

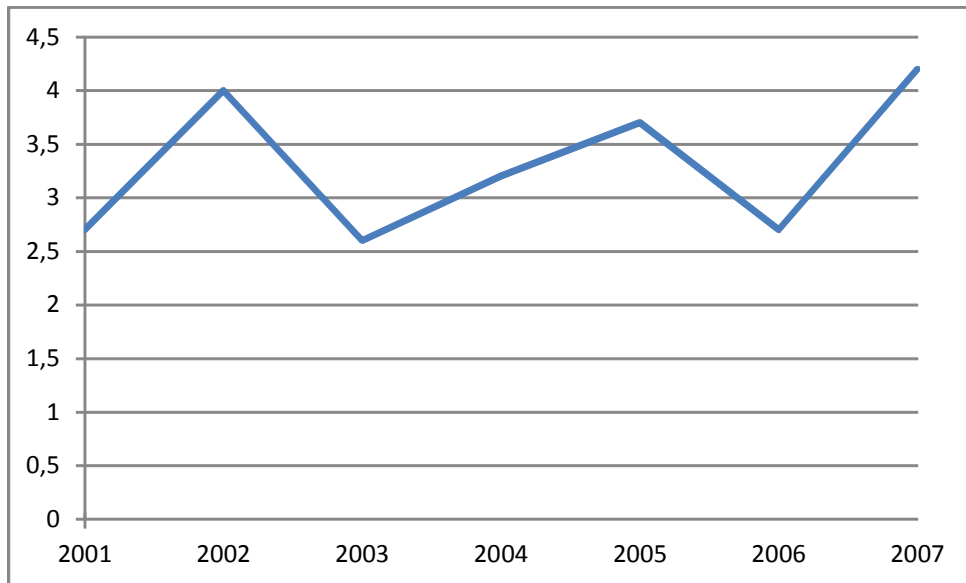
# TEMA 7 INTERPOLACIÓN

## 7.1 Funciones definidas por tablas

1. Se tienen los siguientes datos sobre la evolución del índice de precios al consumo (IPC) en los últimos años.

año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
IPC	2.7	4	2.6	3.2	3.7	2.7	4.2

Representa gráficamente los datos y determina el máximo intervalo para el que la gráfica se aproxima a una recta.



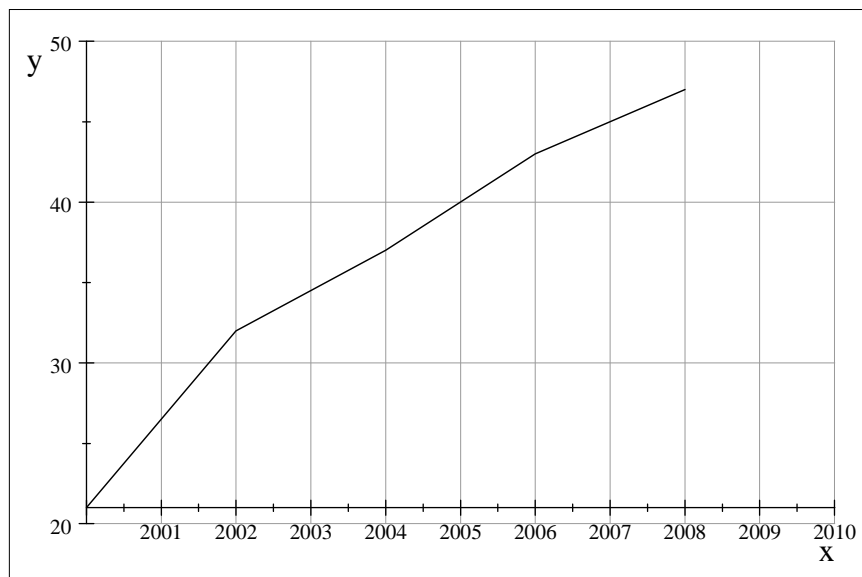
Representando sobre cada año la altura que le corresponde y uniendo esos puntos me queda una línea quebrada.

