15 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi = 706{,}86 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 1\,884{,}96 + 2 \cdot 706{,}86 = 3\,298{,}68 \text{ cm}^2$

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 4\,500\pi = 14\,137{,}17 \text{ cm}^2$

2 **Un bote cilíndrico de 1/3 de litro tiene un diámetro de 6,4 cm. Halla su altura en milímetros, y la superficie de la lata con la que está construido.**



Volumen = $\frac{1}{3}\ l = \frac{1}{3}$ dm^3

Radio = 3,2 cm = 0,32 dm

$V = \pi r^2 \cdot h \to \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}32^2 \cdot x \to \frac{1}{3} = \pi \cdot 0{,}1024 \cdot x \to$

$\to x = \frac{1}{3 \cdot \pi \cdot 0{,}1024} \to x = 1{,}03 \text{ dm} = 103 \text{ mm}$

$A_{LAT} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 3{,}2 \cdot 10{,}3 = 207{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3{,}2^2 = 32{,}17 \text{ cm}^2$

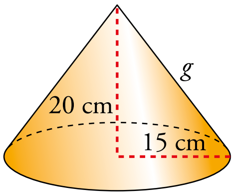
$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 207{,}1 + 2 \cdot 32{,}17 = 271{,}4 \text{ cm}^2$

La altura del bote mide 103 mm y la superficie necesaria para construirlo es 271,4 cm^2.

6 CONOS

Página 192

1 **Halla el área total y el volumen de un cono recto del que conocemos sus dimensiones: r = 15 cm y h = 2 dm.**

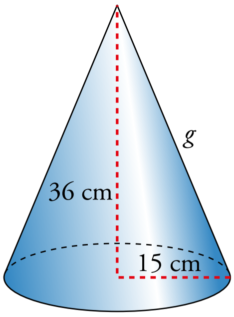


$$g = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 25 + \pi \cdot 15^2 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1\,500\pi = 4\,712{,}39 \text{ cm}^3$$

2 **Halla el área total y el volumen de un cucurucho cónico de 36 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base.**



$$g = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{1\,521} = 39 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 15 \cdot 39 + \pi \cdot 15^2 = 810\pi = 2\,544{,}69 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 36 = 2\,700\pi = 8\,482{,}3 \text{ cm}^3$$

7 ESFERAS

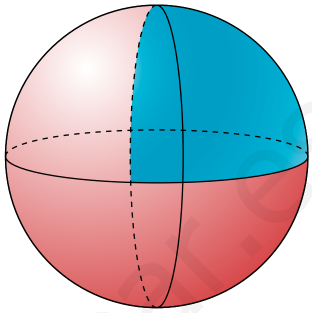
Página 193

1 **Halla el área total y el volumen de un trozo de esfera que es una cuarta parte de esfera de 1 m de diámetro.**

$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi \approx 3{,}14 \text{ m}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}5^2 = 0{,}25\pi \approx 0{,}79 \text{ m}^2$

$V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 = 0{,}52 \text{ m}^3$



Calculamos el área y el volumen de la cuarta parte de la esfera:

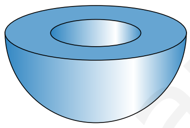
$$A = \frac{A_{\text{ESFERA}}}{4} + 2 \cdot \frac{A_{\text{CÍRCULO}}}{2} = \frac{3,14}{4} + 0,79 \approx 1,58 \text{ m}^2 = 158 \text{ dm}^2$$

$$V = \frac{V_{\text{ESFERA}}}{4} = 0,13 \text{ m}^3$$

2 **Radio exterior = 10 cm**

Radio interior = 5 cm

Halla el área total y el volumen.



$A_{\text{ESFERA GRANDE}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2 \approx 1\,256{,}64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ESFERA PEQUEÑA}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ cm}^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CORONA CIRCULAR}} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100\pi - 25\pi = 75\pi \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{TOTAL}} = \frac{1\,256,64}{2} + \frac{314,16}{2} + 235,62 = 1\,021,02 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3\right] = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 875 \approx 1\,835,6 \text{ cm}^3$$

8 ▶ COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Página 195

1 **El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.* Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros.**

Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

a) Meridiano = Perímetro = $2\pi \cdot R = 40\,000\,000$ m $= 40\,000$ km

$R \approx 6\,366{,}2$ km

b) Superficie = $4\pi \cdot (6\,366{,}2)^2 = 509\,296\,182{,}1 \text{ km}^2$

c) Volumen = $\frac{4}{3}\pi \cdot (6\,366{,}2)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$

d) Área huso horario = $\frac{509\,296\,182{,}1}{24} = 21\,220\,674{,}25 \text{ km}^2$

2 **Un barco va de un punto *A*, situado en las costas de África a 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro punto *B*, con la misma latitud y 80° de longitud oeste, siguiendo el paralelo común.**

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

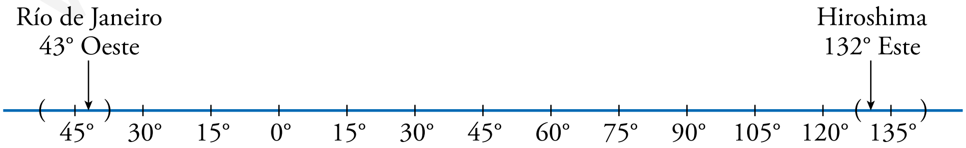
a) Entre A y B hay un arco de $80° - 10° = 70°$

Como hemos visto en el problema resuelto de esta página, el perímetro del paralelo 30° es 34 641,1 km.

Por tanto, la distancia de A a B es $\frac{34\,641{,}1}{360°} \cdot 70° \approx 6\,735{,}77$ km.

b) $\frac{34\,641{,}1}{2} = 17\,320{,}55$ km.

3 **En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)?**



Hay 12 horas de diferencia. Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde.

Otra forma de hacerlo es: $132° = 15° \cdot 8 + 12$

Hiroshima está en el huso horario número 9 al este.

$43° = 15° \cdot 2 + 13$

Río de Janeiro está en el huso horario número 3 al oeste.

Están, pues, a 12 husos horarios de diferencia.

Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde (19 h).

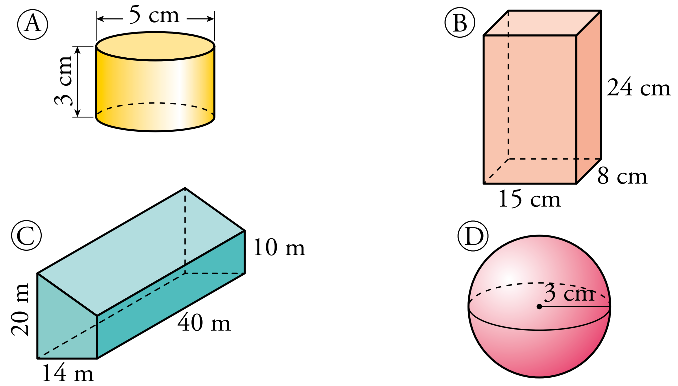
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 196

Practica

Desarrollos y áreas

1 **Calcula la superficie total de cada cuerpo:**

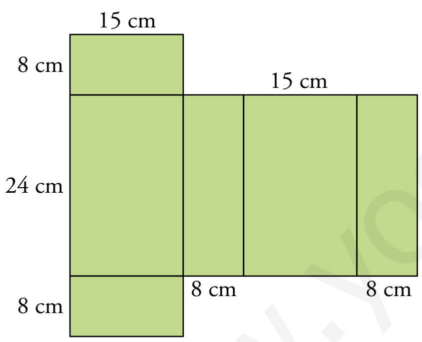


A $A_{\text{BASE}} = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = 19{,}63 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 3 = 15\pi = 47{,}12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 19{,}63 + 47{,}12 = 86{,}38 \text{ cm}^2$

B

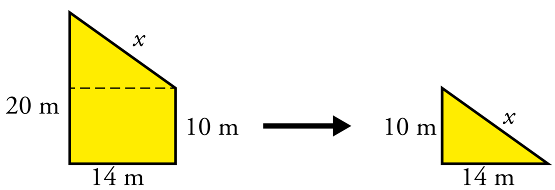


$A_{\text{BASE}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 15 \cdot 8 = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (2 \cdot 15 + 2 \cdot 8) \cdot 24 = 1\,104 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 1\,104 + 2 \cdot 120 = 1\,344 \text{ cm}^2$

C Tomamos como base uno de los trapecios.



$x^2 = 10^2 + 14^2 \rightarrow x^2 = 296$

$x = \sqrt{296} = 17{,}20 \text{ m}$

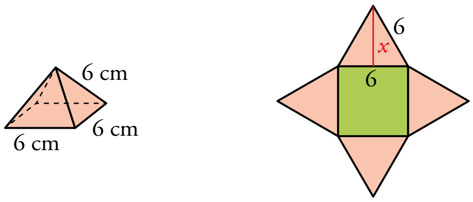
$$A_{\text{BASE}} = \frac{(20 + 10) \cdot 14}{2} = 210 \text{ m}^2$$

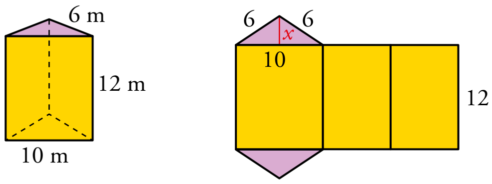
$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (14 + 10 + 17{,}20 + 20) \cdot 40 = 61{,}2 \cdot 40 = 2\,448 \text{ m}^2$

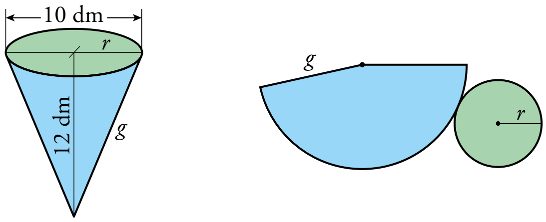
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 210 + 2\,448 = 2\,868 \text{ m}^2$

D $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 113{,}10 \text{ cm}^2$

2 **Observa las figuras y sus desarrollos, utiliza el teorema de Pitágoras para calcular los datos que faltan y calcula el área total en cada caso:**

a)


b)


c)


a) $6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow x^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow x = 5{,}20$ cm

$A_{\text{BASE}} = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \left(\dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2}\right) = 62{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 36 + 62{,}4 = 98{,}4 \text{ cm}^2$

b) $6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow x = 3{,}32$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{10 \cdot 3{,}32}{2} = 16{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} =$ perímetro de la base · alura = $(10 + 6 + 6) \cdot 12 = 22 \cdot 12 = 264 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 16{,}6 + 264 = 297{,}2 \text{ cm}^2$

c) $r = 5$ dm

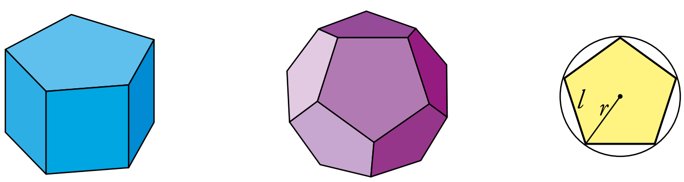
$g^2 = 12^2 + 52^2 = 169 \rightarrow g = \sqrt{169} = 13$ dm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 = 282{,}74 \text{ dm}^2$

3 **Calcula la superficie de:**

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.



El radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono de lado l es $r = 0{,}85 \cdot l$.

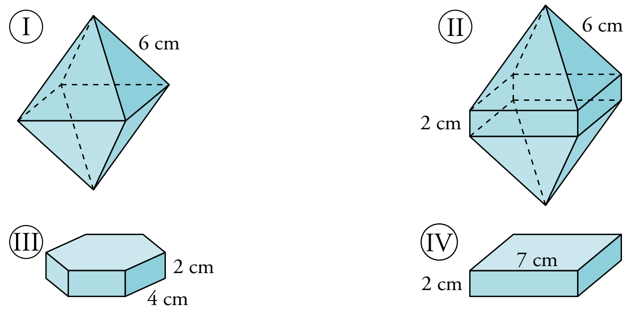
a) Apotema del pentágono = 6,88 cm

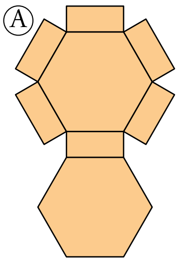
$S_{\text{BASE}} = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$ $\qquad S_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^2$

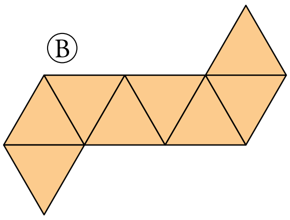
$S_{\text{TOTAL}} = 172 \cdot 2 + 500 = 844 \text{ cm}^2$

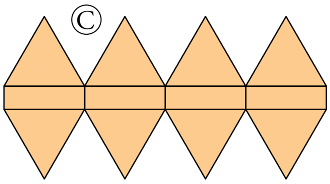
b) $S_{\text{TOTAL}} = S_{\text{PENTÁGONO}} \cdot 12 = 172 \cdot 12 = 2\,064 \text{ cm}^2$

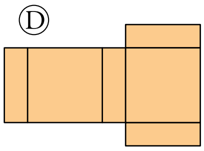
4 **Haz corresponder cada figura con su desarrollo y calcula el área total:**



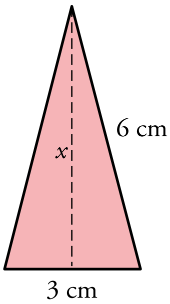








I → B



$6^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow x^2 = 27 \rightarrow x = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 8 \cdot 15{,}6 = 124{,}8 \text{ cm}^2$

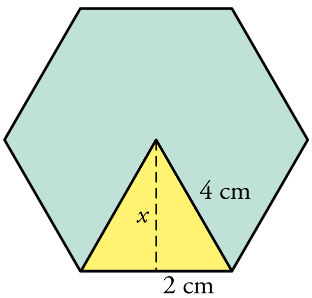
II → C

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 12 + 8 \cdot 15{,}6 = 172{,}8 \text{ cm}^2$

III → A



$4^2 = x^2 + 2^2 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \sqrt{12} = 3{,}5$ cm

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \dfrac{24 \cdot 3{,}5}{2} = 42 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 42 + 6 \cdot 8 = 132 \text{ cm}^2$

Ⓘⓥ → Ⓒ

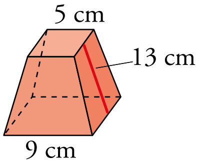
$A_{\text{CUADRADO}} = 7 \cdot 7 = 49 \text{ cm}^2$

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2 \cdot 7 = 14 \text{ cm}^2$

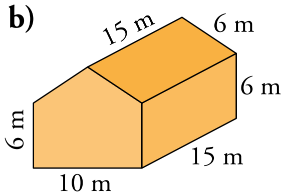
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 49 + 4 \cdot 14 = 154 \text{ cm}^2$

5 **Dibuja en tu cuaderno, a mano alzada, el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos:**

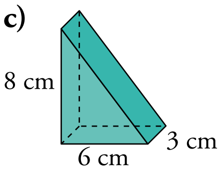
a)



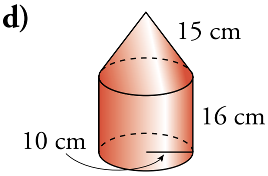
b)



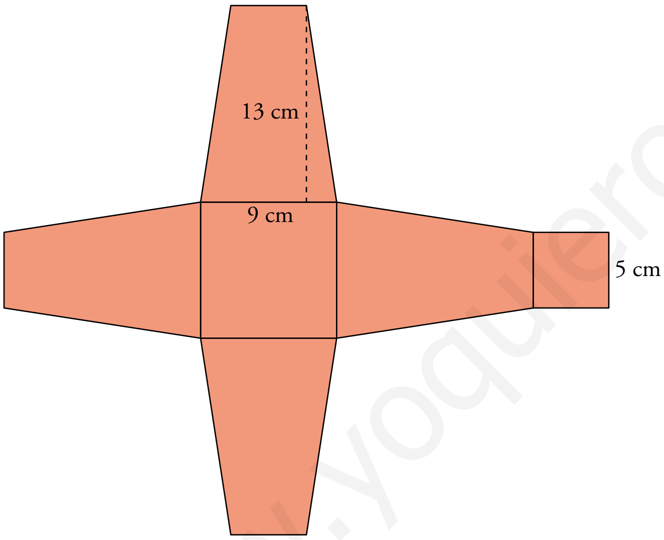
c)



d)



a)



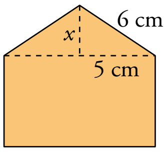
$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura} = \frac{9+5}{2} \cdot 13 = 91 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 4 \cdot 91 = 364 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MAYOR}} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE MENOR}} = l^2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

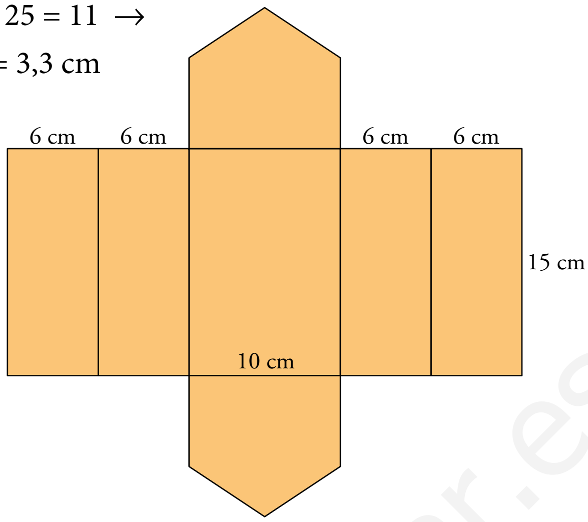
$A_{\text{TOTAL}} = 25 + 81 + 364 = 470 \text{ cm}^2$

b) 

Tomamos como base uno de los pentágonos.

$6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{11} = 3{,}3$ cm



$A_{\text{BASE}} = A_{\text{TRIÁNGULO}} + A_{\text{RECTÁNGULO}} =$

$= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \text{base} \cdot \text{altura}$

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{10 \cdot 3{,}3}{2} + 6 \cdot 10 = 76{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} =$

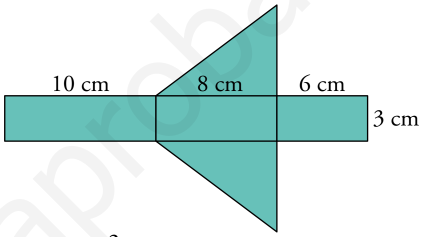
$= (6 \cdot 4 + 10) \cdot 15 = 510 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 510 + 2 \cdot 76{,}5 = 663 \text{ cm}^2$

c) Calculamos lo que mide la hipotenusa del triángulo:

$x^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \rightarrow x = 10$ cm

Tomamos como base uno de los triángulos:

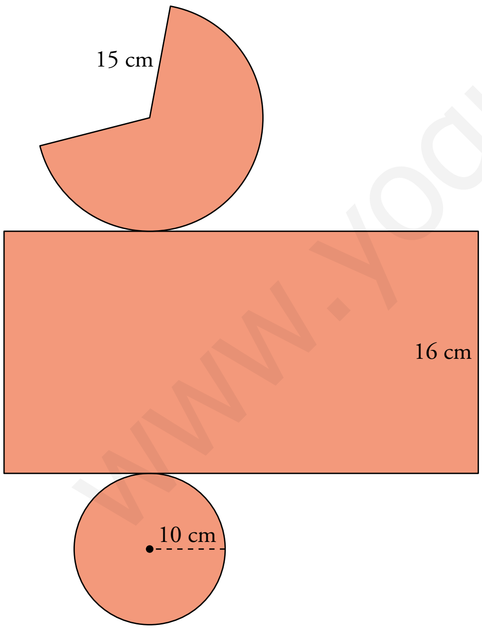


$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (10 + 8 + 6) \cdot 3 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 72 + 2 \cdot 24 = 120 \text{ cm}^2$

d)



$A_{\text{CONO}} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 15 = 150\pi = 471{,}24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi = 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 16 = 320\pi =$
$= 1\,005{,}31 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 471{,}24 + 314{,}16 + 1\,005{,}31 =$
$= 1\,790{,}71 \text{ cm}^2$

6 **Dibuja estos cuerpos geométricos y calcula su área:**

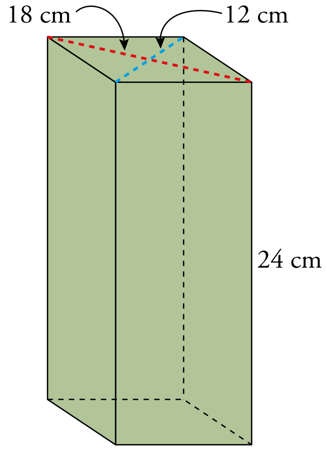
a) Prisma de altura 24 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Pirámide regular de altura 25 cm y base cuadrada de lado 9 cm.

c) Cilindro de altura 17 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.

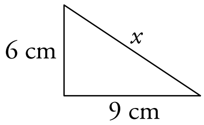
d) Esfera inscrita en un cilindro de altura 1 m.

a)



$$A_{BASE} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$

Calculamos la arista de la base:

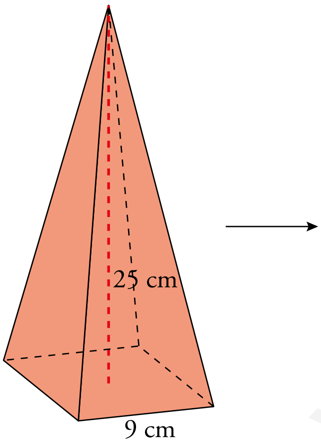


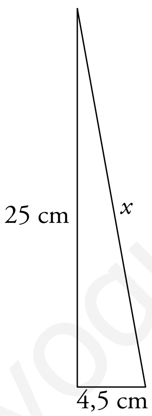
$$x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{117} = 10{,}8 \text{ cm}$$

$$A_{LATERAL} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (4 \cdot 10{,}8) \cdot 24 =$$
$$= 1\,036{,}8 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 108 + 1\,036{,}8 = 1\,144{,}8 \text{ cm}^2$$

b) Calculamos la altura de una cara:





$$x^2 = 25^2 + 4{,}5^2 \rightarrow x^2 = 625 + 20{,}25 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 = 645{,}25 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{645{,}25} = 25{,}4 \text{ cm}$$

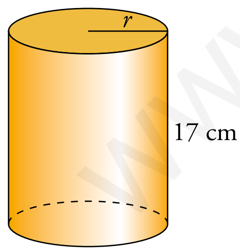
$$A_{TRIÁNGULO} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{9 \cdot 25{,}4}{2} = 114{,}3 \text{ cm}^2$$

$$A_{LATERAL} = 4 \cdot 114{,}3 = 457{,}2 \text{ cm}^2$$

$$A_{BASE} = l^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 81 + 457{,}2 =$$
$$= 538{,}2 \text{ cm}^2$$

c)



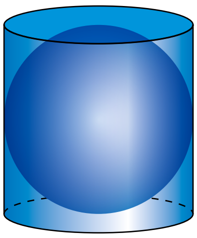
$$44 = 2\pi r \rightarrow r = \frac{44}{2\pi} = 7 \text{ cm}$$

$$A_{LATERAL} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 7 \cdot 17 = 238\pi = 747{,}7 \text{ cm}^2$$

$$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 49\pi = 153{,}9 \text{ cm}^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + 2A_{BASE} = 747{,}7 + 2 \cdot 153{,}9 = 1\,055{,}5 \text{ cm}^2$$

d)



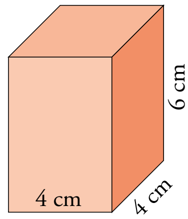
$$r = 0{,}5 \text{ m}$$

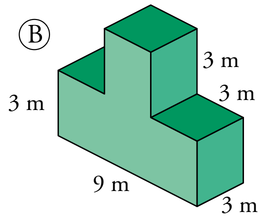
$$A_{TOTAL} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}5^2 = \pi = 3{,}14 \text{ cm}^2$$

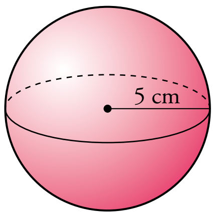
Página 197

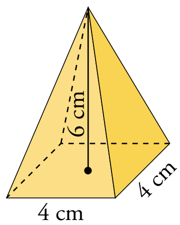
Volúmenes

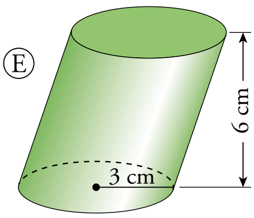
7 Calcula el volumen de estos cuerpos:

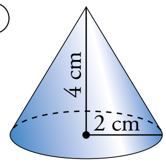
Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓔ


Ⓕ


Ⓐ $V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 4^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$

Ⓑ $V_1 = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = (9 \cdot 3) \cdot 3 = 81 \text{ m}^2$

$V_2 = l^3 = 27 \text{ m}^3$

$V = V_1 + V_2 = 81 + 27 = 108 \text{ m}^3$

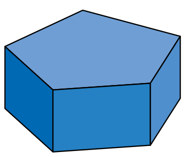
Ⓒ $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} = 523{,}60 \text{ cm}^3$

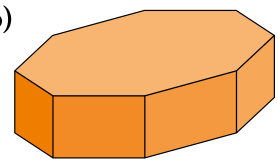
Ⓓ $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{l^2 \cdot h}{3} = \dfrac{4^2 \cdot 6}{3} = 32 \text{ cm}^3$

Ⓔ $V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi = 169{,}65 \text{ cm}^3$

Ⓕ $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} = \dfrac{16\pi}{3} = 16{,}76 \text{ cm}^3$

8 Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares. En ambos, arista básica = 10 cm; altura = 8 cm.

a)


b)


La apotema del pentágono regular es $a = 0{,}68 \cdot l$. La apotema del octógono regular es $a = 0{,}2 \cdot l$.

a) $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \dfrac{(10 \cdot 5) \cdot (0{,}68 \cdot 10)}{2} = 170 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (10 \cdot 5) \cdot (8) = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 170 + 400 = 740 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = 170 \cdot 8 = 1\,360 \text{ cm}^3$

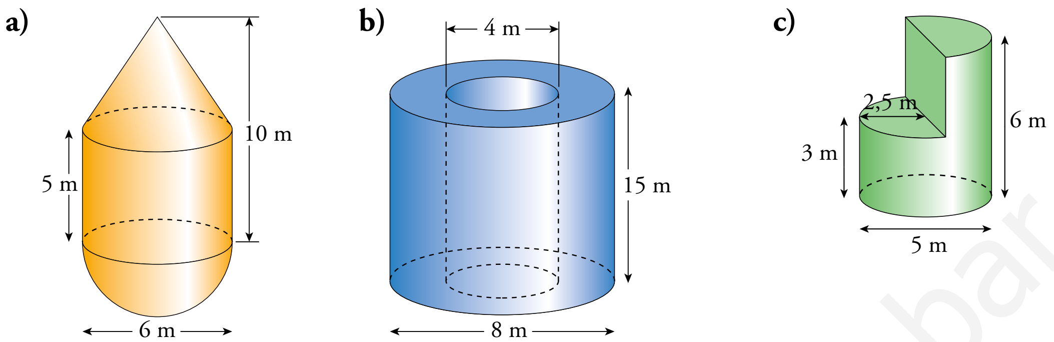
b) $A_{BASE} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \dfrac{(10 \cdot 8) \cdot (1{,}2 \cdot 10)}{2} = 480 \text{ cm}^2$

$A_{LATERAL} = \text{perímetro} \cdot \text{altura} = (10 \cdot 8) \cdot (8) = 640 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = 2 \cdot 480 + 640 = 1\,600 \text{ cm}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 480 \cdot 8 = 3\,840$

9 **Calcula el volumen de estos cuerpos:**



a) Descomponemos el cuerpo en un cono, un cilindro y una semiesfera. Calculamos primero la generatriz del cono, g.