La gráfica se aproxima mejor a una recta desde el 2003 al 2005.

Tareas 12-02-2014: 2

## 7.2 Interpolación y extrapolación

- 3 En la gráfica de la derecha se ha representado el número de internautas, en millones, de un determinado país en los últimos años.



Interpolando y extrapolando gráficamente, calcula cuántos había en 2003 y cuántos habrá en 2009.

- En 2003, como es un año que está entre los años dados en la gráfica, habremos de **interpol**ar.

En 2003 había 35 millones de internautas: hemos partido en vertical desde el medio del intervalo anual 2002-2004, hasta llegar a la línea roja, para luego ir en horizontal hasta el eje vertical.

- En 2009, como es un año que NO está entre los años dados en la grafica, habremos de **extrapol**ar.

En 2009, habrá 50 millones de internautas: hemos seguido el patrón de la línea roja hasta la vertical de donde se encuentra el año 2009.

## 7.3 Interpolación lineal

- 4 La población de cierto municipio en el año 2002 fue de 179000 habitantes, y en el año 2005 el censo era de 250000.

- a) Calcula mediante interpolación lineal la población que hubo en dicho municipio en el año 2004.

Habremos de considerar la recta que pasa por los puntos (2002, 179000) y (2005, 250000)

La ecuación de la recta será de la forma:  $y = ax + b$

Dado que conocemos dos puntos de la misma tenemos el siguiente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 179000 = 2002a + b \\ 250000 = 2005a + b \end{cases}, \text{ Solution is: } \left[ a = \frac{71000}{3}, b = -\frac{141605000}{3} \right]$$

Se resuelve aplicando uno de los tres métodos conocidos: reducción, igualación, sustitución.

La recta queda  $y = \frac{71000}{3}x - \frac{141605000}{3}$

Finalmente, en el año 2004 será  $\frac{71000}{3} \cdot 2004 - \frac{141605000}{3} = \frac{679000}{3} = 2 \cdot 263300 = 226660$  habitantes.

$2633 \times 10^5 = 226330$  habitantes.

- b) Calcula por extrapolación lineal la población que hubo en dicho municipio en el año 2007.

En el año 2007 será  $\frac{71000}{3} \cdot 2007 - \frac{141605000}{3} = \frac{892000}{3} =$

$= 2 \cdot 97330 = 297330$  habitantes.

## 7.4 Interpolación cuadrática

- 6 Se tienen tres datos sobre los beneficios de una empresa en tres meses distintos:

meses	1º	4º	5º
beneficios (miles de euros)	0	3	0

- a) Encuentra la función cuadrática que se ajusta a estos tres datos.

La expresión general de una función cuadrática es  $y = ax^2 + bx + c$

Al sustituir los datos, nos queda un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 3 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\ 0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \end{cases}$$

Este sería el procedimiento general para hacerlo.

PERO, vamos a pensar un poquito para nuestro caso actual.

Por los datos que nos proporciona la tabla, la ecuación de 2º grado  $0 = ax^2 + bx + c$  tiene por solución  $\{1, 5\}$ . Es decir, será de la forma  $a(x - 1)(x - 5) = 0$  con  $a$  desconocido.

De todas ellas, nos interesa aquella que cumple que

$$a(4 - 1)(4 - 5) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(3)(-1) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3a = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{-3} = -1$$

Entonces la función cuadrática de interpolación pedida es

$$y = -1(x - 1)(x - 5)$$

**b)** ¿Qué beneficios o pérdidas se estiman para el 6º mes?

Habremos de extrapolar, dado que el 6º mes no se encuentra entre los meses dados.

$$\text{Será } x = 6 \rightarrow -1(6 - 1)(6 - 5) = -5$$

Se estiman unas pérdidas de 5 mil euros.