$g = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83 \text{ cm}$

$A = \pi rg + 2\pi rh + \dfrac{4\pi r^2}{2} = \pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + \dfrac{4\pi 3^2}{2} \approx 205{,}74 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 h + \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \dfrac{1}{3}\pi 3^2 5 + \pi 3^2 5 + \dfrac{\frac{4}{3}\pi 3^3}{2} \approx 207{,}35 \text{ cm}^3$

b) Descomponemos el cuerpo en dos cilindros, uno dentro de otro.

$A = 2(\pi R^2 - \pi r^2) + 2\pi Rh + 2\pi rh = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi h(R + r) =$

$= 2\pi(4^2 - 2^2) + 2\pi 15(4 + 2) \approx 640{,}88 \text{ cm}^2$

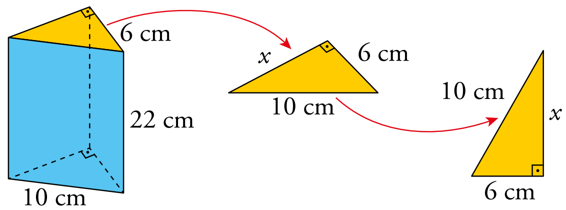
$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = \pi 15(4^2 - 2^2) \approx 565{,}49 \text{ cm}^3$

c) El volumen será $\dfrac{3}{4}$ del volumen de un cilindro recto de radio de la base 2,5 m y de altura de 6 m.

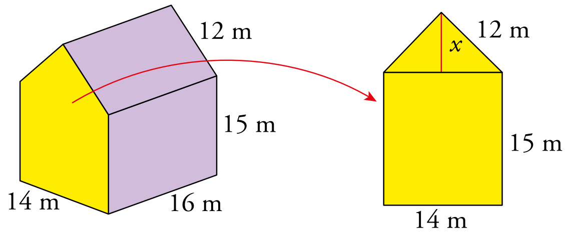
$V = \dfrac{3}{4}(A_{BASE} \cdot \text{altura}) = \dfrac{3}{4}(\pi \cdot r^2 \cdot h) = \dfrac{3}{4}(\pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 6) = 88{,}36 \text{ cm}^3$

10 Observa, utiliza el teorema de Pitágoras para calcular los datos que faltan y calcula el volumen de cada figura:

Ⓐ



Ⓑ



Ⓐ $10^2 = x^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = 8$ cm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \left(\dfrac{6 \cdot 8}{2}\right) \cdot 22 = 528 \text{ cm}^3$

Ⓑ Tomamos como base el pentágono amarillo.

$12^2 = x^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 95 \rightarrow x = 9{,}75$ m

$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \left(15 \cdot 14 + \dfrac{14 \cdot 9{,}75}{2}\right) \cdot 16 = (210 + 68{,}25) \cdot 16 = 278{,}25 \cdot 16 = 4452 \text{ m}^3$

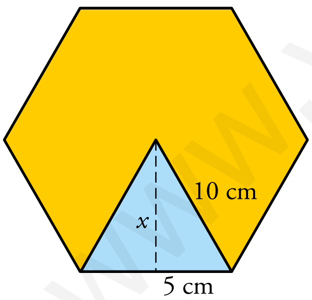
11 Calcula el volumen de:

a) Una pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 17 cm y la arista de la base 10 cm.

b) Un cono recto con 5 cm de radio en la base y 13 cm de generatriz.

c) Cilindro circunscrito a un prisma recto de base cuadrada de lado 10 cm y altura 18 cm.

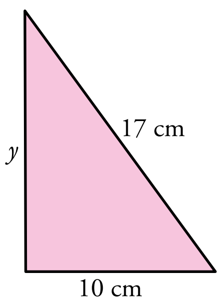
a) • Calculamos la apotema de la base y su área:



$10^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 75 \rightarrow x = 8{,}66$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$

• Calculamos la altura de la pirámide

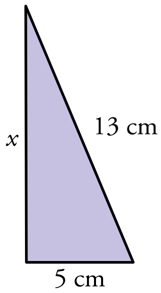


$17^2 = y^2 + 10^2 \rightarrow y^2 = 189 \rightarrow y = 13{,}75$ cm

- Calculamos el volumen de la pirámide:

  $V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 259{,}8 \cdot 13{,}75 = 1\,190{,}75 \text{ cm}^3$

b) • Calculamos la altura del cono:



$13^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = 12 \text{ cm}$

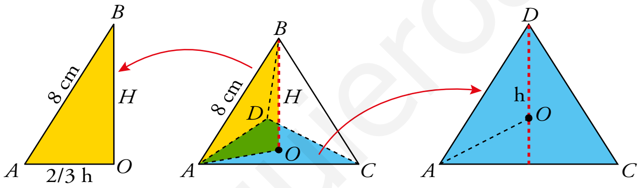
- $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314{,}16 \text{ cm}^3$

c) El radio de la base del cilindro mide 5 cm, y su altura, 18 cm.:

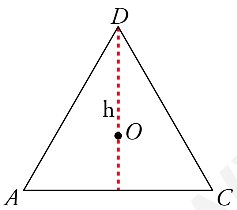
$V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{altura} = \cdot\, \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 1\,413{,}72 \text{ cm}^3$

12 **Halla el área y el volumen de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Para ello:**

- **No confundas la altura de la pirámide, *H*, con la altura, h, del triángulo equilátero sobre el que se apoya (la base).**
- **Para hallar *H*, recuerda que $\overline{AO} = \overline{DO} = 2/3$ h.**



Calculamos lo que mide la altura *h*:



$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h = 6{,}93 \text{ cm}$

$A_{BASE} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$

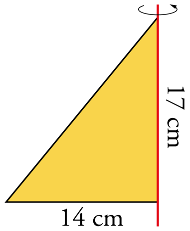
$A_{TOTAL} = 4 \cdot A_{BASE} = 110{,}88 \text{ cm}^2$

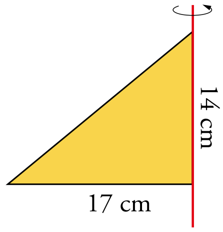
Calculamos lo que mide la altura *H* del tetraedro:

$$H^2 = 8^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 = 42{,}66 \rightarrow H = 6{,}53 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$$

13 **Hacemos girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 14 cm y 17 cm alrededor de cada uno de ellos, obteniendo así dos conos distintos.**

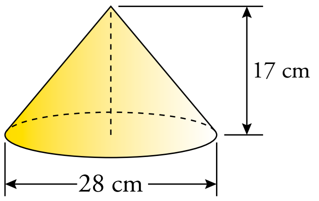




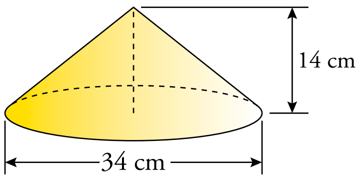
a) ¿Cuál de ellos tiene más volumen?

b) ¿Qué porcentaje de volumen tiene más uno que otro?

a)



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 14^2 \cdot 17 = 3\,489,26 \text{ cm}^3$$



$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = 4\,236,96 \text{ cm}^3$$

El cono que tiene radio 17 cm es el que tiene más volumen.

b) El cono que tiene más volumen tiene aproximadamente un 21 % más de volumen que el otro.

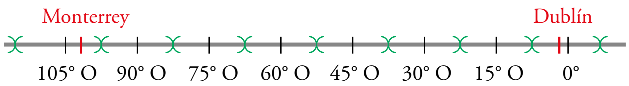
Página 198

Coordenadas geográficas

14 **Si en el huso 0 son las 8 a. m., ¿qué hora le corresponde al tercer huso al este? ¿Y al quinto al oeste?**

- En el uso al este son 3 horas más, las 11 a.m.
- En el quinto al oeste son 5 horas menos, las 3 a.m.

15 **Sabemos que en Dublín (longitud 6° O) son las 9 de la mañana. Utilizando este esquema, indica qué hora teórica le corresponde a Monterrey (100° O).**



En Monterrey son 7 horas menos, las 2 de la mañana.

16 **Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p. m., el vuelo dura 8 h y se siguieran las horas teóricas de sus correspondientes husos, ¿a qué hora local de Nueva York llegaría?**

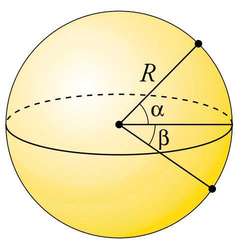
En Nueva York hay 6 horas menos que en Roma. Por tanto, cuando el avión sale de Roma son las 11-6 = 5 p.m. en Nueva York. Si el vuelo dura 8 horas, el avión llega a la 1 a.m., hora de Nueva York, del día siguiente.

17 **Si en La Habana (82° O) son las 8 p. m., asigna la hora teórica (según los husos horarios) a cada ciudad.**

Maputo (Mozambique)	**2 p. m.**
Natal (Brasil)	**3 a. m.**
Astaná (Kazajistán)	**8 p. m.**
Temuco (Chile)	**0 a. m.**
Honolulú (Hawái)	**11 a. m.**
Dakar (Senegal)	**11 p. m.**
Katmandú (Nepal)	**6 a. m.**
Melbourne (Australia)	**7 a. m.**

Maputo (32° E) $\rightarrow$ 3 a.m.	Natal $\rightarrow$ 11 p.m.
Astaná (71° E) $\rightarrow$ 6 a.m.	Temuco (73° O) $\rightarrow$ 8 p.m.
Honolulú (158° O) $\rightarrow$ 2 p.m.	Dakar (16° O) $\rightarrow$ 0 a.m.
Katmandú (85° E) $\rightarrow$ 7 a.m.	Melbourne (144° E) $\rightarrow$ 11 a.m.

18 **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



$\alpha = 37° \, 25'$

$\beta = 22° \, 35'$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $\alpha + \beta = 37° \, 25' + 22° \, 35' = 60°$

$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 60}{360} \approx 6\,670{,}65 \text{ km}$$

19 **La «milla marina» es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1'. Calcula la longitud de una milla marina.**

$1' = \frac{1}{60}$ grados; radio de la Tierra: $R \approx 6\,370$ km

Milla marina $\rightarrow \dfrac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \dfrac{2\pi R}{21\,600} \approx \dfrac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1{,}85$ km

20 **Alejandría, Nueva Orleans y Houston tienen todas la misma latitud, 30° N. Sus longitudes son, respectivamente, 30° E, 90° O y 95° O. ¿Qué distancia recorrería un avión que va de Alejandría a Nueva Orleans por el paralelo 30° N? ¿Y de Alejandría a Houston?**

Utilizando el ejercicio resuelto de la página 195, sabemos que el paralelo 30° tiene una longitud de 34 646 km aproximadamente.

Entre Alejandría y Nueva Orleans hay un arco de 90° – 30° = 60°; por tanto, la distancia entre ellos es $\dfrac{34\,346}{360°} \cdot 60° \approx 5\,724{,}33$ km.

Entre Alejandría y Houston hay un arco de 95° – 30° = 65°, por lo que la distancia entre ellos es $\dfrac{34\,346}{360°} \cdot 65° \approx 6\,201{,}36$ km.

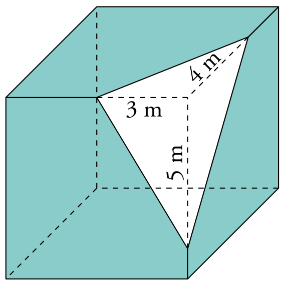
Resuelve problemas

21 **Observa que al seccionar un cubo como indica la figura, se obtiene de la esquina cortada una pirámide triangular.**

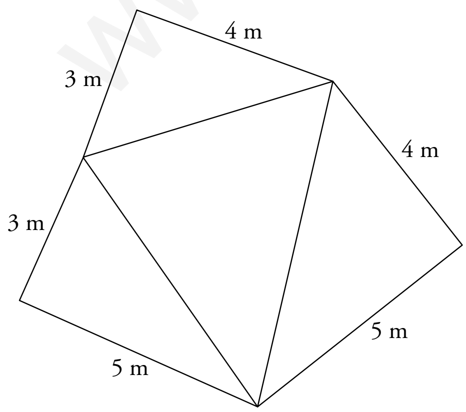
a) Dibuja el desarrollo de dicha pirámide.

b) Calcula su superficie lateral considerando la sección como base.

c) Calcula su volumen (apóyala sobre uno de los triángulos rectángulos).



a)



b) $A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{3 \cdot 5}{2} + \dfrac{3 \cdot 4}{2} + \dfrac{4 \cdot 5}{2} = \dfrac{47}{2} = 23{,}5 \text{ cm}^2$

c) $V = \dfrac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20 \text{ cm}^3$

22 **Un dependiente envuelve una caja de zapatos de 30 cm de larga, 18 cm de ancha y 10 cm de alta con un trozo de papel, de forma que un 15 % del envoltorio queda solapado sobre sí mismo. ¿Qué cantidad de papel ha utilizado?**

Calculamos el área total de la caja de zapatos:

$A_{\text{BASE}} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = (2 \cdot 30 + 2 \cdot 18) \cdot 10 = 960 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 540 + 960 = 2\,040 \text{ cm}^2$

Habrá utilizado un 15 % más de la superficie de la caja $\to$ $2\,040 \cdot 1{,}15 = 2\,346 \text{ cm}^2$

Ha utilizado $2\,346 \text{ cm}^2$ de papel para envolverlo.

23 **Una empresa de carburantes tiene cuatro tanques esféricos de 20 m de diámetro y seis tanques cilíndricos de 20 m de altura y 10 m de radio en la base.**

Para evitar la corrosión, se contrata a un equipo de operarios que cobra, por pintar los depósitos, 12 €/m². Calcula el coste total de la operación.

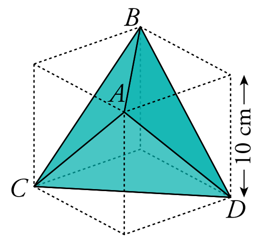
$A_{\text{ESFERA}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi = 1\,256{,}6 \text{ m}^2$

$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 + 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 600\pi = 1\,884{,}96 \text{ m}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 1\,256{,}6 + 6 \cdot 1\,884{,}96 = 16\,336{,}16 \text{ m}^2$

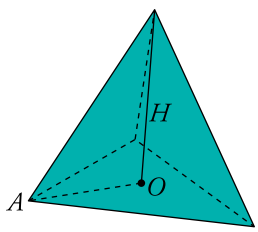
Coste $= 12 \cdot 16\,336{,}16 = 196\,033{,}92$ €

El coste total de la operación es de 196 033,92 €.



24 **Este es el mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista. Halla su superficie y su volumen.**

Calculamos el lado del tetraedro:



$l^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \ \to\ l = 14{,}14 \text{ cm}$

Recordamos que $\overline{AO} = \dfrac{2}{3}h$. Por tanto, tenemos que hallar la altura del triángulo.

$h^2 = 14{,}14^2 - 7{,}07^2 \ \to\ h = 12{,}24 \text{ cm}$

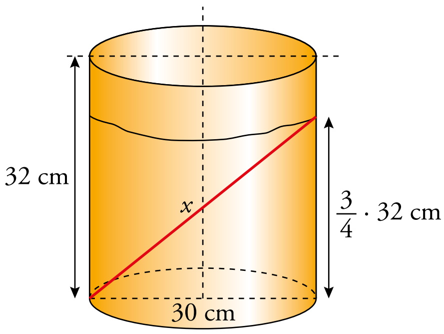
$H^2 = 14{,}14^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot 12{,}24\right)^2 = 133{,}29 \ \to\ H = 11{,}54 \text{ cm}$

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 14{,}14 \cdot 12{,}24 = 86{,}54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 86{,}54 = 346{,}15 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot 86{,}54 \cdot 11{,}54 = 332{,}89 \text{ cm}^3$

25 **Un bidón de pintura de forma cilíndrica, de 32 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base, está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que se habrá sumergido totalmente en la pintura?**



La altura de la pintura es $\dfrac{3}{4} \cdot 32 = 24$ cm

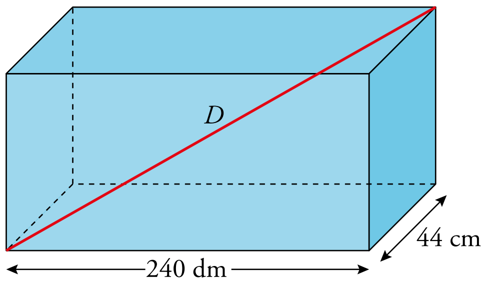
$x^2 = 24^2 + 30^2 = 576 + 900 = 1\,476 \ \to$

$\to\ x = \sqrt{1\,476} = 38{,}4 \text{ cm}$

$40 \text{ cm} > 38{,}4 \text{ cm}$

Solución: No, no se sumergirá del todo. Un pico de 0,6 cm se quedará asomando.

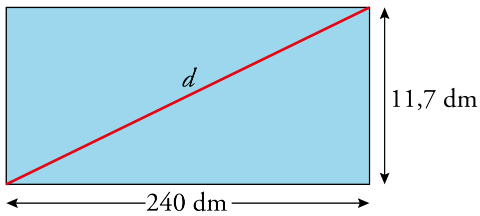
26 **La base de un ortoedro mide 240 cm × 44 cm. Su volumen es 1 235,52 dm³. Calcula las diagonales de sus caras y la diagonal principal.**



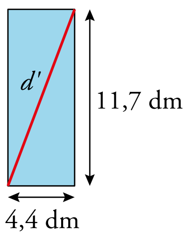
240 cm = 24 dm

44 cm = 4,4 dm

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h \;\rightarrow\; 1\,235{,}52 = 24 \cdot 4{,}4 \cdot h \;\rightarrow\; h = 11{,}7 \text{ dm}$



$d^2 = 11{,}7^2 + 24^2 \;\rightarrow\; d = 26{,}7 \text{ dm}$



$d'^2 = 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \;\rightarrow\; d' = 12{,}5 \text{ dm}$

$D = 24^2 + 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \;\rightarrow\; D = 27{,}06 \text{ dm}$

27 **Se introduce una bola de piedra de 12 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 12 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

a) $V_{\text{BOLA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi = 904{,}78 \text{ cm}^3$

Se han derramado 904,78 cm³ de agua.

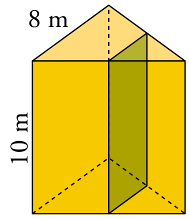
b) Llamamos h a la altura que alcanza el agua.

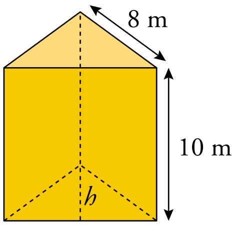
$904{,}78 = 12 \cdot 12 \cdot h \;\rightarrow\; 904{,}78 = 144h \;\rightarrow\; h = \frac{904{,}78}{144} = 6{,}28 \text{ cm}$

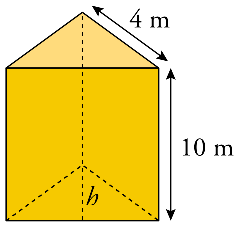
El algua alcanzará una altura de 6,28 cm.

Página 199

28 **Cortamos un prisma triangular regular por un plano perpendicular a las bases y que pasa por el punto medio de dos aristas. Calcula el volumen de los dos prismas que se obtienen.**







$h^2 = 8^2 - 4^2 \rightarrow h = 6{,}93$ m

$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}71 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 27{,}71 \cdot 10 = 277{,}1 \text{ m}^3$

$h^2 = 4^2 - 2^2 \rightarrow h = 3{,}46$ m

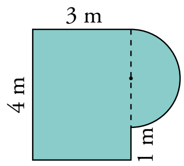
$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 6{,}93 \text{ m}^2$

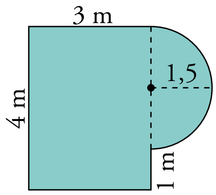
$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 6{,}93 \cdot 10 = 69{,}3 \text{ m}^3$

Por tanto, el volumen del prisma cuadrangular que se forma es $277{,}1 - 69{,}3 = 207{,}8$ m^3, y el del prisma triangular, $69{,}3$ m^3.

29 **Calcula el volumen de una habitación de 2,30 m de altura, cuya planta tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura.**

Halla, también, la superficie de las paredes.





$A_{BASE} = a \cdot b + \pi r^2 = 3 \cdot 4 + \pi \cdot 1{,}5^2 = 19{,}07 \text{ m}^2$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 19{,}07 \cdot 2{,}30 = 43{,}861 \text{ m}^3$

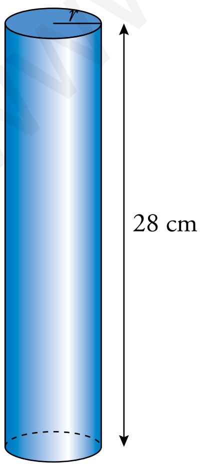
Calculamos la superficie de las paredes:

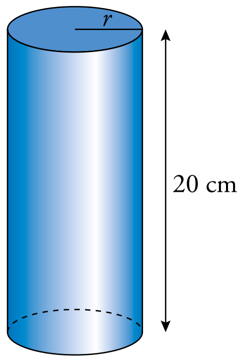
Perímetro $= 4 + 2 \cdot 3 + 1 + 1{,}5\pi = 15{,}71$

$A = \text{Perímetro} \cdot \text{altura} = 15{,}71 \cdot 2{,}30 = 36{,}13 \text{ m}^2$

El volumen es $43{,}861$ m^3 y la superficie de las paredes $36{,}13$ m^2.

30 **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**





$L = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{20}{2\pi} = 3{,}18$

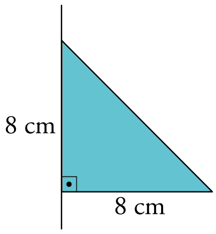
$V = \pi r^2 h = 891{,}27 \text{ cm}^3$

$L = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{28}{2\pi} = 4{,}46$

$V = \pi r^2 h = 1\,247{,}8 \text{ cm}^3$

Conseguimos mayor volumen si soldamos por el lado de 20 cm.

31 **Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 8 cm, se hace girar alrededor de la hipotenusa. Halla el volumen del cuerpo que se forma.**



Se forma un cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 536,16$$

32 **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm². Halla el área total y el volumen del cono.**

Necesitamos saber la generatriz del cono y el radio de la base.

El arco de circunferencia correspondiente a 120° corresponderá con el perímetro de la circunferencia de la base.

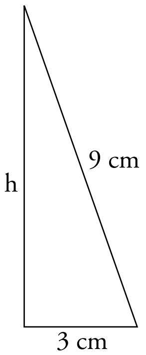
$$\frac{2\pi g 120°}{360°} = 2\pi r \;\rightarrow\; \frac{2}{3}\pi g = 2\pi r \;\rightarrow\; g = 3r$$

El área de la superficie lateral de un cono es $A_{LATERAL} = \pi r g$

$84,78 = \pi r g$

Así, hemos encontrado dos ecuaciones para las dos incógnitas que queremos saber:

$$\begin{cases} g = 3r \\ 84,78 = \pi r g \end{cases} \rightarrow 84,78 = \pi \cdot r \cdot 3r \rightarrow 84,78 = 3\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{84,78}{3\pi} \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3 \text{ cm}$$



$g = 3 \cdot 3 = 9$ cm

$A_{BASE} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi = 28,27 \text{ cm}^2$

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 28,27 + 84,78 = 113,14 \text{ cm}^2$

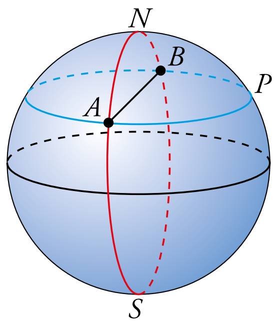
Para el volumen necesitamos la altura del cono:

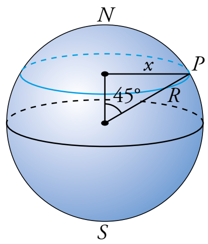
$9^2 = h^2 + 3^2 \;\rightarrow\; h^2 = 81 - 9 \;\rightarrow\; h^2 = 72 \;\rightarrow\; h = \sqrt{72} = 8,5 \text{ cm}$

$V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 28,27 \cdot 8,5 = 240,3 \text{ cm}^3$

El área mide 113,14 cm² y el volumen, 240,3 cm³.

33 **Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (APB) o siguiendo la ruta polar (ANB). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto.**



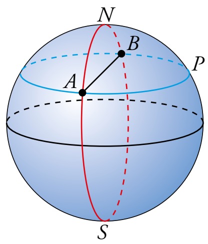


Hallamos el radio paralelo a 45°

$$R^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504,27$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{APB}} = \frac{2\pi \cdot 4\,504,27}{2} = 14\,143,41 \text{ km}$$



Para ir de A a B por ANB abarca un ángulo de 45° + 45° = 90° sobre el meridiano.

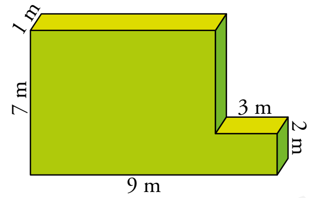
Por tanto:

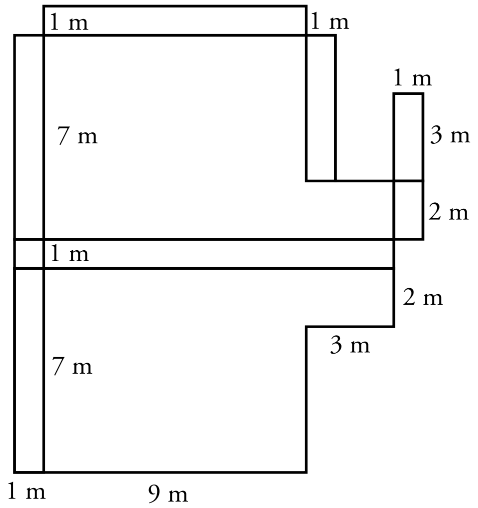
$$L_{\text{ANB}} = \frac{2\pi \cdot R \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi\, 6\,370}{2} \approx 10\,000,9 \text{ km}$$

AUTOEVALUACIÓN

Página 199

1 **Dibuja a mano alzada el desarrollo plano de este prisma. Después halla su superficie y su volumen:**





- Tomamos como base uno de los hexágonos:

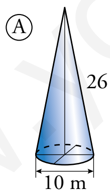
$A_{BASE} = 7 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 42 + 6 = 48 \text{ m}^2$

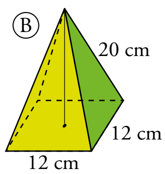
$A_{LATERAL} = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 9 = 32 \text{ m}^2$

$A_{TOTAL} = 2 \cdot A_{BASE} + A_{LATERAL} = 2 \cdot 48 + 32 = 128 \text{ m}^2$

- $V = A_{BASE} \cdot \text{altura} = 48 \cdot 1 = 48 \text{ m}^3$

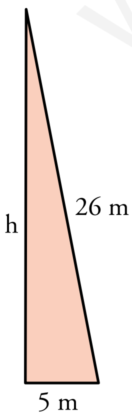
2 **Calcula el área y el volumen de estos cuerpos:**





a) $r = 5$ m; $g = 26$ m.

Calculamos la altura del cono:



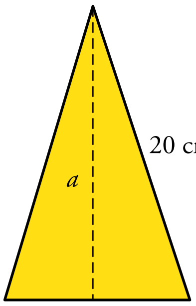
$26^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 651$

$h = 25{,}51$ m

$A = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 5 \cdot 26 + \pi \cdot 5^2 = 486{,}95 \text{ m}^2$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 25{,}51 = 667{,}85 \text{ cm}^3$

b) • Calculamos la altura de una de las caras laterales:



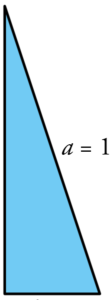
$20^2 = a^2 + 6^2 \rightarrow a^2 = 364 \rightarrow a = 19{,}08$ cm

$$A_{\text{LATERAL}} = \frac{\text{Perímetro de base} \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 19{,}08}{2} = 457{,}92 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{BASE}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 144 + 457{,}92 = 601{,}92 \text{ cm}^2$

• Calculamos la altura de la pirámide:



$a^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow 364 = h^2 + 36 \rightarrow h^2 = 328 \rightarrow h = 18{,}11$ cm

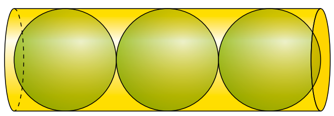
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 18{,}11 = 869{,}28 \text{ cm}^3$$

3 **Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**

$$\frac{360}{40\,000} = \frac{10}{x} \rightarrow x \approx 1\,111$$

La distancia entre las ciudades es, aproximadamente, de 1 111 km.

4 **Tres pelotas de tenis se introducen en un tubo cilíndrico de 6,6 cm de diámetro en el que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**



La altura del cilindro es la suma de los 3 diámetros de las pelotas de tenis:

$h = 3 \cdot 6{,}6 = 19{,}8$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 = 677{,}4 \text{ cm}^3$

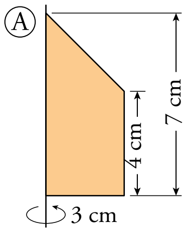
$$V_{\text{PELOTA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3 = 150{,}5 \text{ cm}^3$$

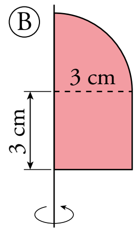
El volumen de las 3 pelotas es $3 \cdot 150{,}5 = 451{,}6 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen de la parte vacía es:

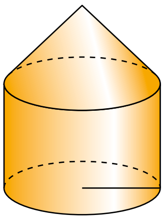
$V = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$

5 **Calcula el área total y el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:**





Calculamos la generatriz:



$g^2 = 3^2 + 3^2 \to g^2 = 18 \to g = \sqrt{18} \to g = 4{,}24$ cm

$A_{\text{CONO}} = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 4{,}24 = 68{,}23 \text{ cm}^2$

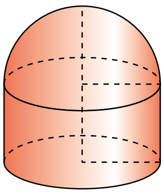
$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 131{,}95 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 68{,}23 + 131{,}95 = 200{,}18 \text{ cm}^2$

$$V_{\text{CONO}} = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = 9\pi = 28{,}27 \text{ cm}^3$$

$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 28{,}27 + 113{,}1 = 141{,}37 \text{ cm}^3$



$$A_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^2}{2} + \pi \cdot 3^2 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 3 = 36\pi = 113{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 84{,}82 + 113{,}1 = 197{,}92 \text{ cm}^2$

$$V_{\text{SEMIESFERA}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = 6\pi = 18{,}85 \text{ cm}^3$$

$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi = 84{,}82 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TOTAL}} = 18{,}85 + 84{,}82 = 103{,}67 \text{ cm}^3$

13 MOVIMIENTOS EN EL PLANO. FRISOS Y MOSAICOS

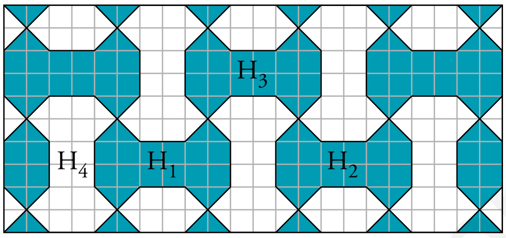
2 TRASLACIONES

Página 202

1 **El mosaico de la derecha se llama «multihueso». H_1, H_2, H_3 y H_4 son «huesos». Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.**

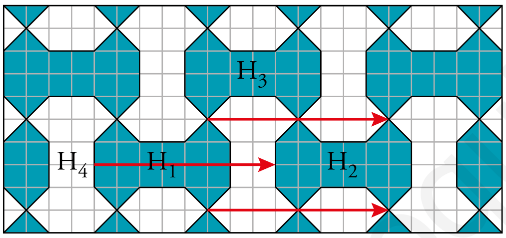
a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2? ¿Y el que transforma H_2 en H_3? ¿Y el que transforma H_3 en H_1?

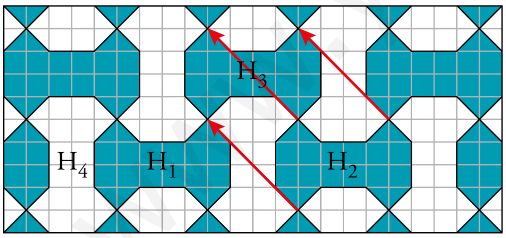


a) Son traslaciones H_1, H_2 y H_3.

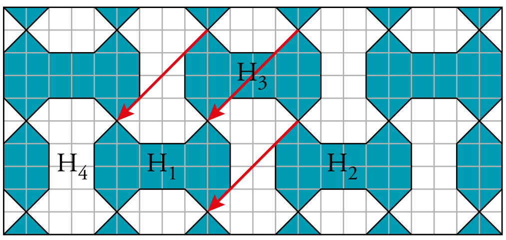
b) El vector que transforma H_1 en H_2 es (8, 0).



El vector que transforma H_2 en H_3 es (–4, 4).

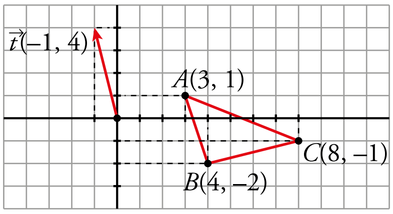


El vector que transforma H_3 en H_1 es (–4, –4).



Página 203

2 **a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(-1, 4)$.**

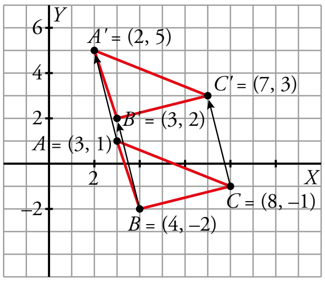


Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

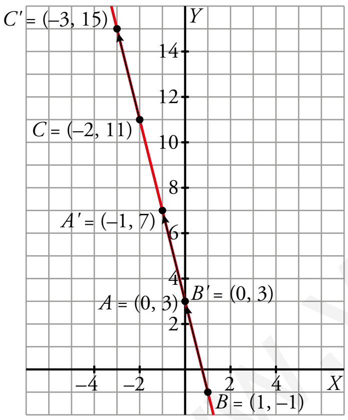
b) Comprueba que la recta r: $y = 3 - 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

a) Los dos triángulos son iguales.



b)

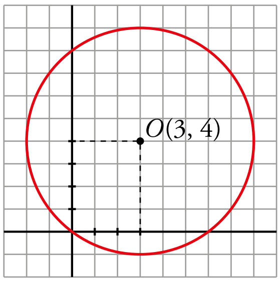


3 **Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia *C* de centro *O*(3, 4) y radio 5.**

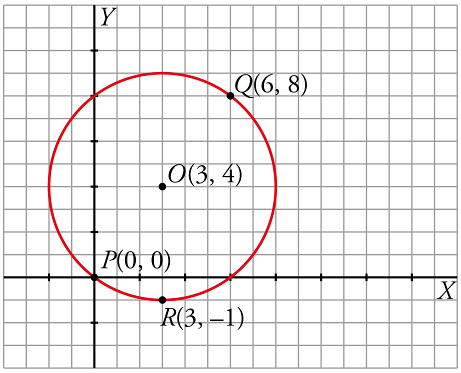
a) Comprueba que *C* pasa por *P*(0, 0), *Q*(6, 8) y *R*(3, –1).

b) Traslada los puntos *O*, *P*, *Q* y *R* mediante la traslación T de vector $\vec{t}\,(6, -2)$.

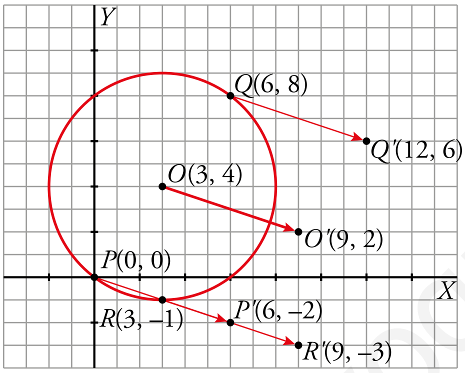
c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es *O'* = T(*O*) y radio 5 pasa por *P'*, *Q'* y *R'*.



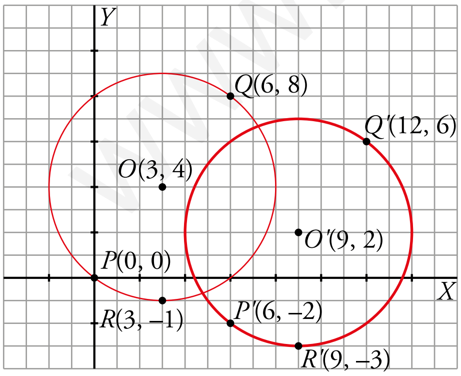
a) La circunferencia pasa por *P*, *Q* y *R*.



b) Los puntos trasladados son *P'*, *Q'* y *R'*.



c) Al trasladar *O*, encontramos el centro *O'* (9, 2). La circunferencia pasa por los trasladados de *P*, *Q* y *R*.



3 ▶ GIROS. FIGURAS CON CENTRO DE GIRO

Página 205

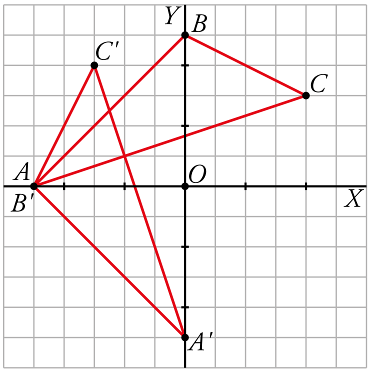
1 **Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro G de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.**

a) Transforma mediante G los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

a)



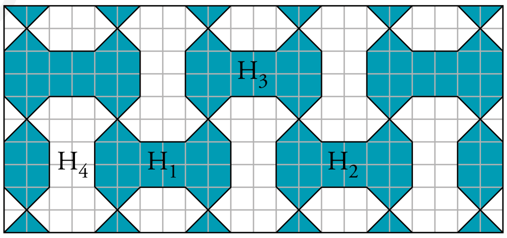
b) Se transforma en otra recta perpendicular a la primera.

c) La circunferencia se transforma en ella misma.

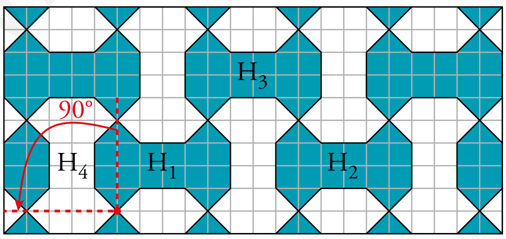
2 **Recuerda el mosaico «multihueso» que ya hemos visto en un ejercicio anterior.**

a) Describe un giro que transforme H_1 en H_4.

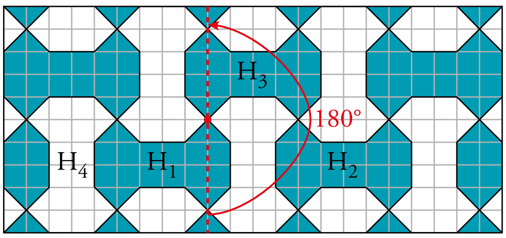
b) Describe un giro que transforme H_1 en H_3.



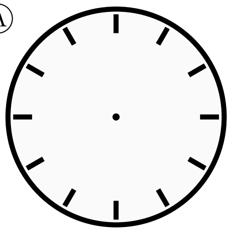
a) Es un giro de 90° con centro el punto marcado:

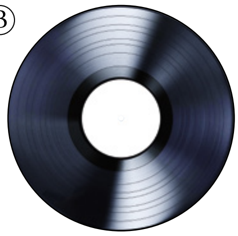


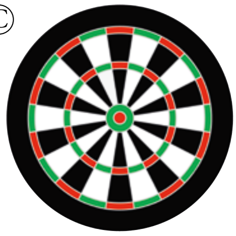
b) Es un giro de 180° y de centro el punto marcado:

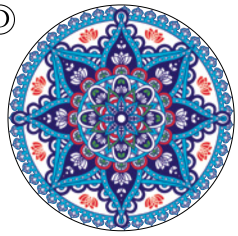


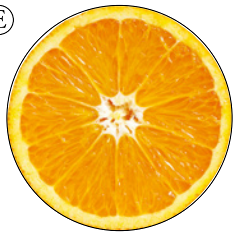
3 **Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.**

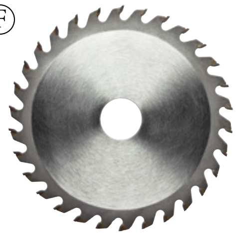
Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓔ


Ⓕ


Todas las figuras tienen centro de giro O porque al girarlas alrededor de O coinciden consigo mismas n/veces, contando con la posición inicial.

A Tiene orden $n = 12 \to 360°: 12 = 30°$.

B Tiene orden infinito Cualquier giro la hace coincidir consigo misma.

C Tiene orden $n = 10 \to 360°: 10 = 36°$.

D Tiene orden $n = 8 \to 360°: 8 = 45°$.

E Tiene orden $n = 10 \to 360°: 10 = 36°$.

F Tiene orden $n = 30 \to 360°: 30 = 12°$.

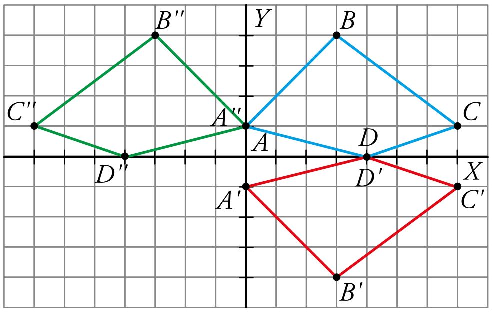
4 ▶ SIMETRÍAS AXIALES. FIGURAS CON EJES DE SIMETRÍA

Página 206

1 **Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y traza sobre ellos el cuadrilátero F cuyos vértices son, respectivamente, $A(0, 1)$, $B(3, 4)$, $C(7, 1)$ y $D(4, 0)$.**

a) Dibuja el cuadrilátero transformado de F mediante la simetría de eje X. ¿Qué coordenadas tienen sus vértices?

b) Dibuja el transformado de F mediante la simetría de eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?



a) $A'(0, -1)$; $B'(3, -4)$; $C'(7, -1)$; $D'(4, 0)$.

b) $A''(0, 1)$; $B''(-3, 4)$; $C''(-7, 1)$; $D''(-4, 0)$.

2 **Consideramos la simetría S de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante S de:**

a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

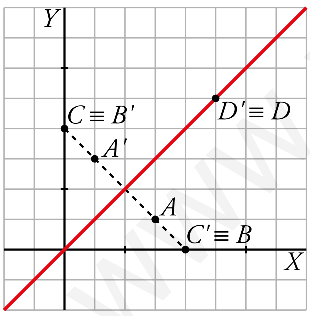
b) El eje X.

c) El eje Y.

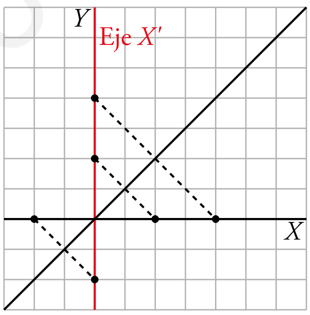
d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

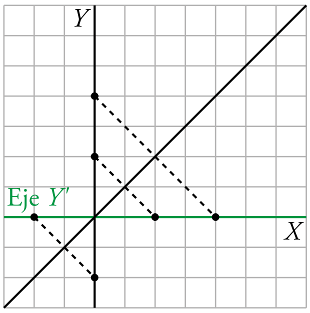
a)



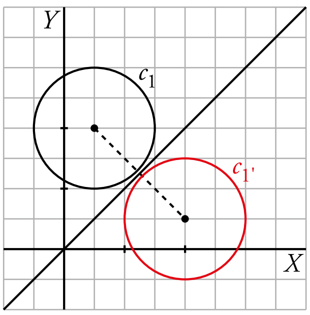
b)



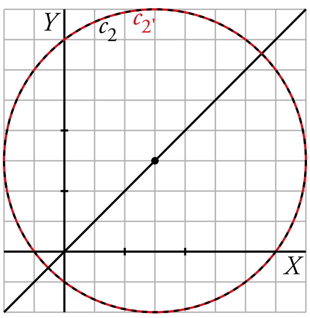
c)



d)

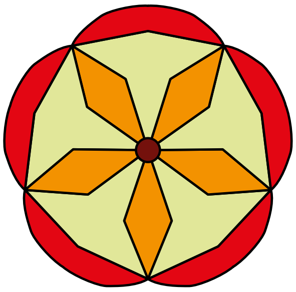


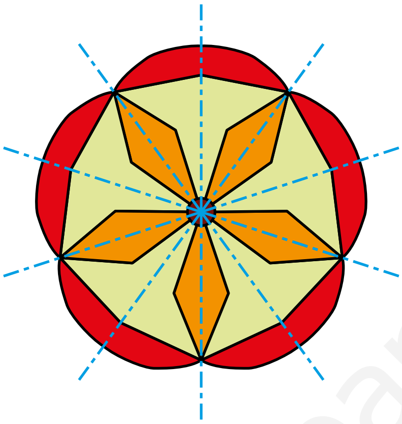
e)



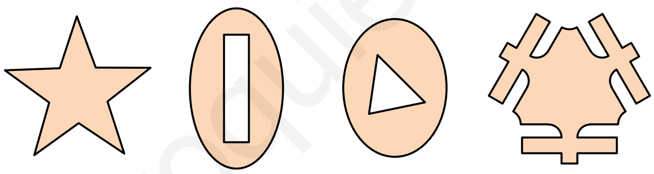
Página 207

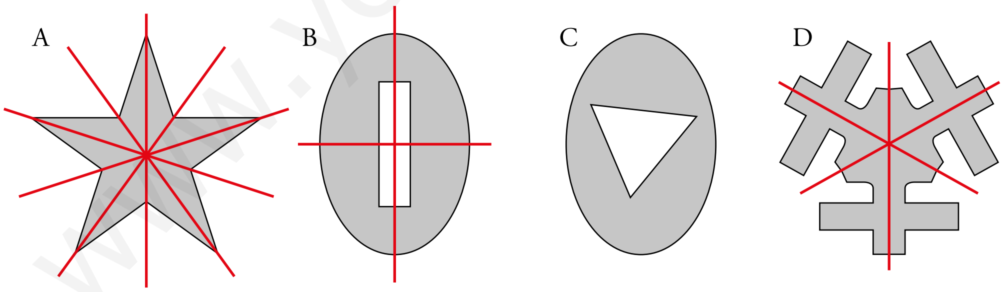
3 Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría:





4 Encuentra los ejes de simetría de las siguientes figuras:





No tiene

5 Dibuja en tu cuaderno una figura con *n* ejes de simetría que no sea un polígono regular, donde:

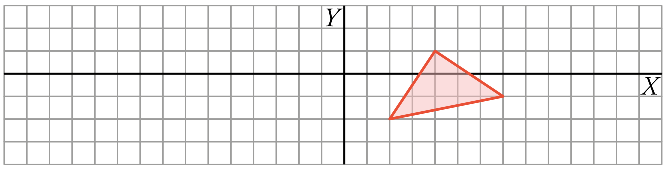
a) $n = 3$ **b)** $n = 4$ **c)** $n = 1$ **d)** $n = 0$

Respuesta abierta.

5 ▶ COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Página 208

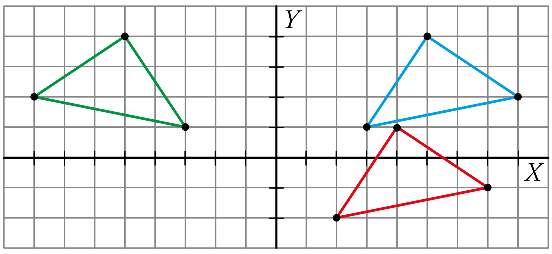
1 **Copia en tu cuaderno este dibujo:**



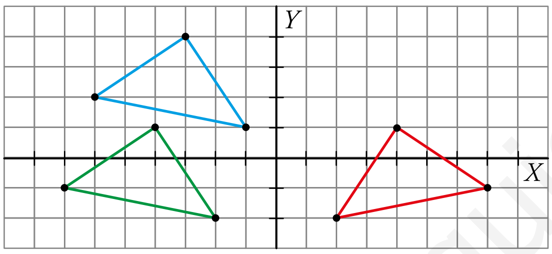
a) Traslada la figura mediante el vector $\vec{u}(1, 3)$ y aplica al resultado una simetría de eje *Y*.

b) Realiza la composición contraria al apartado anterior: primero la simetría y después la traslación. ¿Obtienes el mismo resultado?

a)

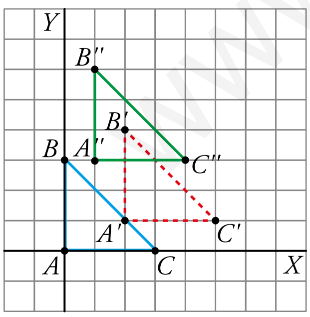


b)



No se obtiene el mismo resultado que en a).