**c)** ¿En que mes se obtiene el beneficio máximo?

Tenemos una parábola con las ramas hacia abajo, dado que el coeficiente de  $x^2$  es -1.

Además, conocemos los puntos de corte de dicha parábola con el eje de las X;  $\{(1,0), (5,0)\}$ .

Por lo tanto, el máximo de la función se alcanza en el vértice de la parábola que está entre los valores 1 y 5: será  $x = 3 \rightarrow -1(3 - 1)(3 - 5) = 4$

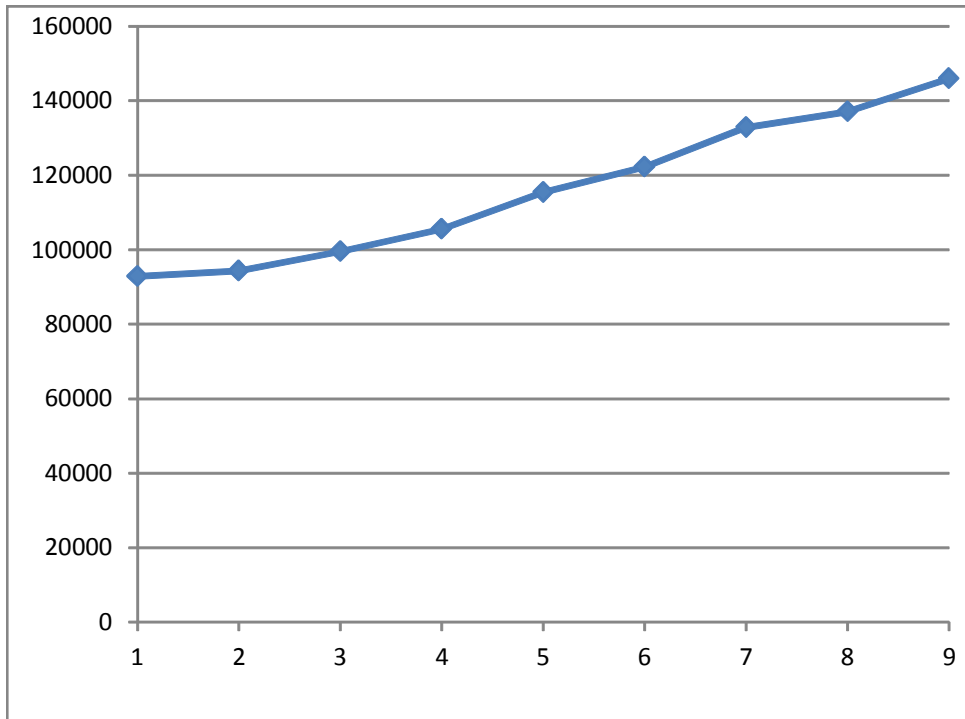
Los beneficios máximos son 4 mil euros.

## EJERCICIOS

- 9 El número de nulidades, separaciones y divorcios en España durante los últimos años se recogen en la siguiente tabla.

1998	92875	93000
1999	94346	94000
2000	99474	100000
2001	105534	105000
2002	115374	115000
2003	122166	122000
2004	132789	133000
2005	137044	137000
2006	145919	146000

Representa gráficamente los datos anteriores, eligiendo escalas convenientes para su mejor comprensión.