2 **Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo Δ de vértices $A(0, 0)$, $B(0, 3)$ y $C(3, 0)$. Realiza sobre él una traslación T_1 de vector $\vec{u}(2, 1)$ y luego otra T_2 de vector $\vec{v}(-1, 2)$. ¿Podrías haber realizado solo una traslación? ¿Cuál sería su vector?**



Se podía haber realizado una sola traslación de vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (-1, 2) = (1, 3)$

Página 209

3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes $x = 0$ (el eje Y) y $x = 6$, respectivamente.**

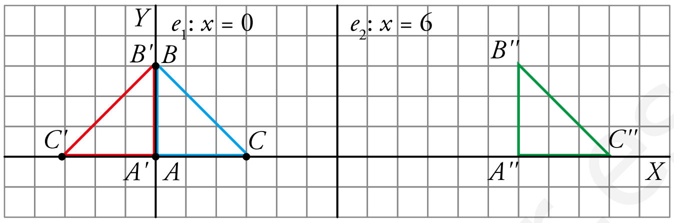
a) Transforma el triángulo Δ del ejercicio 2 de la página anterior mediante:

$$S_1 \text{ compuesta con } S_2$$

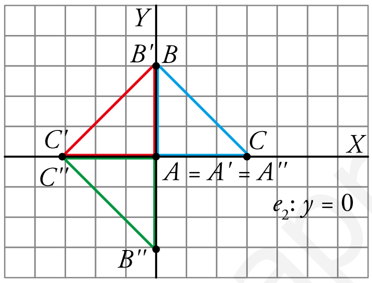
b) Transforma Δ mediante:

$$S_1 \text{ compuesta con la simetría de eje } X$$

a) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(-3, 0)$.
$A''(12, 0)$; $B''(12, 3)$; $C''(15, 0)$.



b) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(-3, 0)$.
$A''(0, 0)$; $B''(0, -3)$; $C''(-3, 0)$.



4 **Dibuja en unos ejes coordenados un cuadrilátero de vértices $A(1, 3)$, $B(6, 5)$, $C(7, -1)$ y $D(-1, -2)$.**

a) Halla las coordenadas del cuadrilátero transformado mediante la composición de dos simetrías de ejes X e Y.

b) La composición de las dos simetrías corresponde a un giro cuyo centro es el origen de coordenadas. ¿Cuál es el ángulo de giro?

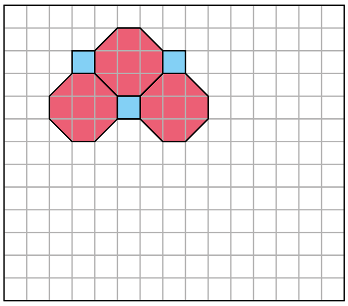
a) $A(1, 3) \rightarrow A'(-1, 3) \rightarrow A''(-1, -3)$
$B(6, 5) \rightarrow B'(-6, 5) \rightarrow B''(-6, -5)$
$C(7, -1) \rightarrow C'(-7, -1) \rightarrow C''(-7, 1)$
$D(-1, -2) \rightarrow D'(1, -2) \rightarrow D''(1, 2)$

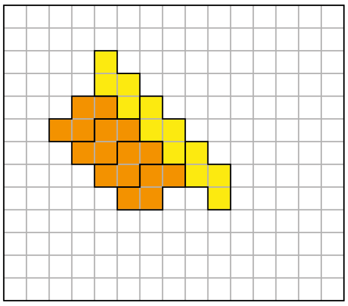
b) El ángulo de giro es 180°.

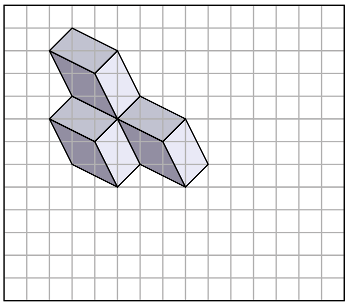
6 ▶ MOSAICOS, CENEFAS Y ROSETONES

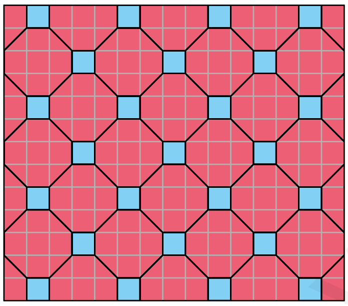
Página 210

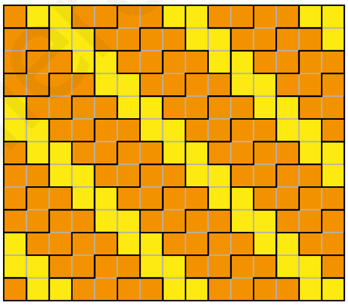
1 Copia y completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:

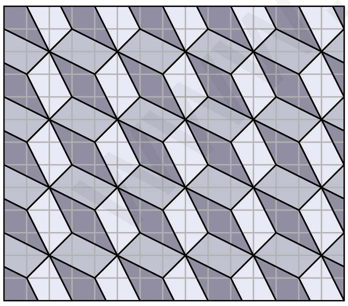
a)


b)


c)


a)


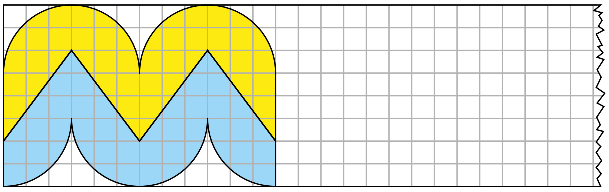
b)


c)


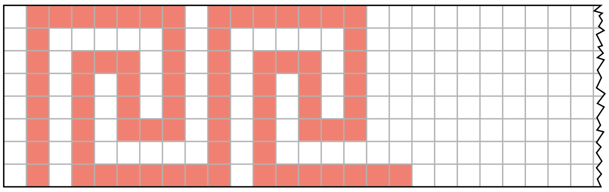
Página 211

2 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?**

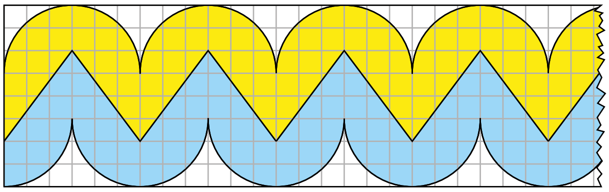
A



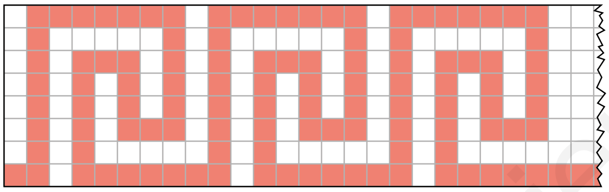
B



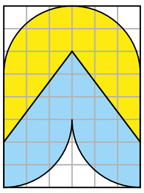
A



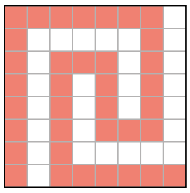
B



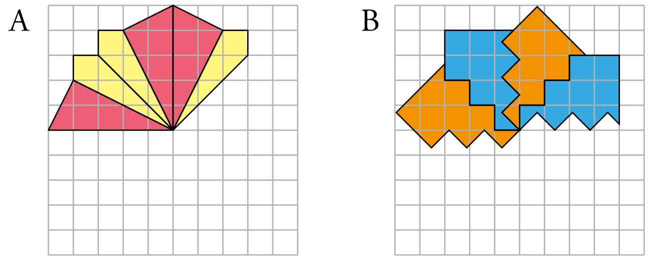
A Motivo mínimo:



B Motivo mínimo:

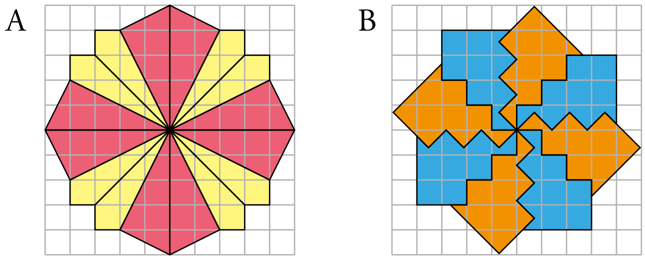


3 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes rosetones. Después, contesta a las preguntas:**

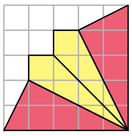


a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

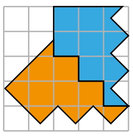
b) ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?



A. Este rosetón es de orden 4. El motivo mínimo es el siguiente:



B. Este rosetón es de orden 8. El motivo mínimo es el siguiente:



Página 212

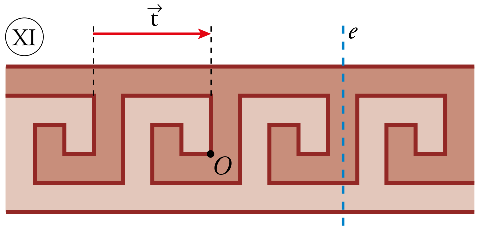
Hazlo tú

- **Encuentra movimientos que dejen invariante la cenefa (XI) de la página anterior.**

  a) Con color. **b) Sin color.**

  a) Dejan invariante la cenefa, respetando los colores, la traslación de vector $\vec{t}$ y la simetría de eje e.

  b) Si no tenemos en cuenta el color, también deja invariante la cenefa el giro de centro O y ángulo 180°.



Hazlo tú

- **¿Qué movimientos dejan invariante el rosetón (XIII) de la página anterior?**

  Llamamos O al centro del rosetón.

  El giro asociado al rosetón es de centro O y $\alpha = 360°: 16 = 22{,}5°$.

  Otros giros de centro O y ángulos 2α, 3α, … 15α también dejan invariante la figura. Es decir, O es un centro de orden 16.

  Además, tiene 16 ejes de simetría que pasan por O.

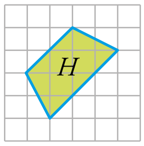
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 213

Practica

Traslaciones

1 **a) Representa en papel cuadriculado la figura *H* y trasládala mediante el vector $\vec{t_1}(6, 1)$. Llamamos H_1 a la figura resultante.**

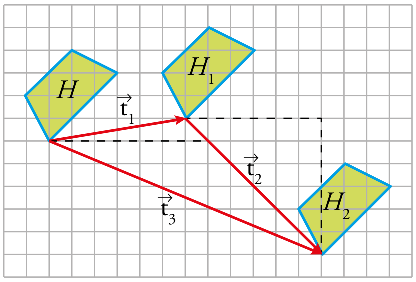


b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t_2}(3, -4)$.

c) Indica el vector de traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para obtener H?

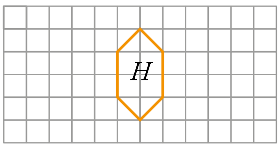
a) y b)



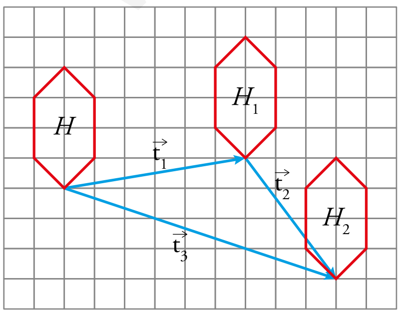
c) El vector es $\vec{t_3} = (6, 1) + (3, -4) = (9, -3)$, respresentado en la imagen.

d) Es el vector $-\vec{t_3} = (-9, 3)$.

2 **Responde a los apartados de la actividad anterior con esta otra figura:**



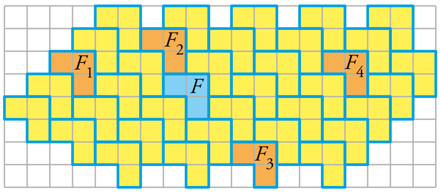
a) y b)



c) El vector es $\vec{t_3} = (9, -3)$.

d) El vector $-\vec{t_3} = (-9, 3)$.

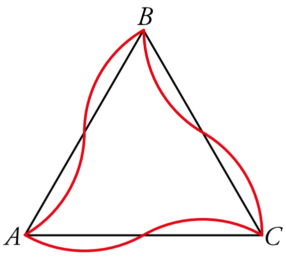
3 **Halla los vectores $\vec{t_1}$, $\vec{t_2}$, $\vec{t_3}$ y $\vec{t_4}$ que nos permiten transformar *F* en cada una de las otras figuras.**

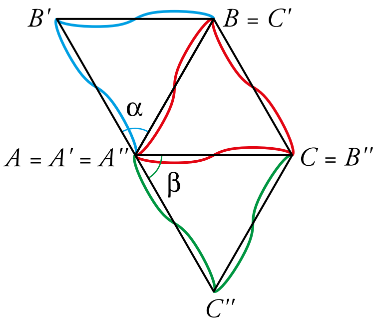


$\vec{t_1} = (-5, 1)$; $\vec{t_2} = (-1, 2)$; $\vec{t_3} = (3, -3)$; $\vec{t_4} = (7, 1)$

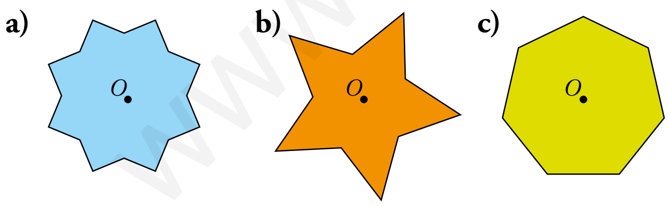
Giros

4 **Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro *A* y ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.**





5 **Indica el menor ángulo que se debe girar alrededor de *O* cada una de estas figuras para mantenerse idénticas y halla el orden del centro de giro de *O*.**



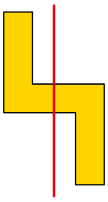
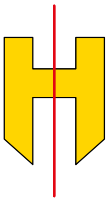
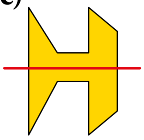
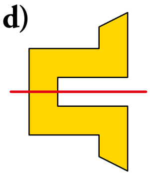
a) El menor ángulo es 45°. El centro es de orden 8.

b) El menor ángulo es 72°. El centro es de orden 5.

c) El menor ángulo es de, aproximadamente, 51,43°. El centro es de orden 7.

Simetrías

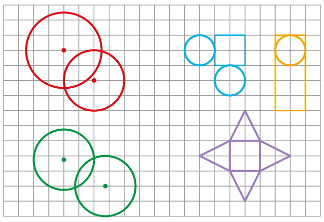
6 **Indica si se trata o no de un eje de simetría:**

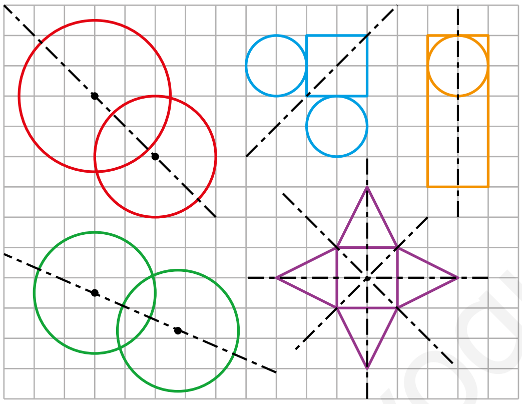
a)  b)  c)  d) 

Son ejes de simetría los de las figuras b), c) y d).

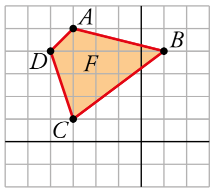
En a) no hay eje de simetría.

7 **Copia en tu cuaderno y señala los ejes de simetría de estas figuras. ¿Cuáles tienen simetría central? Señala su centro.**





8 **Calcula las coordenadas de los vértices de la figura *F* transformada mediante:**



a) La simetría de eje *X*.

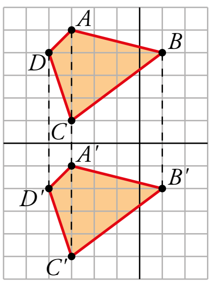
b) La simetría de eje *Y*.

c) La simetría central que tiene por centro el origen de coordenadas.

d) La simetría de eje la recta que pasa por *C* y *B*.

e) La simetría central que tiene por centro el vértice *B*.

f) ¿Qué puntos o segmentos son invariantes con respecto a las simetrías de los apartados d) y e)?

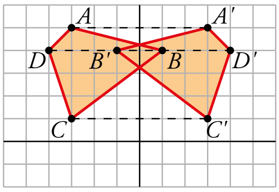
a) 

$A' = (-3, -5)$

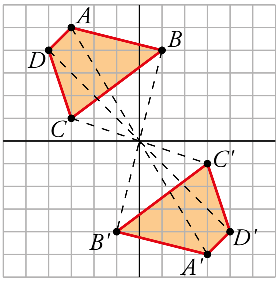
$B' = (1, -4)$

$C' = (-3, -1)$

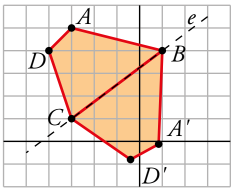
$D' = (-4, -4)$

b) 

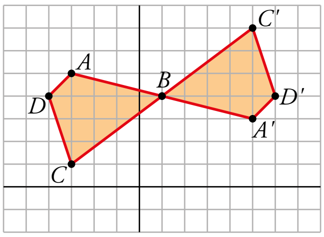
$A' = (3, 5)$
$B' = (-1, 4)$
$C' = (3, 1)$
$D' = (4, 4)$

c) 

$A' = (3, -5)$
$B' = (-1, -4)$
$C' = (3, -1)$
$D' = (4, -4)$

d) 

$A' = (0{,}84; -0{,}12)$
$B' = B = (1, 4)$
$C' = C = (-3, 1)$
$D' = (-0{,}4; -0{,}8)$

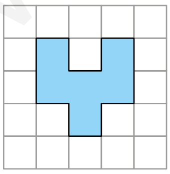
e) 

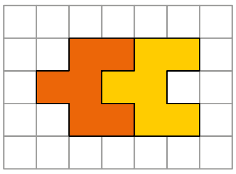
$A' = (5, 3)$
$B' = B = (1, 4)$
$C' = (5, 7)$
$D' = (6, 4)$

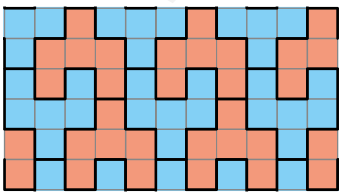
f) Con respecto a la simetría del apartado d), el segmento BC es invariante, y con respecto a la del apartado e), es invariante el punto B.

Mosaicos, frisos y rosetones

9 **Completa en tu cuaderno el siguiente mosaico a partir de la pieza azul. Busca una forma de engranarla distinta de la de la derecha.**

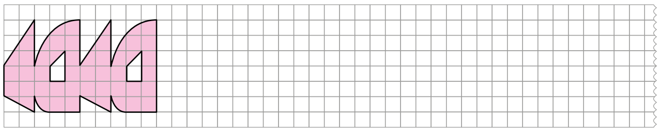




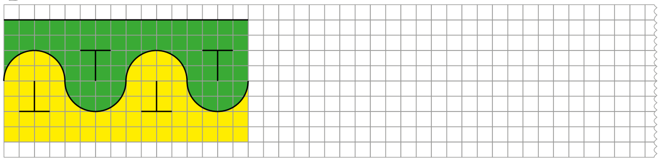


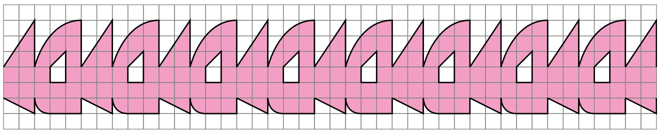
10 **Completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?**

A



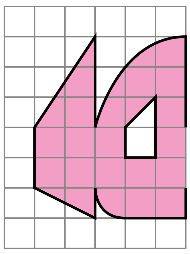
B

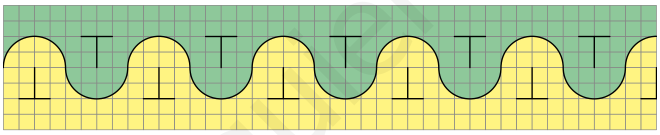




Motivo mínimo

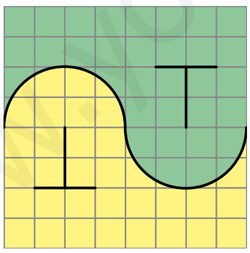
A





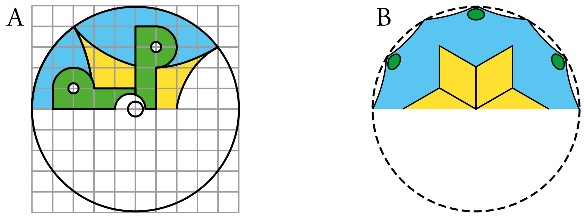
Motivo mínimo

B



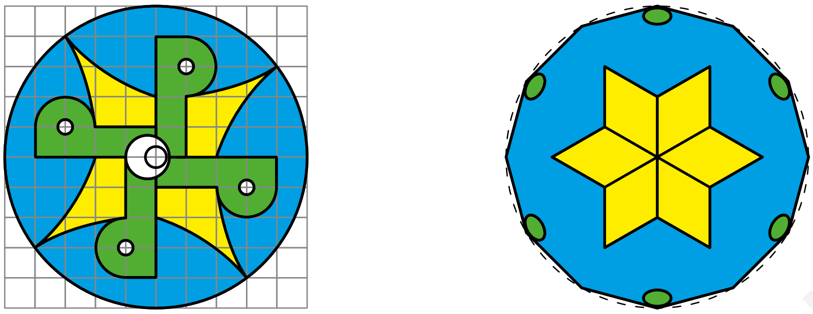
Página 214

11 **Completa en tu cuaderno estos rosetones:**



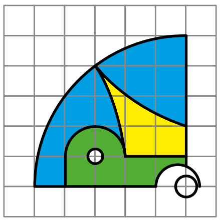
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?

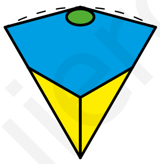


a) A → giro de orden 4. B → giro de orden 6.

b) A

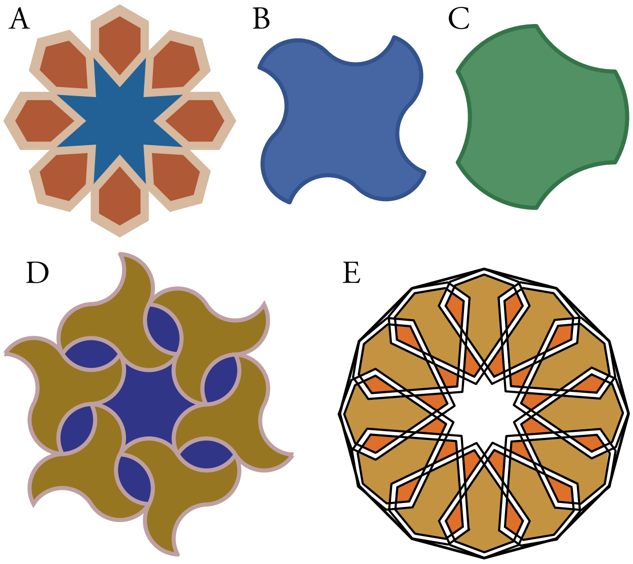


B



Resuelve problemas

12 **a) Indica el centro de giro de estas figuras:**



b) Halla el orden de cada uno de estos centros y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

c) ¿Cuáles tienen, además, centro de simetría?

a) El centro de cada figura es su centro de giro.

b) Todas tienen centro de giro de orden n porque el punto central de cada una permite girar la figura y que coincida con ella misma n veces.

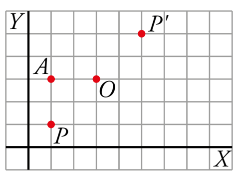
Los órdenes de giro de cada una y sus ángulos mínimos de coincidencia son:

FIGURA	A	B	C	D	E
ORDEN DE GIRO	8	4	3	6	12
ÁNGULO MÍNIMO	45°	90°	120°	60°	30°

c) Todas las figuras tienen centro de simetría excepto la C.

13 **Observa la cuadrícula.**

Un giro de 180° alrededor de $O(3, 3)$ transforma el punto $P(1, 1)$ en $P'(5, 5)$.



a) Di tres movimientos más que transformen P en P'.

b) ¿Cuál es la imagen de $A(1, 3)$ en cada uno?

a) Otros movimientos que convierten P en P' son:

– La simetría central de centro O (mismo movimiento que el giro descrito en el enunciado).

– El giro de centro O y ángulo –180°.

– La traslación de vector $\vec{t} = (4, 4)$.

– La simetría axial de eje la recta que pasa por O y es perpendicular a PP'.

b) En la simetría central y los giros, $A' = (5, 3)$.

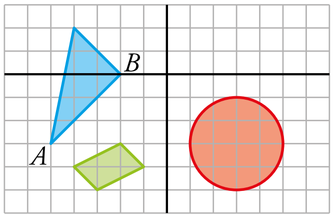
En la traslación, $A' = (5, 7)$.

En la simetría axial, $A' = (3, 5)$.

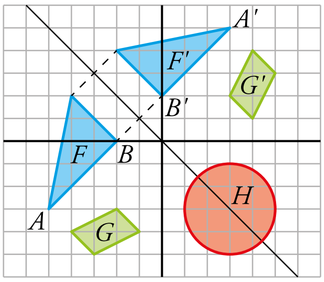
14 **a) Representa, en tu cuaderno, las transformadas de estas figuras mediante la simetría cuyo eje es la recta $y = -x$:**

b) ¿Cuál es la ecuación de la transformada de la recta que pasa por A y B?

c) ¿Alguna de las figuras es invariante?



a)



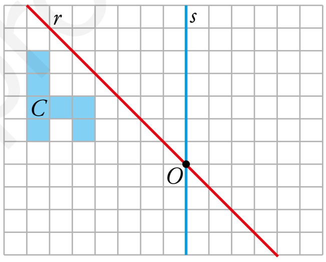
b) La transformada de la recta que pasa por A y B es la misma recta, ya que es perpendicular al eje de simetría. Su ecuación es $y = x + 2$.

c) Sí, es invariante el círculo.

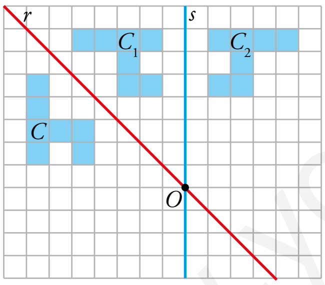
15 **a) Dibuja en tu cuaderno la imagen C_1 transformada de C mediante la simetría de eje r.**

b) Dibuja C_2, transformada de C_1 mediante la simetría de eje s.

c) Define el giro equivalente a la composición de las dos simetrías que transforman C en C_2.

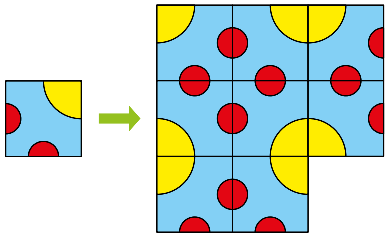


a) y b)



c) El giro equivalente a la composición de las dos simetrías es de centro O y ángulo –90°.

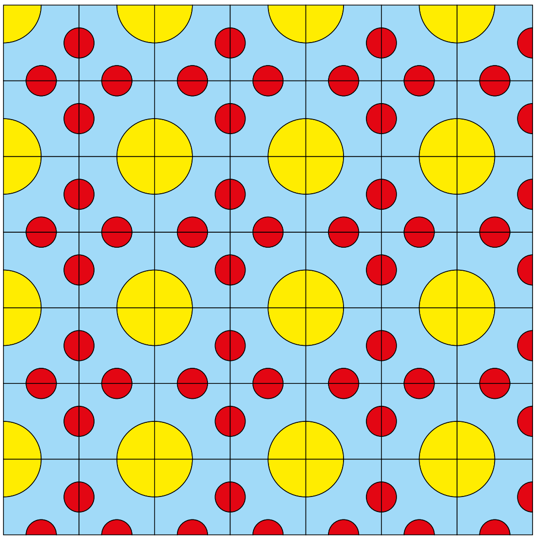
16 **Queremos alicatar una pared de 4,6 m × 3 m con azulejos cuadrados de 20 cm de lado como este:**



a) Completa, en tu cuaderno, un mosaico de 7 × 7 azulejos.

b) Averigua cuántos círculos grandes y cuántos pequeños (completos) habrá en la pared alicatada.

a)

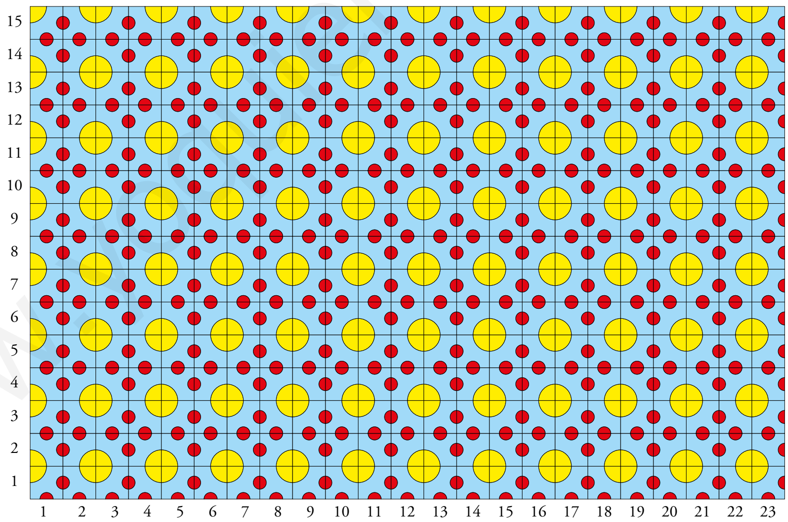


b) La pared es de 460 cm × 300 cm; por tanto, caben 23 columnas × 15 filas de azulejos.

Como cada 2 × 2 azulejos hacen un círculo grande completo, y no debemos contar los que se quedan “medios”, es como si tuviéramos 22 columnas × 14 filas de azulejos.

Habrá entonces 11 columnas × 7 filas de círculos; es decir, $11 \cdot 7 = 77$ círculos grandes.

Observa la figura:



Contamos los círculos pequeños por columnas: comenzamos con la primera y vamos añadiendo columnas.

El número de círculos pequeños (completos) depende de que la columna sea par o impar. Veámoslo:

1.ª columna: 7 círculos pequeños completos.

2.ª columna: se suman $3 \cdot 7 + 1 = 22$ círculos pequeños completos.

3.ª columna: se suman 7 círculos pequeños completos.

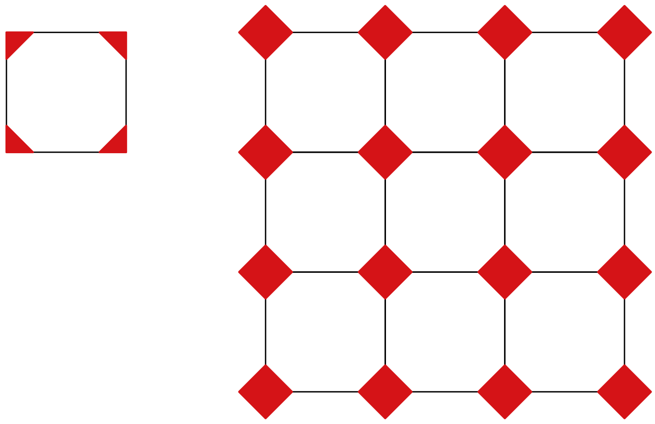
4.ª columna: se suman $3 \cdot 7 + 1 = 22$ círculos pequeños completos.

…

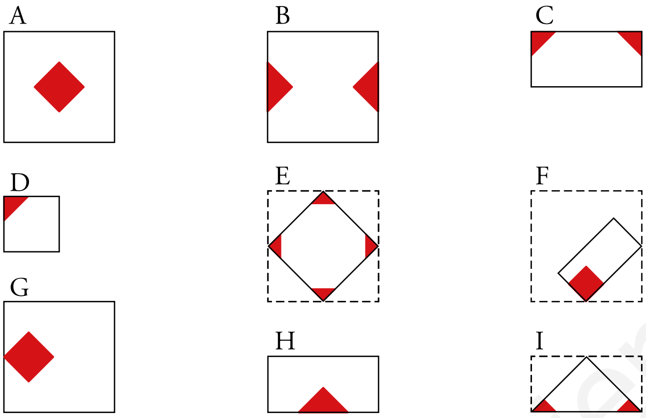
Así, en las columnas pares se añaden 22 círculos completos y en las impares, solo 7. Del 1 al 23 hay 11 columnas pares y 12 impares.

Por tanto, habrá $11 \cdot 22 + 12 \cdot 7 = 242 + 84 = 326$ círculos pequeños completos.

17 **Con la baldosa de la izquierda, se puede hacer un suelo como el de la derecha.**



¿Con cuáles de estas otras se puede construir el mismo suelo si lo único que importa es la disposición de los cuadrados rojos, no las líneas entre baldosas?

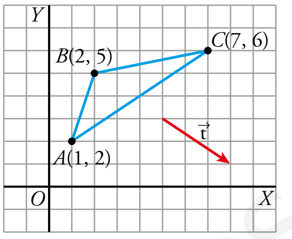


Se puede construir el mismo suelo con las baldosas A, B, C, D, G, H e I.

AUTOEVALUACIÓN

Página 215

1 **Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del ABC mediante cada uno de los siguientes movimientos:**



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje X.

c) La simetría de eje Y.

d) El giro de centro O y ángulo –90°.

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto $P(0, 4)$ es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores el eje Y es una recta doble?

a) $A'(4, 0)$; $B'(5, 3)$; $C'(10, 4)$

b) $A'(1, -2)$; $B'(2, -5)$; $C'(7, -6)$

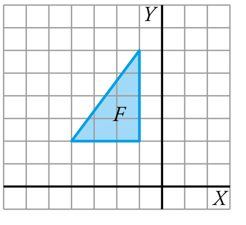
c) $A'(-1, 2)$; $B'(-2, 5)$; $C'(-7, 6)$

d) $A'(2, -1)$; $B'(5, -2)$; $C'(6, -7)$

e) En la simetría de eje Y el punto $P(0, 4)$ es doble.

f) En las simetrías de eje X y de eje Y, el eje Y es doble.

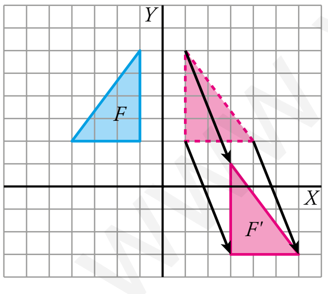
2 **Llamamos S a la simetría de eje Y, y T, a la traslación de vector $\vec{t}(2, -5)$.**



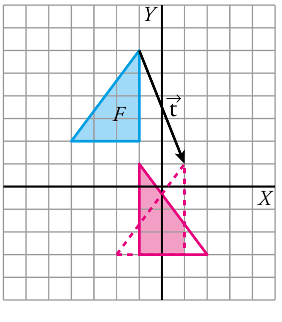
a) Obtén la transformada de la figura F mediante la composición de S con T.

b) Obtén la transformada de F mediante la composición de T con S.

a)

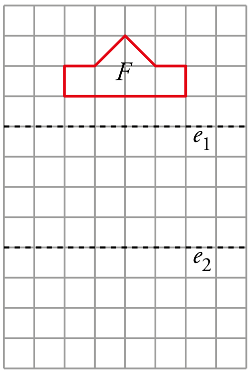


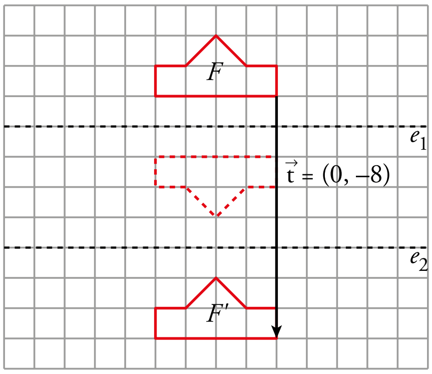
b) La figura coloreada es el resultado de la composición de movimientos.



3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes e_1 y e_2, respectivamente. Dibuja la figura F' transformada de F mediante S_1 compuesta con S_2.**

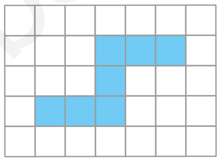
¿Qué otro movimiento nos permite obtener F' a partir de F?





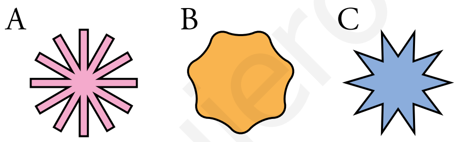
Con una traslación de vector $\vec{t}\,(0, -8)$ se obtiene F' a partir de F.

4 **Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:**



Respuesta abierta.

5 **Dibuja en tu cuaderno los ejes de simetría y los centros de giro de estas figuras.**



Indica el orden del centro de giro de cada una. ¿Cuál es el ángulo mínimo de coincidencia?

A → Tiene 12 ejes de simetría. Todos pasan por el centro de la figura. 6 de ellos pasan por el medio de dos brazos opuestos. Los otros 6 pasan por los vértices donde se unen dos brazos.

El orden del centro de giro es 12, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 12 = 30°.

B → Tiene 7 ejes de simetría. Cada uno de ellos pasa por el centro de la figura y por el punto medio de uno de sus salientes.

El orden del centro de giro es 7, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 7 ≈ 51,43°.

C → Tiene 10 ejes de simetría. 5 de ellos pasan por uno de los puntos de la estrella y por el centro de la figura. Los otros 5 pasan por uno de los vértices donde se juntan 2 brazos de la estrella y por el centro.

El orden del centro de giro es 10, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 10 ≈ 36°.

14 TABLAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

1 CÓMO NOS LLEGAN LAS ESTADÍSTICAS

Página 219

1 Observa las gráficas de esta página y contesta:

a) Nombra un país en el que se utiliza prioritariamente el Chrome. Haz lo mismo para Firefox y Safari.

b) Escribe una de las aplicaciones de móvil que más utilizan las mujeres y otra que más usan los hombres.

c) ¿Cuáles son las tres primeras redes sociales con más número de usuarios?

d) ¿Qué navegador es el más utilizado en el mundo?

e) Sabiendo que hay 3 900 millones de personas que usan Internet, ¿cuántas utilizan Chrome para navegar? ¿Y Firefox?

f) Sabiendo que hay 3 030 millones de usuarios activos de redes sociales, ¿qué porcentaje de estos usan Facebook? ¿Y YouTube? ¿Y Twitter?

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Chrome: Rusia, India, Brasil…
- Firefox: Francia, Mongolia, Argelia…
- Safari: Suecia, Australia, Canadá…

b) Mujeres: Whatsapp, Instagram, Snapchat.

Hombres: Faceboo, YouTube, Twitter.

c) Facebook, YouTube, Instagram.

d) Chrome.

e) • Usan Chrome un 67,15 % de 3 900 000 000:

$3\,900\,000\,000 \cdot 0{,}6715 = 2\,618\,850\,000$ personas.

- Usan Firefox un 9,15 % de 3 900 000 000.

$3\,900\,000\,000 \cdot 0{,}0915 = 356\,850\,000$ personas.

f) • Facebook $\rightarrow \dfrac{2271}{3030} = 0{,}7495 \rightarrow 74{,}95\,\%$

- YouTube $\rightarrow \dfrac{1900}{3030} = 0{,}6271 \rightarrow 62{,}71\,\%$

- Twitter $\rightarrow \dfrac{326}{3030} = 0{,}1076 \rightarrow 10{,}76\,\%$

2 EL PROCESO QUE SE SIGUE EN ESTADÍSTICA

Página 220

1 **Se quiere realizar una encuesta para estudiar las aficiones musicales. Para cada una de las preguntas siguientes, di justificadamente si te parecen o no razonables:**

a) ¿Cuáles son tus grupos musicales preferidos?

b) De los siguientes estilos musicales, señala aquellos que has escuchado más este mes:

- **Rock**
- **Pop**
- **Rap**
- **Elect.**
- **Hip-Hop**
- **Reggae**
- **Salsa**
- **Punk**
- **Metal**
- **Grunge**
- **Jazz**
- **Clásico**

c) ¿Oyes la radio? Si es así, ¿qué cadena?

d) ¿Cuáles de estas cadenas de radio escuchas más de 2 horas a la semana?

- **Cadena 100**
- **Los 40 principales**
- **Rock FM**
- **Kiss FM**
- **Radio Clásica**
- **Europa FM**
- **EDM**
- **M80 Radio**
- **Radio 3**
- **Cadena Dial**

e) ¿Cuál es el último concierto al que has ido?

a) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

b) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *el estilo musical* y cuáles son sus posibles valores.

c) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

d) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *la cadena musical que escuchas* y cuáles son sus posibles valores.

e) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

3 VARIABLES ESTADÍSTICAS

Página 221

1 **Indica si cada una de estas variables es cuantitativa discreta, cuantitativa continua o cualitativa:**

a) En los cines de un pueblo se anota el tipo de película que proyectan (comedia, acción…), cuánto dura la película y el número de espectadores.

b) En los mercados de una ciudad se observa la superficie, el número de puertas de acceso y el tipo de mercado (alimentación, ropa, complementos…).

c) Nos hemos fijado en algunas características de los teléfonos móviles que tiene el alumnado de un centro escolar: la marca, el número de compañías que lo ofertan y el precio.

d) Una científica estudia, en los volcanes del Pacífico, la altura, el número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años y el tipo de volcán (hawaiano, estromboliano, vulcaniano, peleano).

a) Tipo de película: cualitativa.

Duración de la película: cuantitativa continua.

Número de espectadores: cuantitativa discreta.

b) Superficie: cuantitativa continua.

Número de puertas de acceso: cuantitativa discreta.

Tipo de mercado: cualitativa.

c) Marca: cualitativa.

Número de compañías que lo ofertan: cuantitativa discreta.

Precio: cuantitativa continua.

d) Altura: cuantitativa continua.

Número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años: cuantitativa discreta.

Tipo de volcán: cualitativa.

4 POBLACIÓN Y MUESTRA

Página 222

1 **Indica la población, la muestra y los individuos en cada uno de los siguientes ejemplos:**

a) Se seleccionan 50 edificios de una ciudad para hacer un estudio sobre el número de plantas, la altura y la utilización de los locales bajos (para viviendas, oficinas, tiendas, bares…).

b) Se analizan 100 libros de una biblioteca: número de páginas, ubicación en la estantería y contenido (como novela, ensayo, manual…).

c) Se ha encuestado a 23 de los alumnos y las alumnas que van al centro en bici sobre el número de desarrollos de la bicicleta, el peso y la marca.

a) Población: edificios de la ciudad.

Muestra: 50 edificios.

Individuos: cada uno de los edificios.

b) Población: libros de la biblioteca.

Muestra: 100 libros de la biblioteca.

Individuos: cada uno de los libros.

c) Población: estudiantes de un instituto.

Muestra: 23 alumnos del centro que van en bici.

Individuos: cada uno de los estudiantes.

5 ▸ CONFECCIÓN DE UNA TABLA DE FRECUENCIAS

Página 224

1 **El profesor ha apuntado las faltas de asistencia que ha tenido cada uno de sus alumnos y alumnas a lo largo del trimestre:**

2, 3, 0, 1, 1   2, 2, 4, 3, 1   3, 0, 2, 0, 1

2, 2, 1, 2, 1   0, 3, 4, 2, 1   3, 5, 1, 1, 2

a) Confecciona una tabla de frecuencias.

b) Si se quisiera hacer una estadística con el número de ejercicios bien resueltos por cada alumno y alumna a lo largo del año, ¿la tabla de frecuencias debería ser con datos aislados o agrupados en intervalos?

a)

FALTAS (x_i)	RECUENTO	f_i
0	IIII	4
1	卌 IIII	9
2	卌 IIII	9
3	卌	5
4	II	2
5	I	1

b) La tabla de frecuencias debería ser con datos agrupados en intervalos porque tomaría muchos valores distintos.

2 **Se ha tomado el tiempo en los 100 m lisos a las personas que forman un club de atletismo. Estos son los resultados:**

11,62	**12,03**	**12,15**	**11,54**	**10,95**
11,56	**11,08**	**11,38**	**12,08**	**11,73**
12,11	**11,52**	**11,72**	**11,23**	**11,66**
10,87	**11,32**	**11,58**	**12,01**	**11,06**

Haz una tabla de frecuencias con estos intervalos:

10,805 - 11,075 - 11,345 - 11,615 - 11,885 - 12,155

INTERVALO	RECUENTO	f_i
10,805-11,075	III	3
11,075-11,345	III	3
11,345-11,615	卌	5
11,615-11,885	IIII	4
11,885-12,155	卌	5

Página 225

3 **La siguiente tabla muestra el deporte que prefieren practicar 40 estudiantes.**

a) Calcula las frecuencias relativas y porcentuales de esta distribución y explica por qué carece de sentido hallar las frecuencias acumuladas.

b) Que la frecuencia relativa de *Baloncesto* sea 10/40 quiere decir que uno de cada cuatro estudiantes juega al baloncesto. Explica con las mismas palabras las frecuencias relativas de *Fútbol* y *Tenis* y las frecuencias porcentuales de *Ajedrez* y *Baloncesto*.

DEPORTE	FRECUENCIA
Baloncesto	10
Voleibol	1
Fútbol	20
Tenis	5
Ajedrez	4

a) Carece de sentido porque no es una variable cuantitativa y, siendo cualitativa, no tiene un orden ni puede estar ordenada.

DEPORTE (x_i)	f_i	F_{RELATIVA}	%
Baloncesto	10	$\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	25 %
Balonvolea	1	$\frac{1}{40} = 0{,}025$	2,5 %
Fútbol	20	$\frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	50 %
Tenis	5	$\frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0{,}125$	12,5 %
Ajedrez	4	$\frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	10 %
	40	1	100 %

b) Que la frecuencia relativa de *Fútbol* sea 20/40 = 1/2 quiere decir que uno de cada dos estudiantes juega al fútbol.

Que la frecuencia relativa de *Tenis* sea 5/40 = 1/8 quiere decir que uno de cada ocho estudiantes juega al tenis.

Que la frecuencia porcentual de *Ajedrez* sea 10 % quiere decir que diez de cada cien estudiantes juega al ajedrez.

Que la frecuencia porcentual de *Baloncesto* sea 25 % quiere decir que veinticinco de cada cien estudiantes juega a baloncesto.

4 **Halla las frecuencias acumuladas de esta distribución y di qué significan $f_{acumulada}(3)$ y $f_{acumulada}(5)$.**

N.º DE SUSPENSOS	0	1	2	3	4	5	6	7
FRECUENCIA	6	12	8	5	3	1	1	0

x_i	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
0	6	6
1	12	6 + 12 = 18
2	8	6 + 12 + 8 = 26
3	5	6 + 12 + 8 + 5 = 31
4	3	6 + 12 + 8 + 5 + 3 = 34
5	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 = 35
6	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 = 36
7	0	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 + 0 = 36

$f_{acumulada}(3) = 31$. Significa que 31 estudiantes han tenido 3 suspensos o menos.

$f_{acumulada}(5) = 35$. Significa que 35 estudiantes han tenido 5 suspensos o menos.

5 **Esta tabla recoge los meses que cumplen años las 100 personas que componen un grupo de montaña.**

MES	E	F	M	Ab	My	Jn	Jl	Ag	S	O	N	D
FREC.	7	9	10	6	8	8	7	9	8	9	9	10

a) Halla las frecuencias acumuladas.

b) ¿Cuántas personas nacieron antes de junio? ¿Y después de agosto?

a)

MES (x_i)	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
E	7	7
F	9	16
M	10	26
Ab	6	32
My	8	40
Jn	8	48
Jl	7	55
Ag	9	64
S	8	72
O	9	81
N	9	90
D	10	100

b) Antes de junio nacieron 40 personas.

Después de agosto nacieron 100 – 64 = 36 personas.

6 GRÁFICO ADECUADO AL TIPO DE INFORMACIÓN

Página 226

1 Representa mediante el gráfico adecuado.

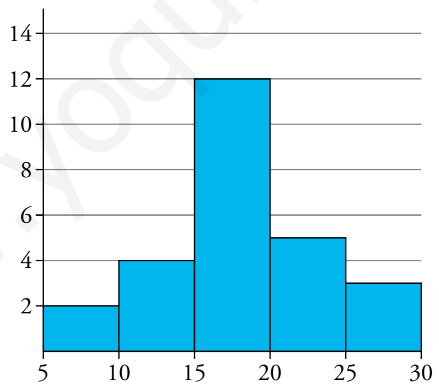
a) Temperaturas máximas medidas cada 15 días a lo largo de un año en una localidad.

TEMPERATURA (°C)	N.º DE DÍAS
5-10	2
10-15	4
15-20	12
20-25	5
25-30	3

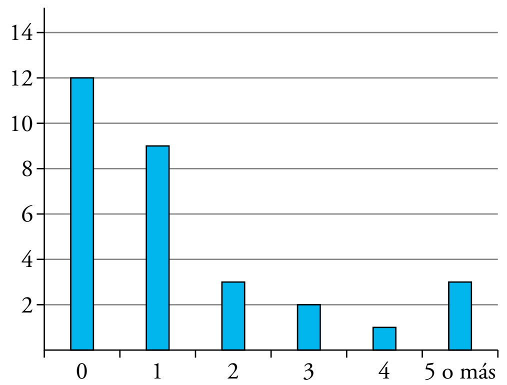
b) Número de asignaturas suspensas que tienen los alumnos y las alumnas de una clase.

N.º DE ASIGNATURAS SUSPENSAS	N.º DE ALUMNOS Y ALUMNAS
0	12
1	9
2	3
3	2
4	1
5 o más	3

a) Mediante un histograma:



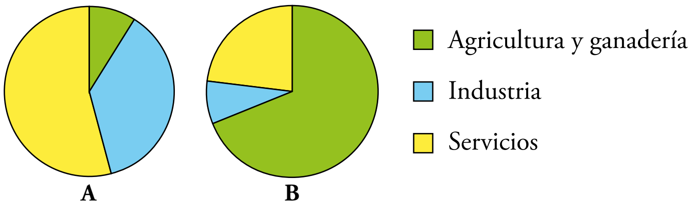
b) Mediante un diagrama de barras:



Página 227

2 **Los diagramas de sectores se utilizan a menudo para comparar la misma distribución en distintos países o regiones.**

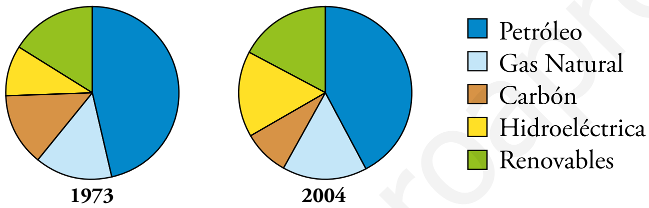
Observa los sectores que muestran cómo se divide la población trabajadora de dos países: Austria y Mauritania. ¿A cuál pertenece cada uno? Explica por qué.



A → Austria por ser mayor los sectores de servicios e industria y menor el de la agricultura y ganadería.

B → Mauritania, por que es mayor el sector de la agricultura y ganadería.

3 **Observa la evolución del consumo mundial de energías primarias por fuentes energéticas:**



a) Explica qué energías han aumentado su consumo y cuáles han disminuido.

b) Busca en Internet el diagrama correspondiente al año actual.

a) Del año 1973 al 2004 ha aumentado el consumo del gas natural y de energías hidroeléctricas y, ha disminuido el consumo de petróleo y de carbón.

Se mantiene el consumo de energías renovables.