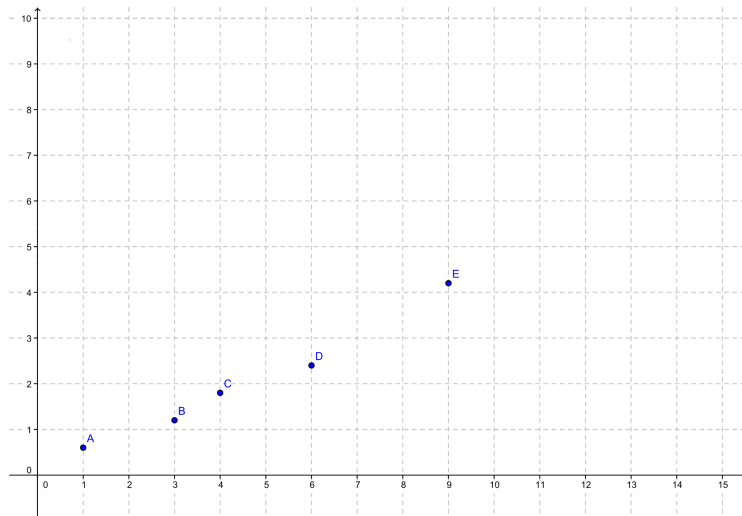


11 En un supermercado hay una oferta de yogures 3x2.

a) Completa la tabla siguiente

Nº de yogures	1	3	4	6	9
precio por unidad	0.60	1.20	1.80	2.40	4.20

b) Representa los datos gráficamente.



c) ¿Qué tipo de función ajusta estos datos?

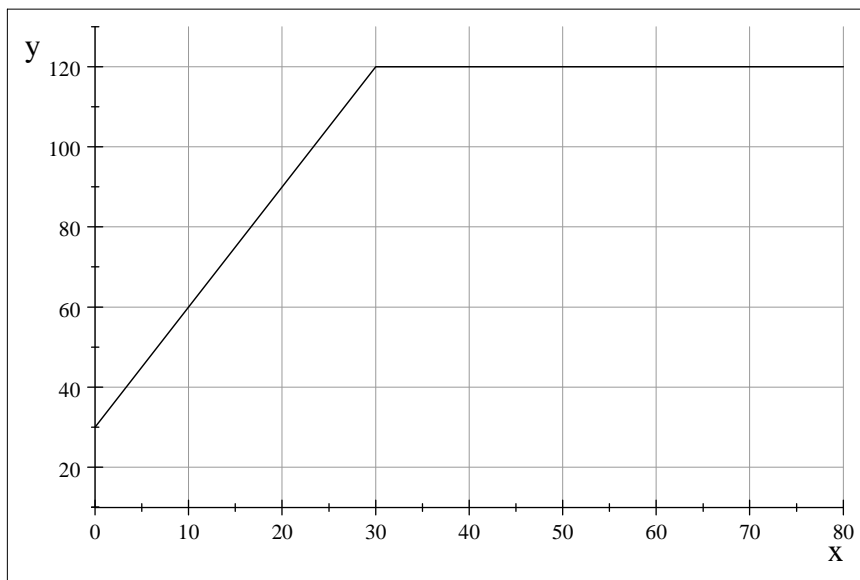
Claramente una recta que pase por dos de los puntos elegidos me deja fuera de ella a todos los demás, por lo tanto nos decantamos por la interpolación cuadrática.

Pero claro, si unimos los cuatro puntos A,B,D,E con una curva, se nos queda fuera, el punto C. Esto está asociado a una interpolación de grado tres. Se trataría de una cúbica.

d) Suponiendo que no hubiera oferta, encuentra una expresión matemática para la función que da el precio de los yogures en función de los que se compran.

$F(x) = 0.60x$  donde  $x$  es el número de yogures que es una función lineal.

14 La siguiente gráfica muestra el desplazamiento de un móvil en el eje de abscisas en función del tiempo.



a) ¿Qué magnitud física representa la pendiente de la recta entre 0 y 30 segundos?

La pendiente es el cociente entre la ordenada y la abscisa, por lo que en nuestro caso, representa la velocidad, pues el cociente  $m/s$  que es una forma de medirla.

b) ¿Qué hace el móvil más allá de los 30 segundos?

Tiene la velocidad constante, pues siempre va recorriendo el mismo espacio en el mismo tiempo. En los primeros 30 segundos vamos acelerando hasta obtener la velocidad de crucero.