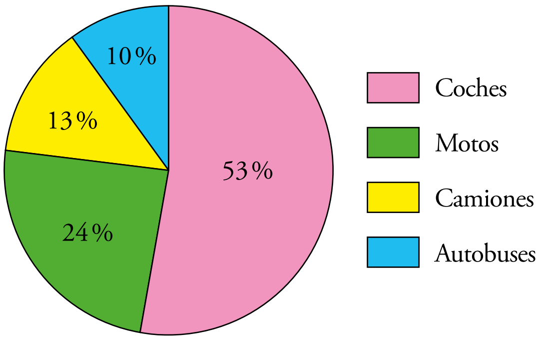
b) El alumnado buscará el diagrama de sectores del año correspondiente.

Página 228

Hazlo tú

- **Un ferri transporta distintos tipos de vehículos. Elabora el diagrama de sectores según estos datos: Coches: 53 %; Motos: 24 %; Camiones: 13 %; Autobuses: 10 %.**

TIPOS DE VEHÍCULOS	PORCENTAJE	f_r	ÁNGULO
Coches	53 %	0,53	$0{,}53 \cdot 360° = 190{,}8°$
Motos	24 %	0,24	$0{,}24 \cdot 360° = 86{,}4°$
Camiones	13 %	0,13	$0{,}13 \cdot 360° = 46{,}8°$
Autobuses	10 %	0,10	$0{,}10 \cdot 360° = 360°$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 229

Practica

Población y muestra. Variables

1 **Indica, para cada caso propuesto:**

— Cuál es la población, y cuáles, los individuos.

— Cuál es la variable y qué tipo de variable es.

a) El peso de los recién nacidos en la Comunidad Valenciana a lo largo del año pasado.

b) Cantidad de lluvia recogida en un cierto observatorio meteorológico en cada año del presente siglo.

c) Número de mascotas en los hogares españoles.

d) Tipos de coches (marca y modelo) que tiene cada vecino de mi urbanización.

e) Número de tarjetas amarillas mostradas en cada partido de fútbol de 1.ª división esta temporada.

a) Población: los recién nacidos en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Individuos: cada bebe recién nacido en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Variable: peso.

Es una variable cuantitativa continua.

b) Población: los años del presente siglo.

Individuos: cada año del siglo.

Variable: cantidad de lluvia recogida.

Es una variable cuantitativa continua.

c) Población: hogares españoles.

Individuos: cada hogar español.

Variable: número de mascotas.

Es una variable cuantitativa discreta.

d) Población: vecinos de mi urbanización.

Individuos: cada vecino de mi urbanización.

Variable: tipo de coche.

Es una variable cualitativa.

e) Población: partidos de fútbol de 1ª división de la temporada pasada.

Individuos: cada partido de fútbol de la temporada.

Variable: número de tarjetas amarillas mostradas.

Es una variable cuantitativa discreta.

2 **Se quieren realizar los siguientes estudios:**

I. El sexo (niño o niña) de cada bebé nacido en un hospital a lo largo de un año.

II. Qué periódico lee cada habitante de una ciudad.

III. Las alturas y los pesos de todos los alumnos y las alumnas de la clase.

IV. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

V. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población, y cuáles, los individuos.

b) Indica en cada uno cuál es la variable que se estudia y de qué tipo es.

c) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) I. Población: los bebés nacidos en un hospital a lo largo de un año.

Individuos: cada uno de los bebés nacidos en el hospital ese año.

II. Población: los habitantes de una ciudad.

Individuos: cada uno de los habitantes de la ciudad.

III. Población: los alumnos y alumnas de la clase.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas de la clase.

IV. Población: las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

Individuos: cada una de las personas que han visto la obra en la ciudad.

V. Población: los alumnos y alumnas de un centro escolar.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas del centro escolar.

b) I. La variable es el sexo. Es una variable cualitativa.

II. La variable es el periódico. Es una variable cualitativa.

III. Las variables son la altura y el peso. Son variables cuantitativas continuas.

IV. La variable es la edad. Es una variable cuantitativa continua.

V. La variable es los estudios que se elegirán al terminar la ESO. Es una variable cualitativa.

c) Es necesario recurrir a una muestra en los casos II y IV porque pueden ser poblaciones muy numerosas e incluso difíciles de controlar.

En los demás casos no sería necesario ya que en el hospital se lleva un registro continuo y obligatorio de los nacimientos, y en la clase y el centro escolar no hay tantos alumnos y son fáciles de controlar y preguntar.

3 **Di cuáles de las siguientes muestras están «razonablemente» bien tomadas:**

a) En una frutería, para ver cómo están de duros los aguacates, tocamos cinco piezas.

b) Hablo con diez de mis amistades sobre política para saber quién ganará este año las elecciones.

c) Ojeamos diez páginas de un libro para ver si nos gustan sus ilustraciones.

d) Tomo café en cuatro bares de mi barrio para ver cuánto cuesta un café en España.

a) La muestra tiene pocas piezas.

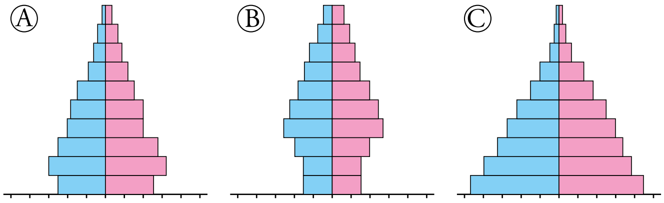
b) Los individuos no están elegidos al azar.

c) Bien tomada.

d) Los individuos no están elegidos al azar.

Interpretación de gráficos

4 **Estas pirámides de población muestran la distribución por edades (de 10 en 10 años) y sexo (hombres a la izquierda y mujeres a la derecha) de tres países:**



Teniendo en cuenta el problema resuelto 1 de la página anterior, asocia, justificadamente, una gráfica a cada uno de estos países:

I. País del tercer mundo.

II. País en vías de desarrollo.

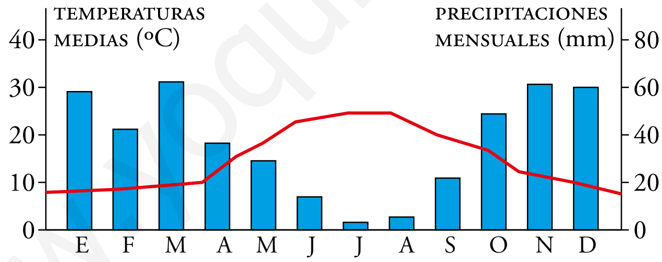
III. País desarrollado con un sistema estable.

La pirámide *C* es la de un país del tercer mundo, ya que hay muchos nacimientos y muy pocas personas llegan a ser ancianas.

La pirámide *B* corresponde a un país desarrollado con un sistema estable. Su base es más estrecha debido al descendo de la natalidad y es en la que hay mayor esperanza de vida.

La pirámide *A* representa un país en vías de desarrollo. Tiene una forma intermedia entre las otras dos.

5 **Es frecuente que en un mismo gráfico se representen dos series de datos relativos a una misma variable. En este se muestran datos sobre la climatología de Badajoz, durante un año.**



a) ¿Qué representan las barras?

b) ¿Qué representa la línea continua?

c) ¿Cuáles son las variables? ¿De qué tipo son?

d) Describe la relación entre las dos variables y razona por qué ocurre así.

a) La cantidad de lluvia caída en cada mes.

b) La temperatura media a lo largo del año.

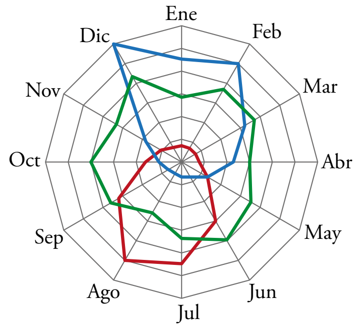
c) Temperaturas medias: cuantitativa continua.

Precipitaciones mensuales: cuantitativa continua.

d) En general cuando una de las variables sube la otra baja. Es lógico que suceda así pues en Badajoz los meses que menos llueve son los de verano, que es cuando más calor hace. Y viceversa, cuando más frío hace es cuando hay más precipitaciones.

6 **Observa el gráfico de la derecha relativo a las ventas de algunos artículos en un pequeño comercio.**

a) ¿Qué color le corresponde a los bañadores? ¿Y a las toallas? ¿Y a los guantes?



b) ¿En qué estación del año se han vendido más bañadores? ¿Y menos? ¿Por qué?

c) ¿Cuándo se han vendido más cantidad de guantes?

d) Explica cómo se comporta la gráfica de las toallas.

a) Bañadores → Rojo. Toallas → Verde. Guantes → Azul.

b) Se han vendido más bañadores en agosto, y menos, en febrero.

En verano, lógicamente, se venden muchos más bañadores que en invierno.

c) En diciembre.

d) La venta de toallas sufre pocas variaciones a lo largo del año, puesto que las toallas se usan indistintamente en verano y en invierno, ya sea dentro de los hogares o fuera.

Página 230

Elaboración de tablas y gráficos

7 **Al preguntar al alumnado de un grupo de tercero de ESO por el número de libros que han leído en el último mes, hemos obtenido los datos siguientes:**

2	1	3	1	1	5	1	2	4	3
1	0	2	4	1	0	2	1	2	1
3	2	2	1	2	3	1	2	0	2

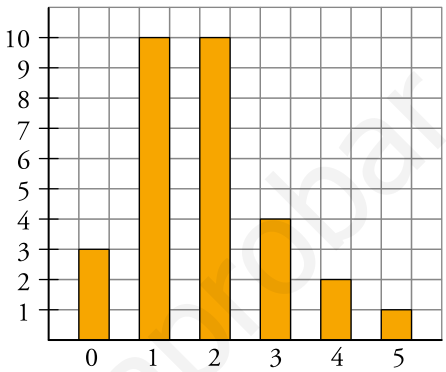
a) Haz la tabla de frecuencias absolutas.

b) Realiza el diagrama de barras que corresponde a estos datos.

a)

x_i	f_i
0	3
1	10
2	10
3	4
4	2
5	1

b)



8 **Estos son los mejores tiempos tomados en carreras de 10 km a los deportistas de un club de atletismo:**

42:20	**40:08**	**47:32**	**49:50**	**43:24**	**48:31**	**51:42**
45:53	**47:17**	**50:37**	**49:07**	**51:37**	**43:28**	**45:18**
44:36	**46:15**	**50:48**	**47:59**	**51:21**	**43:37**	**42:14**

a) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los siguientes intervalos:

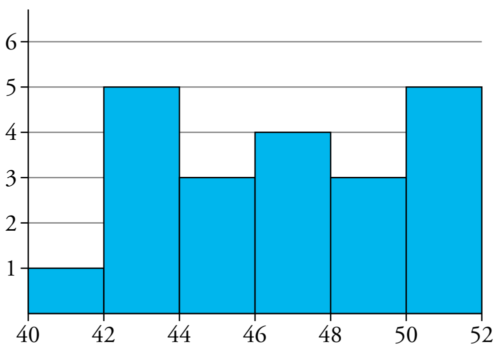
40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52

b) Traza el histograma correspondiente.

a)

Intervalo	Recuento	f_i
40-42	I	1
42-44	卌	5
44-46	III	3
46-48	IIII	4
48-50	III	3
50-52	卌	5

b)



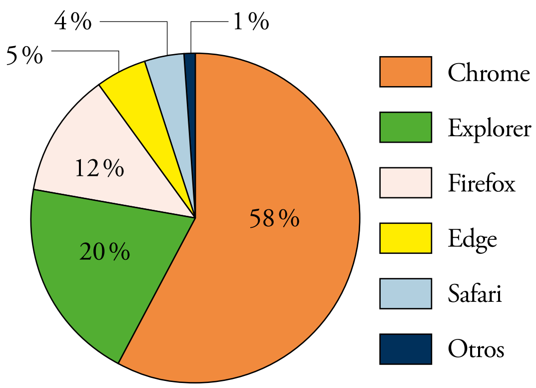
9 **Elabora, con los siguientes datos, un diagrama de sectores con el porcentaje de los navegadores web más utilizados en el mundo:**

Chrome: 58 % **Internet Explorer: 20 %**

Firefox: 12 % **Microsoft Edge: 5 %**

Safari: 4 % **Otros: 1 %**

NAVEGADORES	PORCENTAJE	f_r	ÁNGULO
Chrome	58 %	0,58	0,58 · 360° = 208,8°
Explorer	20 %	0,20	0,20 · 360° = 72°
Firefox	12 %	0,12	0,12 · 360° = 43,2°
Edge	5 %	0,05	0,05 · 360° = 18°
Safari	4 %	0,04	0,04 · 360° = 14,4°
Otros	1 %	0,01	0,01 · 360° = 3,6°



10 **Se ha realizado un estudio sobre la utilidad que le dan al *Smartphone* los menores de 26 años y los de 26 a 50 años. Los resultados vienen dados en la siguiente tabla:**

UTILIDAD	MENORES DE 26	DE 26 A 50
Juegos y entretenimiento	35 %	12 %
Redes sociales	33 %	26 %
Noticias	5 %	37 %
Llamadas y mensajes	27 %	25 %

a) Elabora los correspondientes diagramas de sectores.

b) Describe los parecidos y las diferencias de ambos grupos.

c) Inventa un diagrama de sectores para los mayores de 50 años.

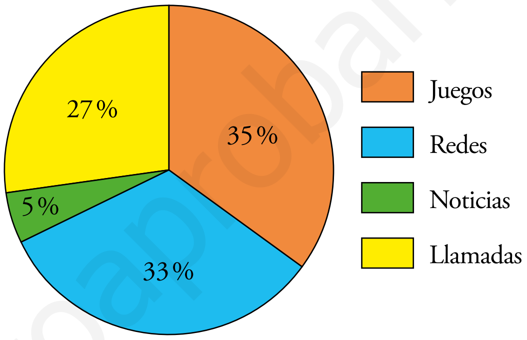
a) • Menores de 26:

Juegos → 35 % → $0{,}35 \cdot 360° = 126°$

Redes → 33 % → $0{,}33 \cdot 360° = 118{,}8°$

Noticias → 5 % → $0{,}05 \cdot 360° = 18°$

Llamadas → 27 % → $0{,}27 \cdot 360° = 97{,}2°$



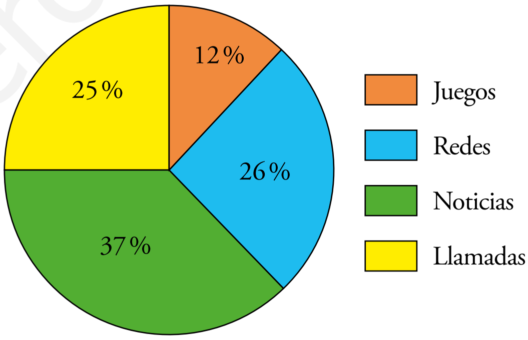
• Mayores de 26:

Juegos → 12 % → $0{,}12 \cdot 360° = 43{,}2$

Redes → 26 % → $0{,}26 \cdot 360° = 93{,}6°$

Noticias → 37 % → $0{,}37 \cdot 360° = 133{,}2°$

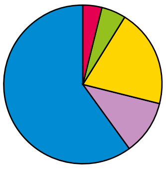
Llamadas → 25 % → $0{,}25 \cdot 360° = 90°$



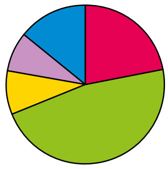
b) El uso para llamadas es muy parecido ens ambos grupos. Los jóvenes lo usan más para jugar, y los adultos, para consultar información.

c) Respuesta abierta.

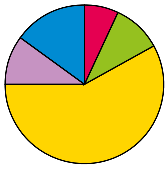
11 **Estas gráficas corresponden a un estudio sobre gustos musicales, realizado a cuatro muestras de población tomadas en distintos ambientes:**



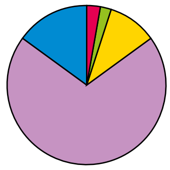
MUESTRA: A la salida de una discoteca.



MUESTRA: En la puerta del conservatorio musical.



MUESTRA: En una fiesta en la casa de Colombia.



MUESTRA: En un concurso de grafiteros.

a) Indica, entre estos cinco, el tipo de música que representa cada color: Pop-Rock, Clásica, Jazz, Reguetón, Rap.

b) Estima a ojo el porcentaje de cada tipo de música en cada una de las muestras.

a) Azul → Pop-Rock. Verde → Clásica. Amarillo → Reguetón.
Morado → Rap. Rojo → Jazz (por eliminación).

b) • A la salida de una discoteca:

— Jazz: 5 %	— Clásica: 5 %	—Reguetón: 25 %
— Rap: 10 %	— Pop-Rock: 55 %	

• En la puerta del conservatorio:

— Jazz: 20 %	— Clásica: 45 %	—Reguetón: 11 %
— Rap: 9 %	— Pop-Rock: 15 %	

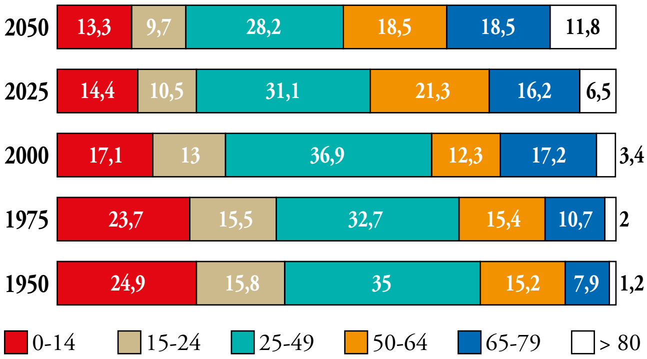
• En una fiesta en la casa de Colombia:

— Jazz: 7 %	— Clásica: 10 %	—Reguetón: 58 %
— Rap: 10 %	— Pop-Rock: 15 %	

• En un concurso de grafiteros:

— Jazz: 2 %	— Clásica: 2 %	—Reguetón: 10 %
— Rap: 70 %	— Pop-Rock: 16 %	

12 **El siguiente gráfico describe la evolución estimada de los grupos de población por edades (en porcentaje) en la UE para el periodo 1950-2050:**



a) ¿Qué grupo disminuirá más su porcentaje? ¿Cuál aumentará más?

b) Si se estima que habrá 1 000 millones de habitantes en 2050, ¿cuántos corresponden a cada grupo?

c) Sabiendo que en el año 2000 había unas 125 200 000 personas mayores de 50 años, ¿qué población tenía la UE dicho año?

d) De 2000 a 2050, ¿en qué porcentaje se estima que disminuirán los menores de 14 años? ¿En qué porcentaje se estima que aumentarán los mayores de 80 años?

e) Describe la evolución de cada grupo.

a) Disminuirá más su porcentaje el grupo de edades entre 0 y 14. Hay dos grupos que serán los que más aumenten, el de 65 a 79 años y el de mayores de 80 años.

b) 0 - 14 $\to$ 133 000 000   15 - 24 $\to$ 97 000 000

25 - 49 $\to$ 282 000 000   50 - 64 $\to$ 185 000 000

65 - 79 $\to$ 185 000 000   > 80 $\to$ 118 000 000

c) Los mayores de 50 años, en el 2000, corresponden a un 32,9 % (12,3 + 17,2 + 3,4). Por tanto:

$$100 \leftrightarrow 32{,}9$$
$$125\,200\,000 \leftrightarrow x$$

Despejando x de esta regla de tres, obtenemos que la población de toda la UE será de 4 119 080 personas.

d) Los menores de 14 años disminuirán en un 24,9 – 17,1 = 78 %.

Los mayores de 80 años aumentarán en un 3,4 – 1,2 = 2,2 %

e) Los grupos que van de 0 a 14 años y de 15 a 24 años disminuyen de forma más o menos gradual. El grupo que está entre 25 y 49 años va disminuyendo, aunque sufrió un repunte en 2000. Por el contrario, el que va de 50 a 64 años va aumentando, aunque se estima un descenso en 2025. La tónica general de los grupos que van de 65 a 80 años y el de los mayores de 80 es al alza, aunque el primero sufrió un pequeño descenso entre los años 1975 y 2000.

AUTOEVALUACIÓN

Página 231

1 Indica, para cada caso, cuáles son los *individuos,* cuál la *población,* cuál la *variable* y de qué tipo es:

a) Número de veces al año que ha usado su tarjeta sanitaria cada paciente de una sociedad médica.

b) Tiempo de espera de cada paciente en una consulta de un centro de salud a lo largo de un día.

c) Tipo de especialista al que acude cada paciente de un centro de salud durante un mes.

a) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes.

Variable: número de veces al año que han pasado su tarjeta.

Tipo de variable: cuantitativa discreta.

b) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes de la consulta.

Variable: tiempo de espera en la consulta.

Tipo de variable: cuantitativa continua.

c) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes de un centro de salud.

Variable: tipo de especialista.

Tipo de variable: cualitativa.

2 **Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:**

28	**4**	**12**	**35**	**2**	**26**	**45**	**22**	**6**	**23**
27	**16**	**18**	**32**	**8**	**47**	**8**	**12**	**34**	**15**
28	**37**	**7**	**39**	**15**	**25**	**18**	**17**	**27**	**15**

a) Haz una tabla, repartiéndolos en intervalos de extremos 1,5 - 9,5 - 17,5 - 25,5 - 33,5 - 41,5 - 49,5.

b) Representa los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

c) Elabora una tabla con su correspondiente diagrama de sectores a partir de esta clasificación:

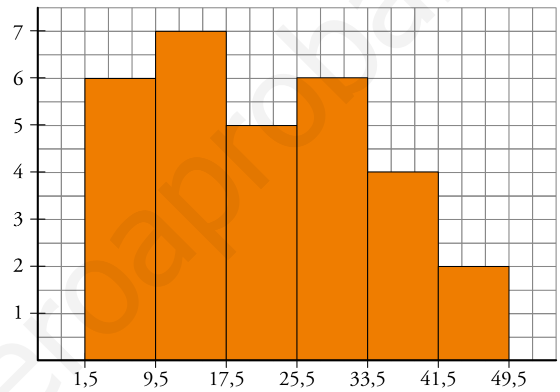
***Espera poco*: 1-15 min. *Espera un rato*: 16-30 min.**

***Espera mucho*: 31-50 min.**

a)

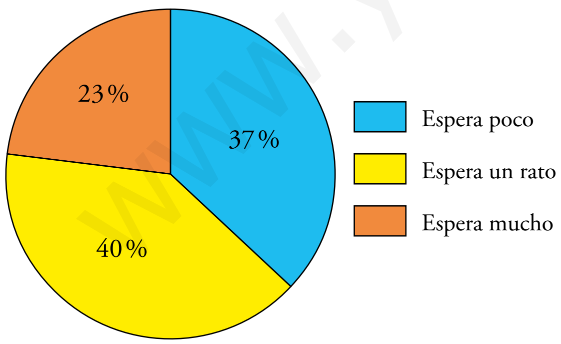
INTERVALO	FRECUENCIA
1,5 - 9,5	6
9,5 - 17,5	7
17,5 - 25,5	5
25,5 - 33,5	6
33,5 - 41,5	4
41,5 - 49,5	2

b)



c)

INTERVALO	FRECUENCIA	f_r	
Espera poco	11	0,37	→ 133,2°
Espera un rato	12	0,40	→ 144°
Espera mucho	7	0,23	→ 82,8°



$0,37 \cdot 360° = 133,2°$; $0,4 \cdot 360° = 144°$

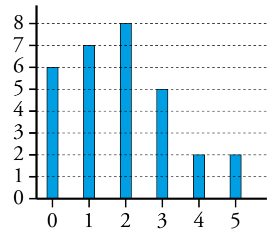
$0,23 \cdot 360° = 82,8°$

3 **Número de días que han ido a la biblioteca del colegio los estudiantes de un curso:**

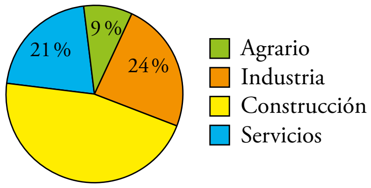
3	**1**	**2**	**4**	**0**	**2**	**1**	**3**	**1**	**0**	**2**	**0**	**3**	**5**	**2**
0	**2**	**4**	**1**	**2**	**1**	**2**	**0**	**5**	**3**	**3**	**1**	**2**	**1**	**0**

Haz una tabla de frecuencias y representa los resultados mediante un gráfico adecuado.

x_i	0	1	2	3	4	5	
f_i	6	7	8	5	2	2	30



4 **En una determinada región se ha hecho un estudio sobre los accidentes mortales producidos en el trabajo según el sector de actividad. Estos son los resultados:**



a) ¿Cuál es el porcentaje de accidentes mortales producidos en el sector de la construcción?

b) Si hubo 135 accidentes mortales en el sector agrario, ¿cuál fue el número total de accidentes mortales en la región?

c) ¿Cuántos accidentes mortales hubo en cada uno de los sectores?

a) $100 - 9 - 24 - 21 = 46$.

Accidentes mortales producidos en la construcción: 46 %

b) $\left.\begin{array}{l} 135 \rightarrow 9\% \\ x \rightarrow 100\% \end{array}\right\} x = \dfrac{135 \cdot 100}{9} = 1500$

Hubo 1 500 accidentes mortales en la región.

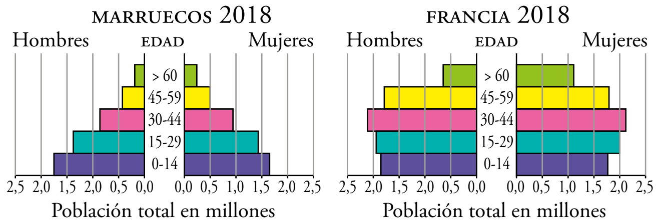
c) Agrario $\rightarrow$ 135

Industria $\rightarrow$ $0{,}24 \cdot 1\,500 = 360$

Construcción $\rightarrow$ $0{,}46 \cdot 1\,500 = 690$

Servicios $\rightarrow$ $0{,}21 \cdot 1\,500 = 315$

5 **Observa estas pirámides de población:**



Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

a) La proporción de ancianas y ancianos en Francia es mucho mayor que en Marruecos.

b) Hay más ancianas que ancianos en ambos países.

c) La proporción de menores de 15 años es mayor en Marruecos que en Francia.

a) Verdadero. Se observa que el número de nacimientos es muy similar en ambos países y sin embargo el de personas mayores de 60 (barras verdes) es mucho mayor en Francia.

b) Verdadero. Las barras verdes de la derecha de cada pirámide, correspondientes a las mujeres, son más largas que las de la izquierda, hombres.

c) Falso. Las barras moradas de ambos países son aproximadamente iguales.