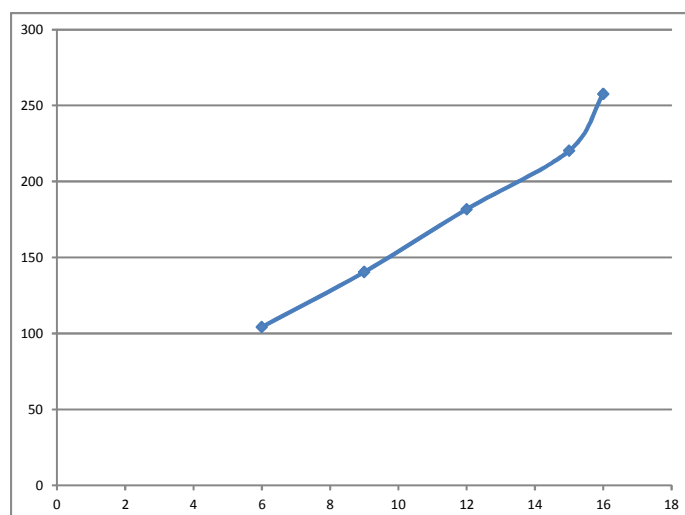
16 Se ha observado que la vida media, en minutos, de una bacteria varía en función de la temperatura del medio en el que vive según la siguiente gráfica.,

Temperatura	6°	9°	12°	15°	16°
Vida media	104.2	140.4	181.7	220.2	257.6

¿Qué vida media estimas para un cultivo de bacterias en un medio a 10°C? ¿Y un 13°C?

Vamos a hacer una representación gráfica de los datos proporcionados, para tener una idea clara de tipo de interpolación hemos de aplicar.

La gráfica queda de la siguiente forma.



1. Se ve que los cuatro primeros puntos están en línea. Como los temperaturas para las cuales hemos de calcular la vida media están entre los datos 6° y 15°, vamos a utilizar la interpolación lineal usando la recta que pasa por los puntos (6, 104.2) y (15, 220.2)

La ecuación de una recta conocidos dos de sus puntos viene dada por:

$$y - 104.2 = \frac{220.2 - 104.2}{15 - 6} (x - 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 104.2 + \frac{116}{9} (x - 6)$$

$$\frac{220.2 - 104.2}{15 - 6} = \frac{116}{9} \text{ es la pendiente de la recta}$$

Así tendremos que las vidas medias pedidas son:

- $x = 10^\circ \rightarrow y = 104.2 + \frac{116}{9}(10 - 6) = 155.76$  minutos
- $x = 13^\circ \rightarrow y = 104.2 + \frac{116}{9}(13 - 6) = 194.42$  minutos

21 Encuentra una parábola que pase por los puntos  $\left\{ \begin{array}{l} A = (0, -1) \\ B = (1, 2) \\ C = (2, 3) \end{array} \right.$

La ecuación de una parábola es  $y = ax^2 + bx + c$

Entonces será:

- $A = (0, -1) \rightarrow -1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Leftrightarrow -1 = c$
- $B = (1, 2) \rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow 2 = a + b + c$
- $C = (2, 3) \rightarrow 3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Leftrightarrow 3 = 4a + 2b + c$

Es decir, nos queda un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 = c \\ 2 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{array} \right.$$

De la primera, conocemos c para poder sustituirlo en las otras ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = a + b - 1 \\ 3 = 4a + 2b - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 = a + b \\ 4 = 4a + 2b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 = a + b \\ 2 = 2a + b \end{array} \right.$$

Lo podemos resolver por el método de reducción.

Ahora, si restamos en columna nos queda:

$$1 = -a \Leftrightarrow a = -1$$

Sustituimos este valor de a en una de las dos ecuaciones para hallar el correspondiente de b:

$$3 = -1 + b \Leftrightarrow b = 4$$

Finalmente, la ecuación de la parábola es  $y = -x^2 + 4x - 1$

- 24 En un negocio de decoración sólo venden alfombras cuyo largo es el doble que su ancho. Los precios, dependiendo del largo, se muestran en esta tabla.

largo (m)	1	2	5
precio (euros)	120	124	148

- a) Calcula por interpolación cuadrática el precio de una alfombra de 3 m de largo.

La función a considerar es  $y = ax^2 + bx + c$  donde hemos de determinar a, b, c.

Por los datos proporcionados se tiene que:

- $(1, 120) \rightarrow 120 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow 120 = a + b + c$
- $(2, 124) \rightarrow 124 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Leftrightarrow 124 = 4a + 2b + c$
- $(5, 148) \rightarrow 148 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \Leftrightarrow 148 = 25a + 5b + c$

Reunidas, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 120 = a + b + c \\ 124 = 4a + 2b + c \\ 148 = 25a + 5b + c \end{array} \right. , \text{ Solution is: } [a = 1, b = 1, c = 118]$$

Se resuelve (despejando c en una de las tres ecuaciones para sustituirla en las otras dos; nos quedaría un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a y b que se resolvería por uno de los tres métodos (reducción, igualación, sustitución)) obteniendo los siguiente

$$\text{valores} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 118 \end{cases}$$

De ahí que la función cuadrática resultante sea  $y = x^2 + x + 118$

Esta última expresión la aplicamos para  $x = 3 \rightarrow 3^2 + 3 + 118 = 130$  euros es el precio de una alfombra de 3 m de largo.

b) Calcula por extrapolación cuadrática el precio de una alfombra de 8 m de largo.

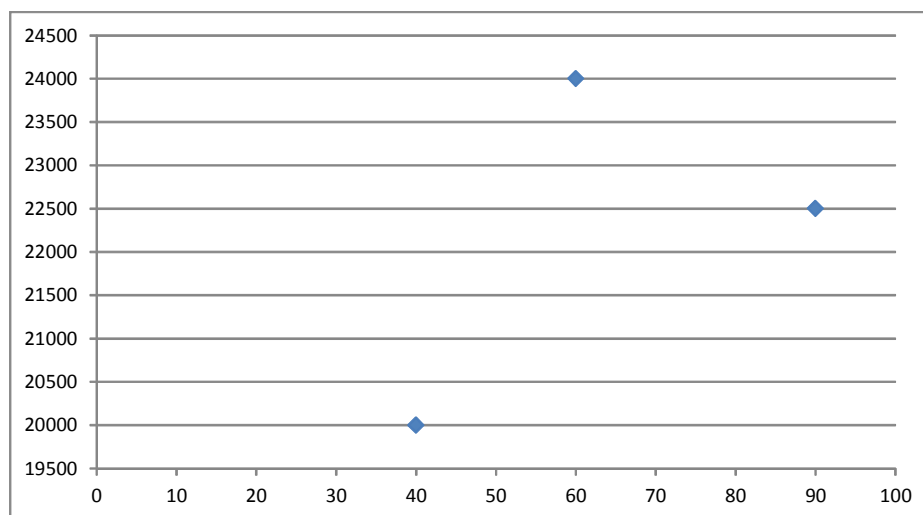
Aplicamos la expresión cuadrática para  $x = 8 \rightarrow 8^2 + 8 + 118 = 190$  euros es el precio de una alfombra de 8 m de largo.

- 27 Un agricultor ha comprado una hectárea de terreno y quiere plantar almendros. Sabe que si planta almendros en exceso no podrá regarlos convenientemente y la producción no será abundante. Para decidir cuántos almendros plantar, ha hecho un estudio en los campos vecinos del rendimiento obtenido y ha elaborado la siguiente tabla.

nº de almendros	40	60	90
kg de almendras	20000	24000	22500

- a) Un amigo le aconsejó que plantara 50 almendros. ¿Cuántos kilos de almendras esperaba obtener en ese caso?

Lo primero que haremos es una representación gráfica, para saber que tipo de interpolación nos interesa.