15 PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

2 DOS TIPOS DE PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Página 234

1 **Calcula la media, la mediana y la moda de cada una de estas distribuciones estadísticas:**

a) 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 11, 12, 17

b) 10, 12, 6, 9, 10, 8, 9, 10, 14, 2

c) 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 3, 7

d) 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1

a) $\bar{x} = \frac{4+5+6+6+6+6+7+11+12+17}{10} = \frac{80}{10} = 8$

$Me = \frac{6+6}{2} = 6$ $\qquad$ $Mo = 6$

b) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 6, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 14

$\bar{x} = \frac{2+6+8+9+9+10+10+10+12+14}{10} = \frac{90}{10} = 9$

$Me = \frac{9+10}{2} = 9,5$ $\qquad$ $Mo = 10$

c) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7

$\bar{x} = \frac{2+3+3+3+3+4+5+6+6+6+6+7}{12} = \frac{54}{12} = 4,5$

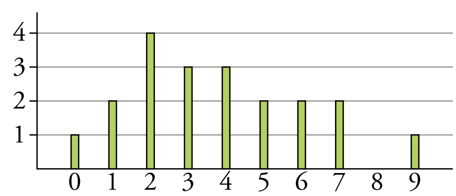
$Me = \frac{4+5}{2} = 4,5$ $\qquad$ $Mo = 3$ y 6

d) Ordenamos los datos de menor a mayor: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+4+3+2+1}{9} = \frac{25}{9} \approx 2,78$

$Me = 3$ $\qquad$ $Mo = 1, 2, 3$ y 4

2 **Halla los parámetros de centralización de esta distribución dada por su diagrama de barras:**



$\bar{x} = \frac{0+2\cdot1+4\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+2\cdot5+2\cdot6+2\cdot7+9}{20} = \frac{76}{20} = 3,8$

Son 20 valores así que la mediana estará entre los que ocupen las posiciones 10 y 11.

$Me = \frac{3+4}{2} = 3,5$

$Mo = 2$

Página 235

3 Halla los parámetros de dispersión de las distribuciones del ejercicio 1 de la página anterior.

a) Recorrido o rango = 17 – 4 = 13

$$DM = \frac{|4-8|+|5-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|7-8|+|11-8|+|12-8|+|17-8|}{10} =$$
$$= \frac{4+3+2+2+2+2+1+3+4+9}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2+11^2+12^2+17^2}{10} - 8^2 =$$
$$= \frac{16+25+36+36+36+36+49+121+144+289}{10} - 64 = 78,8 - 64 = 14,8$$

$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{14,8} = 3,85$

b) Recorrido o rango = 14 – 2 = 12

$$DM = \frac{|2-9|+|6-9|+|8-9|+|9-9|+|9-9|+|10-9|+|10-9|+|10-9|}{10} +$$
$$+ \frac{|12-9|+|14-9|}{10} = \frac{7+3+1+0+0+1+1+1+3+5}{10} = \frac{22}{10} = 2,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+6^2+8^2+9^2+9^2+10^2+10^2+10^2+12^2+14^2}{10} - 9^2 =$$
$$= \frac{4+36+64+81+81+100+100+100+144+196}{10} - 81 = 90,6 - 81 = 9,6$$

$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{9,6} = 3,1$

c) Recorrido o rango = 7 –2 = 5

$$DM = \frac{|2-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|4-4,5|+|5-4,5|}{12} +$$
$$+ \frac{|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|7-4,5|}{12} =$$
$$= \frac{2,5+1,5+1,5+1,5+1,5+0,5+0,5+1,5+1,5+1,5+1,5+2,5}{12} = \frac{18}{12} = 1,5$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+3^2+3^2+3^2+3^2+4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2}{12} - 4,5^2 =$$
$$= \frac{4+9+9+9+9+16+25+36+36+36+36+49}{12} - 20,25 = 22,83 - 20,25 = 2,58$$

$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{2,58} = 1,61$

d) Recorrido o rango = 5 – 1 = 4

$$DM = \frac{\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|}{9} +$$
$$+ \frac{\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|5-\frac{25}{9}\right|}{9} = \frac{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{11}{9}+\frac{11}{9}+\frac{20}{9}}{9} = \frac{92}{81} \approx 1,14$$

$$\text{Varianza} = \frac{1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+4^2+4^2+5^2}{9} - \left(\frac{25}{9}\right)^2 =$$
$$= \frac{1+1+4+4+9+9+16+16+25}{9} - \frac{625}{81} = \frac{85}{9} - \frac{625}{81} = 1,73$$

$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{1,73} = 1,31$

4 Halla de dos formas distintas la varianza de esta distribución: 8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15.

7, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 15

$$\bar{x} = \frac{7+7+8+9+11+13+15+15}{8} = \frac{85}{8} = 10,625$$

Forma 1

Promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:

$$\text{Varianza} = \frac{(7-10,625)^2+(7-10,625)^2+(8-10,625)^2+(9-10,625)^2+(11-10,625)^2}{8} +$$

$$+\frac{(13-10,625)^2+(15-10,625)^2+(15-10,625)^2}{8} =$$

$$= \frac{3,625^2+3,625^2+2,625^2+1,625^2+0,375^2+2,375^2+4,375^2+4,375^2}{8} = 9,984$$

Forma 2

Promedio de los cuadrados menos el cuadrado de la media:

$$\text{Varianza} = \frac{7^2+7^2+8^2+9^2+11^2+13^2+15^2+15^2}{8} - 10,625^2 =$$

$$= \frac{49+49+64+81+121+169+225+225}{8} - 112,89 = 122,875 - 112,891 = 9,984$$

3 CÁLCULO DE $\bar{x}$ Y σ EN TABLAS DE FRECUENCIAS

Página 236

1 Calcula la media de las siguientes distribuciones:

a) NÚMERO DE HIJOS E HIJAS

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1

b) NÚMERO DE SUSPENSOS EN ESTA EVALUACIÓN

x_i	0	1	2	3	4
f_i	17	11	3	1	1

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1	50
$x_i \cdot f_i$	0	14	30	21	16	10	6	7	104

$$\bar{x} = \frac{104}{50} = 2,08$$

b)

x_i	0	1	2	3	4	
f_i	17	11	3	1	1	33
$x_i \cdot f_i$	0	11	6	3	4	24

$$\bar{x} = \frac{24}{33} \approx 0,727$$

Página 237

2 **Halla la media y la desviación típica de esta distribución:**

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL			

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL	80	240	842

$\bar{x} = \frac{240}{80} = 3$ $\sigma = \sqrt{\frac{842}{80} - 3^2} \approx 1,235$

3 **Completa en tu cuaderno la tabla con las marcas de clase, y calcula la media y la desviación típica.**

PESOS	PERSONAS
50 a 58	6
58 a 66	12
66 a 74	21
74 a 82	16
82 a 90	5

➡

x_i	f_i
54	6
	12
	21
	16
	5

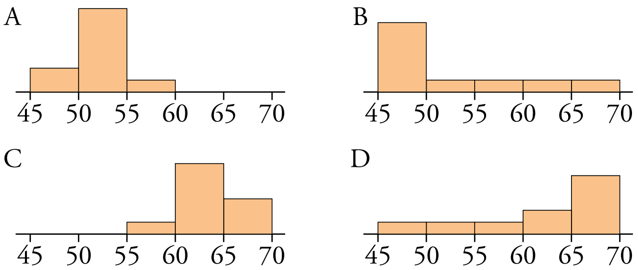
x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54	6	324	17 496
62	12	744	46 128
70	21	1 470	102 900
78	16	1 248	97 344
86	5	430	36 980
TOTAL	60	4 216	300 848

$\bar{x} = \frac{4\,216}{60} = 70,267$ $\sigma = \sqrt{\frac{300\,848}{30} - 70,267^2} \approx 8,76$

4 INTERPRETACIÓN CONJUNTA DE $\bar{x}$ Y σ

Página 238

1 **Las siguientes gráficas muestran los porcentajes de encestes de los jugadores de cuatro equipos. A partir de los datos de la tabla de la derecha, indica la media y la desviación típica correspondiente a cada equipo.**



EQUIPO	$\bar{x}$	σ
I	52,5	7,1
II	62	6,9
III	63,5	3
IV	52	2,7

A $\to$ Equipo IV

B $\to$ Equipo I

C $\to$ Equipo III

D $\to$ Equipo II

Página 239

2 **En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:**

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943 €	132 €	37 €
DESV. TÍPICA	148 €	22 €	12 €

Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943	132	37
DESV. TÍPICA	148	22	12
CV	0,157	0,167	0,324

$$CV_{\text{PIANO}} = \frac{148}{943} = 0,157 \;\rightarrow\; 15,7\,\%$$

$$CV_{\text{FLAUTAS}} = \frac{22}{132} = 0,167 \;\rightarrow\; 16,7\,\%$$

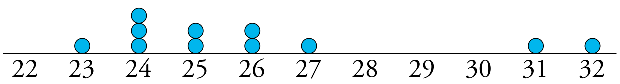
$$CV_{\text{ARMÓNICAS}} = \frac{12}{37} = 0,324 \;\rightarrow\; 32,4\,\%$$

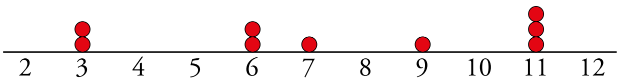
Podemos apreciar que la variación en los pianos y las flautas es muy parecida. En cambio, la variación de las armónicas es mayor que las anteriores, de hecho, es aproximadamente el doble que en las flautas.

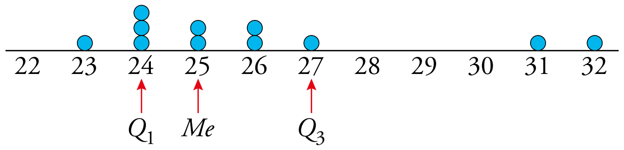
5 ▶ PARÁMETROS DE POSICIÓN: MEDIANA Y CUARTILES

Página 240

1 **Calcula Q_1, *Me* y Q_3 y sitúalos en cada una de las siguientes distribuciones representadas:**

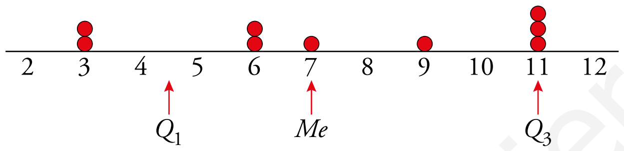
a) 

b) 

a) 

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & Q_1 & & & Me & & & Q_3 & & \\ 23 & 24 & \boxed{24} & 24 & 25 & \boxed{25} & 26 & 26 & \boxed{27} & 31 & 32 \end{array}$$

Los número marcados separan los datos en cuatro partes iguales.

b) 

Q_1: $\boxed{\dfrac{3+6}{2}=4}$ Q_3: $\boxed{\dfrac{11+11}{2}=11}$ *Me*

$$3 \quad 3 \quad | \quad 6 \quad 6 \quad \boxed{7} \quad 9 \quad 11 \quad | \quad 11 \quad 11$$

2 **En cada una de las distribuciones siguientes:**

a) Calcula Q_1, Me y Q_3.

b) Representa los datos y sitúa en ellos Q_1, Me y Q_3.

A: 0, 0, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10

B: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 14, 17, 29, 35

C: 12, 13, 19, 25, 63, 85, 123, 132, 147

a)

$$\text{A:}\quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad \overset{Q_1}{\boxed{3}} \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad \overset{Me}{\boxed{4}} \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad \overset{Q_3}{\boxed{8}} \quad 9 \quad 9 \quad 10$$

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 15 : 4 = 3,75.

$Q_1 = 3$; $Me = 4$; $Q_3 = 8$

$$\text{B:}\quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \overset{Q_1}{\boxed{2}} \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad \overset{Me}{\boxed{\frac{4+7}{2} = 5,5}} \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad \overset{Q_3}{\boxed{14}} \quad 17 \quad 29 \quad 35$$

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 14 : 4 = 3,5

$Q_1 = 2$

$$Me = \frac{4+7}{2} = 5,5$$

$Q_3 = 14$

$$\text{C:}\quad 12 \quad 13 \quad \overset{Q_1}{\boxed{\frac{13+19}{2} = 16}} \quad 19 \quad 25 \quad \overset{Me}{\boxed{63}} \quad 85 \quad 123 \quad \overset{Q_3}{\boxed{\frac{123+132}{2} = 127,5}} \quad 132 \quad 147$$

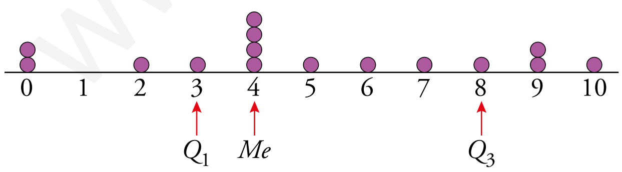
Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta es 9 : 4 = 2,25

$Q_1 = 16$

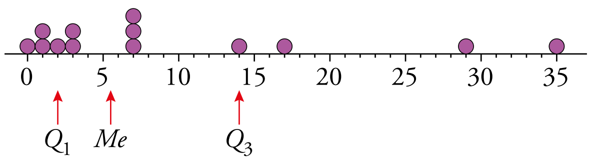
$Me = 63$

$Q_3 = 127,5$

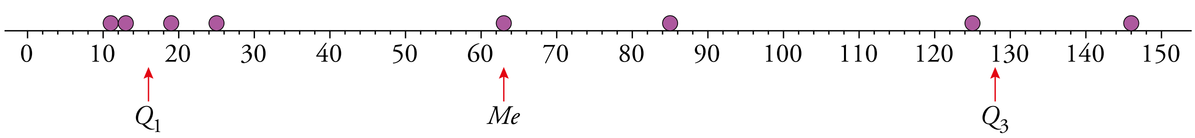
b) A



B



C

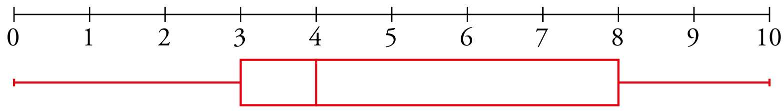


Página 241

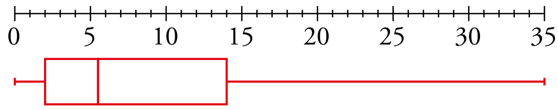
3 **Representa con un diagrama de caja y bigotes cada distribución de la actividad 2 de la página anterior.**

Utiliza los valores de Q_1, *Me* y Q_3 que hallaste en esa actividad.

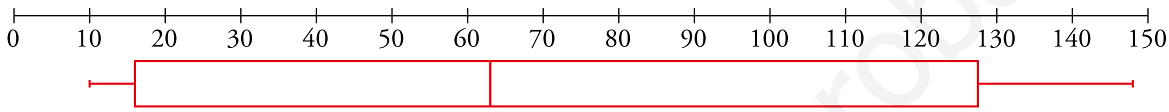
A. $Q_1 = 3$, $Me = 4$ y $Q_3 = 8$



B. $Q_1 = 2$, $Me = 5,5$ y $Q_3 = 14$



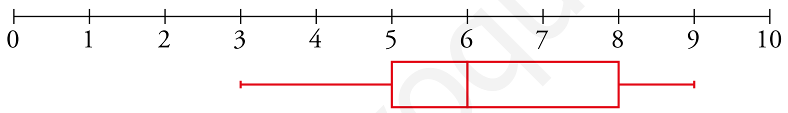
C. $Q_1 = 16$, $Me = 63$ y $Q_3 = 127,5$



4 **Representa mediante un diagrama de caja y bigotes los siguientes puntos conseguidos en la diana:**

7 6 6 8 5	**5 7 9 6 8**	**4 7 5 8 6**
7 5 6 6 7	**5 6 6 5 8**	**6 7 5 9 3**

Los parámetros de posición son $\rightarrow$ $Q_1 = 5$, $Me = 6$ y $Q_3 = 8$



6 ▸ OBTENCIÓN DE $\bar{x}$ Y σ CON LA CALCULADORA

Página 242

1 **Halla $\bar{x}$ y σ con la calculadora en la distribución a) de la actividad 1 de la página 236.**

$n = 50$; $\Sigma x = 104$; $\Sigma x^2 = 336$; $\bar{x} = 2{,}08$; $\sigma_x = 1{,}547126$

2 **Halla con la calculadora $\bar{x}$ y σ en la distribución b) de la actividad 1 de la página 236.**

$n = 33$; $\Sigma x = 24$; $\Sigma x^2 = 48$; $\bar{x} = 0{,}\overset{\frown}{72}$; $\sigma_x = 0{,}9620914$

Página 243

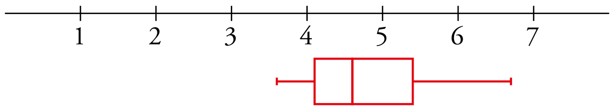
Hazlo tú

- **Construye el diagrama de caja y bigotes para el colectivo reducido (los 20 adultos sin niñas ni niños) y compáralo con el del grupo inicial.**

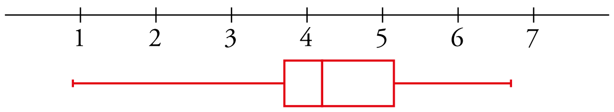
$\boxed{Q_1 = \dfrac{40 + 42}{2} = 41}$ $\boxed{Me = \dfrac{45 + 47}{2} = 46}$ $\boxed{Q_3 = \dfrac{53 + 55}{2} = 54}$

36 37 37 37 40 | 42 43 43 44 45 | 47 48 50 52 53 | 55 58 61 63 67

- Sin los 5 miembros más jóvenes, el diagrama de caja y bigotes es el siguiente:



Con los 5 niños:



Haciendo una comparación de este diagrama y el del problema resuelto anterior podemos observar que las cajas son muy parecidas, lo que varía es la longitud del bigote izquierdo, ya que hemos suprimido las edades más jóvenes.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 244

Practica

Parámetros de centralización y dispersión

1 **Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, varianza, desviación típica y coeficiente de variación en cada caso:**

a) 6, 3, 4, 2, 5, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 9, 6, 7, 7, 6, 4, 6, 10, 6

b) 11, 12, 12, 11, 10, 13, 14, 15, 14, 12

c) 165, 167, 172, 168, 164, 158, 160, 167, 159, 162

Calculamos la tabla de frecuencias para facilitar el cálculo:

a) 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 9, 7, 7, 10

	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
	2	1	2	4
	3	1	3	9
	4	3	12	48
	5	3	15	75
	6	7	42	252
	7	2	14	98
	8	1	8	64
	9	1	9	81
	10	1	10	100
TOTAL		20	115	731

$\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{115}{20} = 5,75$ Recorrido = 8

$Me = \dfrac{6+6}{2} = 6$

$Mo = 6$

$\text{Varianza} = \dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{731}{20} - 5,75^2 = 3,49$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{731}{20} - 5,75^2} = 1,87$

$\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1,87}{5,75} = 0,3248 \rightarrow 32,48\,\%$

b) 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 15

	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
	10	1	10	100
	11	2	22	242
	12	3	36	432
	13	1	13	169
	14	2	28	392
	15	1	15	225
TOTAL		10	124	1 560

$\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{124}{10} = 12,4$ Recorrido = 5

$Me = \dfrac{12+12}{2} = 12$

$Mo = 12$

$\text{Varianza} = \dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{1\,560}{10} - 12,4^2 = 2,24$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{1\,560}{10} - 12,4^2} = 1,50$

$\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1,50}{12,4} = 0,1207 \rightarrow 12,07\,\%$

c) 158, 159, 160, 162, 164, 165, 167, 167, 168, 172

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
158	1	158	24 964
159	1	159	25 281
160	1	160	25 600
162	1	162	26 244
164	1	164	26 896
165	1	165	27 225
167	2	334	55 778
168	1	168	28 224
172	1	172	29 584
TOTAL	10	1 642	269 796

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1\,642}{10} = 164{,}2 \qquad \text{Recorrido} = 14$$

$$Me = \frac{164 + 165}{2} = 164{,}5$$

$$Mo = 167$$

$$\text{Varianza} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{269\,796}{10} - 164{,}2^2 = 17{,}96$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{269\,796}{10} - 164{,}2^2} = 4{,}24$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4{,}24}{164{,}2} = 0{,}0258 \;\rightarrow\; 2{,}58\,\%$$

2 **El número de calzado que llevan los alumnos y las alumnas de una clase son los siguientes:**

42, 40, 43, 45, 43   44, 38, 39, 40, 43

41, 42, 38, 36, 38   45, 38, 39, 42, 40

40, 39, 37, 36, 41   46, 44, 37, 42, 39

a) Haz una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos: 35,5 - 38,5 - 40,5 - 42,5 - 44,5 - 46,5.

b) Halla la media, la desviación típica y el CV.

a) Tabla de frecuencias:

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
35,5-38,5	37	8	296	10 952
38,5-40,5	39,5	8	316	12 482
40,5-42,5	41,5	6	249	10 333,5
42,5-44,5	43,5	5	217,5	9 461,25
44,5-46,5	45,5	3	136,5	6 210,75
	TOTALES	30	1 215	49 439,5

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1\,215}{30} = 40{,}5$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{49\,439{,}5}{30} - 40{,}5^2} = 2{,}78$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2{,}78}{40{,}5} = 0{,}0687 \;\rightarrow\; 6{,}87\,\%$$

3 **Una fábrica ha contado el número de vasos que se le rompen en cada cajón de camino a la tienda. Estos son los resultados:**

N.° DE VASOS ROTOS	0	1	2	3	4	5	6
N.° DE CAJONES	51	23	11	8	4	2	1

a) Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

b) ¿Cuál es la moda?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	51	0	0
1	23	23	23
2	11	22	44
3	8	24	72
4	4	16	64
5	2	10	50
6	1	6	36
TOTAL	100	101	289

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{101}{100} = 1,01$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{289}{100} - 1,01^2} = 1,37$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,37}{1,01} = 1,3539 \rightarrow 135,39\,\%$$

b) $Mo = 0$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

0 ⊗ 6 DATA → 0

1 ⊗ 14 DATA → 1

2 ⊗ 15 DATA → 2

3 ⊗ 7 DATA → 3

4 ⊗ 4 DATA → 4

5 ⊗ 2 DATA → 5

6 ⊗ 1 DATA → 6

Obtenemos los resultados:

n → 100

Σx → 101

Σx^2 → 289

$\bar{x}$ → 1.01

σ_n → 1.367443

4 **La siguiente tabla muestra los lanzamientos de jabalina que se han realizado en la clasificación para los juegos olímpicos:**

DISTANCIAS (m)	N.° DE LANZADORES
54 a 58	4
58 a 62	11
62 a 66	24
66 a 70	9
70 a 74	2

a) Haz una tabla con las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

a) Tabla de frecuencias:

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54-58	56	4	224	12 544
58-62	60	11	660	39 600
62-66	64	24	1 536	98 304
66-70	68	9	612	41 616
70-74	72	2	144	10 368
	TOTALES	50	3 176	202 432

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{3\,176}{50} = 63,52$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{202\,432}{50} - 63,52^2} = 3,72$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,72}{63,52} = 0,0586 \;\rightarrow\; 5,86\,\%$$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

56 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 56}$

60 $\boxed{\times}$ 14 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 60}$

64 $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 64}$

68 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 68}$

72 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{DATA}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 72}$

Obtenemos los resultados:

$\boxed{n}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 50}$

$\boxed{\Sigma x}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 3176}$

$\boxed{\Sigma x^2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 202432}$

$\boxed{\bar{x}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 63.52}$

$\boxed{\sigma_n}$ $\rightarrow$ $\boxed{\quad 3.721505}$

Parámetros de posición y diagramas de caja

5 **Halla la mediana y los cuartiles de cada distribución y representa su correspondiente diagrama de caja y bigotes:**

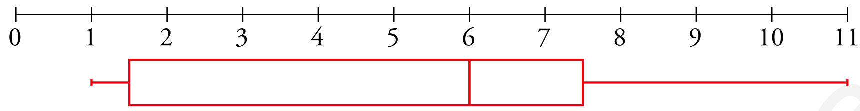
a) 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 6, 6, 7, 8 10, 11

b) 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 12, 14, 19, 22

c) 123, 125, 134, 140, 151, 173, 178, 186, 192, 198

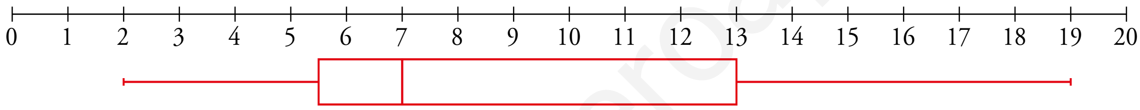
a) $\boxed{Q_1 = \dfrac{1+2}{2} = 1,5}$ $\quad$ *Me* $\quad$ $\boxed{Q_2 = \dfrac{7+8}{2} = 7,5}$

1 1 1 2 2 5 $\boxed{6}$ 6 6 7 8 10 11



b) $\boxed{Q_1 = \dfrac{5+6}{2} = 5,5}$ $\quad$ $\boxed{Me = \dfrac{7+7}{2} = 7}$ $\quad$ $\boxed{Q_3 = \dfrac{12+14}{2} = 13}$

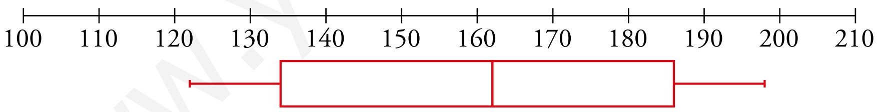
4 5 5 6 7 7 7 8 12 14 19 2



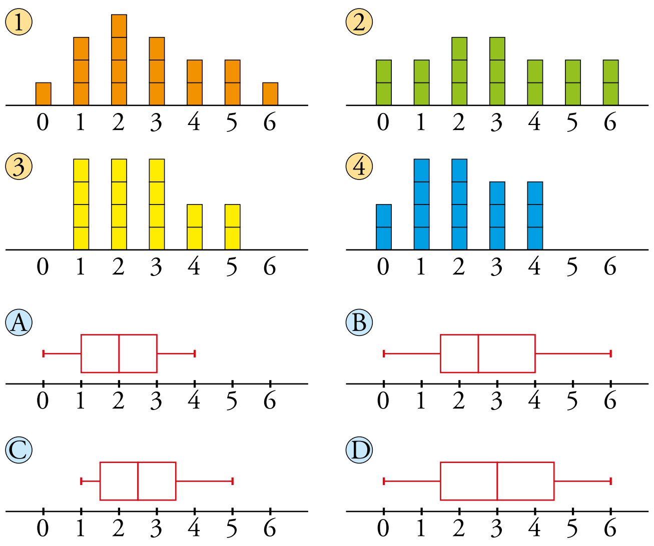
c) $\boxed{Me = \dfrac{151+173}{2} = 162}$

Q_1 $\quad$ Q_3

123 125 $\boxed{134}$ 140 151 173 178 $\boxed{186}$ 192 198



6 **Asocia cada gráfico de barras con su correspondiente diagrama de caja y bigotes:**



1 → B 2 → D 3 → C 4 → A

8 **Esta tabla muestra la distribución del número de asignaturas suspendidas en una evaluación por los estudiantes de una clase:**

N.° DE ASIG. SUSP.	0	1	2	3	4	5
N.° DE ESTUDIANTES	10	4	5	2	4	3

Representa esta distribución mediante un diagrama de caja y bigotes.

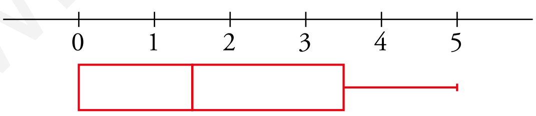
En total son 28 estudiantes preguntados.

La mediana estará entre el dato de la posición 14 y el 15, es decir, $Me = \frac{1+2}{2} = 1,5$

Quedarán 14 datos a la derecha y 14 datos a la izquierda de la mediana.

El primer cuartil estará entre los datos del puesto 7 y el puesto 8, es decir, $Q_1 = \frac{0+0}{2} = 0$

El tercer cuartil estará entre los datos del puesto 21 y el puesto 22, es decir, $Q_3 = \frac{3+4}{2} = 3,5$

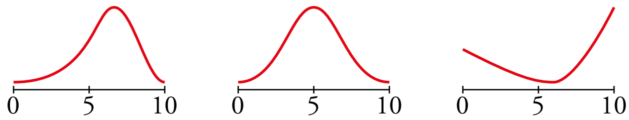


Página 245

Resuelve problemas

9 **Se ha hecho un mismo examen en dos grupos, A y B, de 30 alumnos y alumnas cada uno. Sus medias y sus desviaciones típicas son:** $\bar{x}_A = 6$, $\sigma_A = 1$, $\bar{x}_B = 6$, $\sigma_B = 3$.

a) Asigna una de estas gráficas a A y otra a B.

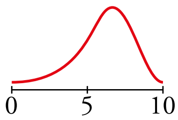


b) En una de las clases hay 11 suspensos y 4 sobresalientes, mientras que en la otra hay 5 suspensos y 1 sobresaliente. ¿Cuál es A y cuál es B?

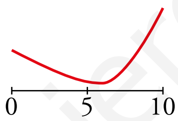
c) Si Laura necesita sacar sobresaliente y Miguel se conforma con aprobar, ¿qué clase te parece más adecuada para cada uno de ellos?

a) La segunda gráfica la descartamos porque la media sería 5.

$\bar{x}_A = 6$ y $\sigma_A = 1 \rightarrow$ 1ª gráfica



$\bar{x}_B = 6$ y $\sigma_B = 3 \rightarrow$ 3ª gráfica

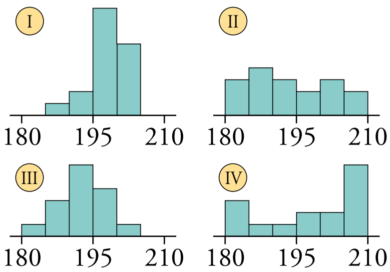


b) A corresponde con la clase de los 5 suspensos y el sobresaliente.

B corresponde con la clase de los 11 suspensos y los 4 sobresalientes.

c) La clase A será más adecuada para Laura, y la clase B, para Miguel.

10 **Estas cuatro gráficas corresponden a las estaturas de los jugadores de cuatro equipos de baloncesto, A, B, C y D, cuyos parámetros aparecen en la tabla. ¿Cuál es la gráfica de cada equipo?**



EQUIPO	$\bar{x}$	σ
A	198,5	9,7
B	198,1	3,9
C	193	4,6
D	193,4	8,1

Halla el CV de cada equipo y ordénalos de menos a más regulares.

Los equipos I y IV tienen medias superiores a 195, y los equipos II y III, inferiores.

Además, los jugadores de IV tienen estaturas más extremas que I. Lo mismo ocurre con III que tiene estaturas más extremas que II.

Así, podemos relacionar:

A → IV B → I C → III D → II

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{9,7}{198,5} = 0,0489 \rightarrow 4,89\,\%$$

$$CV_B = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,9}{198,1} = 0,0197 \rightarrow 1,97\,\%$$

$$CV_C = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,6}{193} = 0,0238 \rightarrow 2,38\,\%$$

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{8,1}{193,4} = 0,0419 \rightarrow 4,19\,\%$$

Los ordenamos de menos a más regulares:

A < D < C < B

11 **Elena, una jugadora de baloncesto, tiene una media de 17 puntos por partido y una desviación típica de 9. Su compañera, Marta, tiene una media de 20 puntos y una desviación típica de 3 puntos.**

Para el próximo partido, el entrenador necesita una jugadora que intente conseguir 30 o más puntos. ¿A cuál de las dos debe seleccionar? ¿Por qué?

El entrenador necesita que la jugadora elegida haga 30 puntos.

Elena tiene $\bar{x} = 17$ y $\sigma = 9$ y pasa de los 30 puntos con 1,5 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 1,5\sigma = 17 + 1,5 \cdot 9 = 30,5$.

Marta tiene $\bar{x} = 20$ y $\sigma = 3$ y para tener al menos 30 puntos, necesita más de 3 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 3\sigma = 20 + 3 \cdot 3 = 29$.

Por tanto, el entrenador debe seleccionar a Elena.

12 **Lidia y Marcos juegan varias veces a acertar, en un minuto, el máximo número de palabras dada su definición. Estos son los resultados:**

LIDIA	14	8	15	9	7	13	12	15
MARCOS	11	9	10	10	12	11	6	9

a) Halla la media y la desviación típica de cada uno.

b) Calcula sus CV y di quién es más regular.

a) Lidia:

$$\bar{x} = \frac{14+8+15+9+7+13+12+15}{8} \approx 11{,}63$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{14^2+8^2+15^2+9^2+7^2+13^2+12^2+15^2}{8} - 11{,}63^2} \approx 2{,}98$$

Marcos:

$$\bar{x} = \frac{11+9+10+10+12+11+6+9}{8} = 9{,}75$$

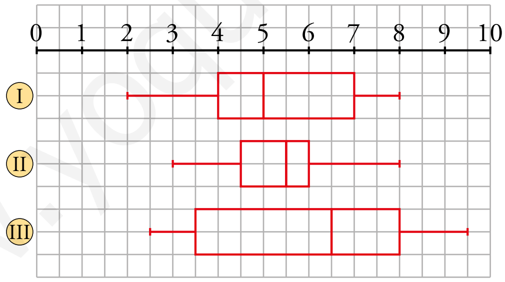
$$\sigma = \sqrt{\frac{11^2+9^2+10^2+10^2+12^2+11^2+6^2+9^2}{8} - 9{,}75^2} \approx 2{,}94$$

b) Lidia: $CV = \frac{2{,}98}{11{,}63} = 0{,}26 \to 26\,\%$

Marcos: $CV = \frac{2{,}94}{9{,}75} = 0{,}30 \to 30\,\%$

Lidia es un poco más regular.

13 **a) Compara estas distribuciones de notas obtenidas por tres grupos de alumnas y alumnos indicando cuáles son la mediana y los cuartiles en cada una:**



b) En la evaluación se hicieron estos comentarios:

I. Aprobó el 50 % de la clase.

II. Las notas son muy parecidas.

III. Un cuarto de la clase tiene notas superiores a 7.

IV. Es la mejor clase, pero con la mayor dispersión.

Indica a qué grupo corresponde cada comentario.

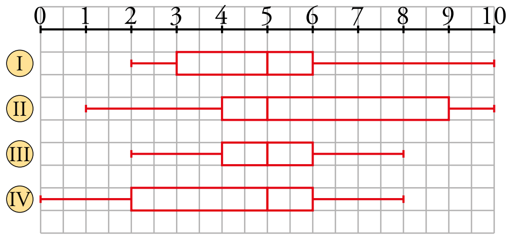
a) I. $Q_1 = 4$ $\quad Me = 5$ $\quad Q_3 = 7$

II. $Q_1 = 4{,}5$ $\quad Me = 5{,}5$ $\quad Q_3 = 6$

III. $Q_1 = 3{,}5$ $\quad Me = 6{,}5$ $\quad Q_3 = 8$

b) I. Grupo I $\quad$ II. Grupo II $\quad$ III. Grupo I $\quad$ IV. Grupo III

14 **Estos son los diagramas de caja de las notas en matemáticas de cuatro clases de 20 estudiantes:**



a) Di, en cada una de ellas, los valores menor y mayor así como Q_1, *Me* y Q_3.

b) Los parámetros son, no respectivamente:

	A	B	C	D
$\bar{x}$	4	6	5	5
σ	2,3	3,1	2,5	1,3

Asocia los parámetros con su clase.

c) Las 20 notas de la clase I son:

2 2 2 2 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 7 8 8 10 10

Comprueba que responden a su diagrama de caja.

Inventa tú 20 valores que respondan a cada uno de los diagramas II, III y IV.

d) Calcula $\bar{x}$ y σ en las distribuciones que has inventado en el apartado anterior y compáralos con los que se dan en la tabla del apartado b).

e) Halla el coeficiente de variación de cada distribución del apartado b) y determina cuál es más regular.

a) I. *Mín* = 2 *Me* = 5 Q_3 = 6 *Máx* = 10

II. *Mín* = 1 *Me* = 5 Q_3 = 9 *Máx* = 10

III. *Mín* = 2 *Me* = 5 Q_3 = 6 *Máx* = 8

IV. *Mín* = 0 *Me* = 5 Q_3 = 6 *Máx* = 8

b) A tiene la media más baja: A → IV

B tiene la media más alta: B → II

C parece centrada en 5 con dispersión alta: C → I

D tiene dispersión baja y la media y la mediana coinciden: D → III

c) Para que los datos respondan al diagrama I habría que cambiar el 7 por un 6.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

II → 1 2 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 7 8 9 9 9 9 10 10

III → 2 2 2 3 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 8 8

IV → 0 1 1 2 2 2 3 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 8

d) Respuesta abierta.

e) Respuesta abierta.

Página 246

15 **Para hallar la nota de una asignatura, el segundo examen vale el doble que el primero, y el tercero, el triple que el primero.**

a) ¿Cuál es la nota final de una alumna que sacó un 5, un 6 y un 4?

b) ¿Y si esas notas son el 10 %, el 40 % y el 50 %?

a) $\dfrac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{1 + 2 + 3} = \dfrac{29}{6} = 4,8\widehat{3}$

b) $\dfrac{10 \cdot 5 + 40 \cdot 6 + 50 \cdot 4}{10 + 40 + 50} = \dfrac{490}{100} = 4,9$

16 **Sabemos que, en una clase, la calificación media de un examen ha sido 5, y la desviación típica, 1,5. En esa misma clase, para otro examen, la calificación media ha sido, también, 5 y la desviación típica, 1.**

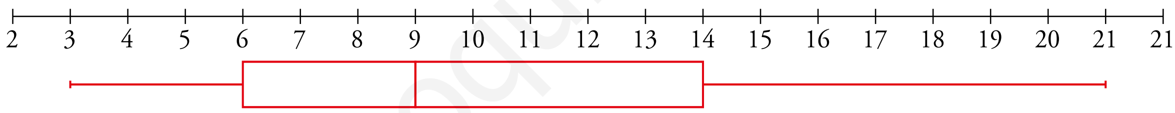
Si alguien ha obtenido un 8 en el primer examen y un 7,5 en el segundo, ¿qué nota te parece más meritoria? ¿Por qué?

El coeficiente de variación en el primer examen es del 30 %, y en el segundo, del 20 %. Así, en el segundo examen hay menos personas que hayan sacado notas muy por encima de la media y, por lo tanto, el 7,5 de este alumno es más meritorio.

17 **Conocemos el número de días al mes que ha llovido este año en una cierta región. Los valores de los cuartiles son 6, 9 y 14. El mes que más llovió fue marzo con 21 días y sabemos que el rango de la distribución es 18.**

a) Construye el diagrama de caja y bigotes.

b) ¿Crees que es una región lluviosa? Justifica la respuesta.



Observando el diagrama de caja y bigotes sí podemos deducir que es una región lluviosa.

18 **Estas son las horas de estudio semanal de un grupo de alumnas y alumnos:**

14	9	9	20	18	12	14	6	14	8
15	10	18	20	2	7	18	8	12	10
20	16	18	15	24	10	12	25	24	17
10	4	8	20	10	12	16	5	4	13

a) Construye una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos: 1,5 - 6,5 - 11,5 - 16,5 - 21,5 - 26,5.

b) Calcula la media y la desviación típica.

a)

INTERVALO	FRECUENCIA
1,5 - 6,5	5
6,5 - 11,5	11
11,5 - 16,5	12
16,5 - 21,5	9
21,5 - 26,5	3

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1,5 - 6,5	4	5	20	80
6,5 - 11,5	9	11	99	891
11,5 - 16,5	14	12	168	2352
16,5 - 21,5	19	9	171	3249
21,5 - 26,5	24	3	72	1728
		40	530	8300

$$\bar{x} = \frac{530}{40} = 13{,}25 \text{ h}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8\,300}{40} - (13{,}25)^2} = 5{,}6513$$

19 **Se ha puesto un examen a las dos clases de 3.º ESO de un centro escolar. Las notas medias obtenidas son 6,2 en 3.º A y 4 en 3.º B.**

Halla la nota media de los 50 estudiantes de 3.º ESO sabiendo que en 3.º A solo hay 15.

3.º A $\rightarrow$ $\bar{x}_A = 6{,}2;\ n_A = 15$

3.º B $\rightarrow$ $\bar{x}_B = 4;\ n_B = 50 - 15 = 35$

Hallamos la nota media de todo 3.º:

$$\bar{x} = \frac{6{,}2 \cdot 15 + 4 \cdot 35}{50} = \frac{233}{50} = 4{,}66$$

20 **En una clase, estas son las notas de un examen:**

NOTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º ALUMNOS	4	3	2	1	7	3	2	8	3	2

Calcula las notas medias de la clase ($\bar{x}$), de los aprobados ($\bar{x}_A$) y de los suspensos ($\bar{x}_B$). Comprueba si haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$ obtienes $\bar{x}$.

$\bar{x} = \dfrac{198}{35} \approx 5{,}657$ $\qquad$ $\bar{x}_A = \dfrac{178}{25} = 7{,}12$ $\qquad$ $\bar{x}_B = \dfrac{20}{10} = 2$

Haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$ no se puede hallar $\bar{x}$. Observamos que:

Si $\bar{x}_A = \dfrac{a}{b}$ y $\bar{x}_B = \dfrac{c}{d}$, $\bar{x} = \dfrac{a+c}{b+d}$

$$\frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2} \neq \frac{a+c}{b+d}$$

22 En un test de inteligencia realizado a 200 personas, se han obtenido los siguientes resultados:

PUNTUACIÓN	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
N.° PERSONAS	6	18	76	70	22	8

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) ¿Qué porcentaje de inividuos tiene una inteligencia superior a $\bar{x} + 2\sigma$? ¿Y cuántos inferior a $\bar{x} - 2\sigma$? Haz una estimación razonada.

a)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
30 - 40	35	6	210	7 350
40 - 50	45	18	810	36 450
50 - 60	55	76	4 180	229 900
60 - 70	65	70	4 550	295 750
70 - 80	75	22	1 650	123 750
80 - 90	85	8	680	57 800
		200	12 080	751 000

$\bar{x} = \dfrac{12\,080}{200} = 60{,}4; \quad \sigma = \sqrt{\dfrac{751\,000}{200} - (60{,}4)^2} = 10{,}336$

b) Como $\bar{x} + 2\sigma = 60{,}4 + 2 \cdot 10{,}336 \approx 81$ y en el intervalo 80 - 90 hay 8 personas, estimamos que en el intervalo 81 - 90 hay, aproximadamente, 7 personas. Como en total hay 200 personas, el porcentaje de individuos con una inteligencia superior a $\bar{x} + 2\sigma$ es $\dfrac{7}{200} = 0{,}35 \approx 35\,\%$.

Por otro lado, como $\bar{x} - 2\sigma = 60{,}4 - 2 \cdot 10{,}336 \approx 39{,}7$, y en el intervalo 30 - 40 hay 6 personas, estimamos que en el intervalo 30 - 39,7 hay, aproximadamente, 6 personas. Como en total hay 200 personas, el porcentaje de individuos con una inteligencia inferior a $\bar{x} - 2\sigma$ es $\dfrac{6}{200} = 0{,}3 \approx 3\,\%$.

Los dos porcentajes deberían ser aproximadamente iguales.

23 ¿Qué les ocurre a la $\bar{x}$ y a la σ de una distribución si a todos sus datos les sumamos un mismo número?

¿Y si los multiplicamos por el mismo número?

Comprueba tus conjeturas con estos datos:

4, 3, 6, 7, 5, 4, 5, 3, 2, 6, 5

- Si a cada dato le sumamos un mismo número, a, entonces la media aumenta a unidades pero la desviación típica no varía.

  Datos $\rightarrow x'_i = x_i + a$

  Parámetros $\rightarrow \bar{x}' = \bar{x} + a; \ \sigma' = \sigma$

- Si cada dato se multiplica por k, la media y la desviación típica se multiplican por k:

  Datos $\rightarrow x_i'' = k \cdot x_i$

  Parámetros $\rightarrow \bar{x}'' = k \cdot \bar{x}; \ \sigma'' = \sigma$

Comprobación:

Los parámetros de la distribución son $\bar{x} \approx 4{,}55$ y $\sigma \approx 1{,}42$.

Si sumamos 3 a cada dato, obtenemos $\bar{x} \approx 7{,}55$ y $\sigma \approx 1{,}42$.

Si multiplicamos por 2 cada dato, obtenemos $\bar{x} \approx 9{,}1$ y $\sigma \approx 2{,}84$.

AUTOEVALUACIÓN

Página 247

1 **Halla la media, la mediana, la desviación típica y el coeficiente de variación de cada una de estas distribuciones y determina cuál es más dispersa:**

a) 6, 9, 1, 4, 8, 2, 3, 4, 4, 9

b) 120, 95, 87, 111, 116, 82, 121, 92, 76

c) 987, 1 010, 1 004, 995, 998, 1 001, 999, 982

a) Ordenamos primero los datos: 1 2 3 4 4 4 6 8 9 9

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4\cdot 3+6+8+9\cdot 2}{10} = 5$

MEDIANA = 4

VARIANZA: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2\cdot 3+6^2+8^2+9^2\cdot 2}{10} - 5^2 = \dfrac{324}{10} - 25 = 7,4$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{7,4} \approx 2,72$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{2,72}{5} = 0,544$

b) Ordenamos los datos: 76 82 87 92 95 111 116 120 121

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{76+82+87+92+95+111+116+120+121}{9} = 100$

MEDIANA = 95

VARIANZA: $\dfrac{76^2+82^2+87^2+92^2+95^2+111^2+116^2+120^2+121^2}{9} = -100^2 = 264$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{264} \approx 16,25$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{16,25}{100} = 0,1625$

c) Ordenamos los datos: 982 987 995 998 999 1001 1004 1010

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{982+987+995+998+999+1001+1004+1010}{8} = 997$

MEDIANA = $\dfrac{998+999}{2} = 998,5$

VARIANZA: $\dfrac{982^2+987^2+995^2+998^2+999^2+1001^2+1004^2+1010^2}{8} = -997^2 = 71$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{71} \approx 8,43$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{8,43}{997} = 0,0085$

La distribución más dispersa es la a).

2 **Calcula $\bar{x}$, σ y CV de las siguientes distribuciones:**

a) Número de días que han ido a la biblioteca los estudiantes de un curso:

N.° DE DÍAS	FRECUENCIA
0	6
1	7
2	8
3	5
4	2
5	2

b) Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

TIEMPO (min)	FRECUENCIA
De 1 a 9	4
De 9 a 17	5
De 17 a 25	8
De 25 a 33	7
De 33 a 41	4
De 41 a 49	2

a)

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	6	0	0
1	7	7	7
2	8	16	32
3	5	15	45
4	2	8	32
5	2	10	50
	30	56	166

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{56}{30} \approx 1,87$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{166}{30} - 1,87^2} \approx 1,43$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1,43}{1,87} \approx 0,7647$

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0 - 10	5	6	30	150
10 - 20	15	9	135	2 025
20 - 30	25	8	200	5 000
30 - 40	35	5	175	6 125
40 - 50	45	2	90	4 050
		30	630	17 350

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{630}{30} \approx 21$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{17\,350}{30} - 21^2} \approx 11,72$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11,72}{21} \approx 0,56$

3 **Las notas obtenidas por los estudiantes de una clase en un examen con 5 preguntas han sido:**

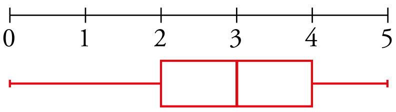
3 3 2 4 5	**4 1 3 3 2**
3 2 4 4 3	**1 2 0 5 3**
2 0 3 5 3	**3 5 2 1 4**

a) Calcula la mediana y los cuartiles.

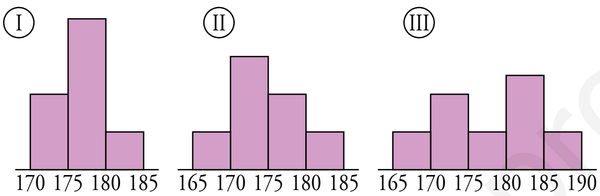
b) Dibuja el correspondiente diagrama de caja.

a) $Me = 3$, $Q_1 = 2$ y $Q_3 = 4$

b)



4 **Las estaturas de los componentes de tres equipos escolares de baloncesto, A, B y C, se distribuyen según las siguientes gráficas:**



Los parámetros correspondientes a cada uno son:

	A	B	C
$\bar{x}$	177,8	176,8	174,6
σ	6,4	3,2	4,5

Indica a qué equipo corresponde cada gráfica.

La gráfica I corresponde al equipo B, ya que su medida debe estar entre 175 y 180 y su desviación media es la más pequeña.

La gráfica II corresponde al equipo C, ya que su media debe estar entre 170 y 175 y su desviación media está entre las de los otros dos equipos.

La gráfica III corresponde al equipo A, ya que su media está más cercana a 180 y su desviación media es la más grande.

5 **He estudiado esta semana: el lunes, 3 h; el martes, 2 h; el miércoles, 2,5 h; el jueves, 5 h; el viernes, 2 h, y el sábado, 3,5 h.**

a) ¿Cuánto tengo que estudiar el domingo para mantener la media? ¿Y para la mediana?

b) ¿Cuánto debo estudiar para que la media sea 5 h?

a) Ordenamos los datos: 2 h 2 h 2,5 h 3 h 3,5 h 5 h

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{2+2+2,5+3+3,5+5}{6} = 3$ h

MEDIANA= 2,75 h

Para mantener la media, el domingo tengo que estudiar 3 h. Y para mantener la mediana, 2,75 h.

b) $\dfrac{2+2+2,5+3+3,5+5+x}{7} = 5 \rightarrow 18 + x = 35 \rightarrow x = 17$

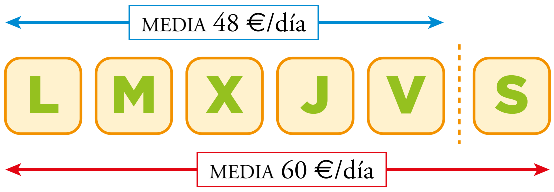
Tengo que estudiar 17 h.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Página 247

Medias semanales

- **Virginia es vendedora ambulante seis días a la semana. Ayer, viernes, calculó que durante esta semana había conseguido una ganancia media de 48 € diarios. Sin embargo, al hacer la misma cuenta hoy, sábado, resulta una media de 60 € diarios. ¿Cuánto ha ganado hoy?**



- La media que calculó el viernes fue: $\bar{x} = 48 = \dfrac{\sum x_i}{5} \rightarrow \sum x_i = 240$.

  La media de hoy, sábado, es: $\bar{x} = 60 = \dfrac{\sum x_i}{6} \rightarrow \sum x_i = 360$.

  Por lo tanto, Virginia ha ganado hoy 360 – 240 = 120 €