Esto nos induce a aplicar una interpolación cuadrática.

La función será de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  donde hay que hallar a,b,c.

Para ello tenemos que:

- $(40, 20000) \rightarrow 20000 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c \Leftrightarrow 20000 = 1600a + 40b + c$
- $(60, 24000) \rightarrow 24000 = a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c \Leftrightarrow 24000 = 3600a + 60b + c$
- $(90, 22500) \rightarrow 22500 = a \cdot 90^2 + b \cdot 90 + c \Leftrightarrow 22500 = 8100a + 90b + c$

Esto da lugar al siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 20000 = 1600a + 40b + c \\ 24000 = 3600a + 60b + c \\ 22500 = 8100a + 90b + c \end{cases}, \text{ Solution is: } [a = -5, b = 700, c = 0]$$

Se resuelve de acuerdo con los pasos mencionados en el problema anterior para obtener que  $y = -5x^2 + 700x$

Calculamos esta última expresión para  $x = 50 \rightarrow -5 \cdot 50^2 + 700 \cdot 50 = 22500$  kg de almendras. Hemos interpolado!

- b) Y si planta solo 20 almendros, ¿Cuál será su producción?

Hemos de extrapolar!

Calculamos la expresión obtenida para  $x = 20 \rightarrow -5 \cdot 20^2 + 700 \cdot 20 = 12000$  kg de almendras.

c) ¿Para qué número de almendros se consigue la máxima producción?

Como se trata de una parábola con las ramas hacia abajo, su máximo se alcanza en el vértice.

La primera coordenada del vértice es  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{700}{2 \cdot (-5)} = 70$

La máxima producción se consigue con 70 almendros, que serán:

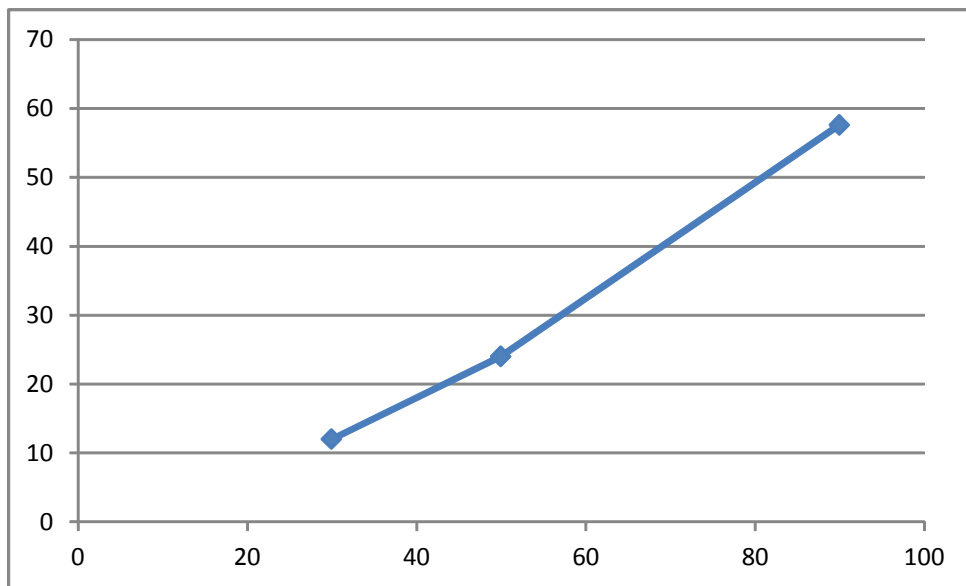
$-5 \cdot 70^2 + 700 \cdot 70 = 24500$  kg de almendras.

- 30 La DGT ha hecho un estudio sobre la distancia media que un vehículo recorre al detenerse en función de la velocidad que lleva.

velocidad (km/h)	30	50	90
distancia de frenado	12	24	57.6

a) Representa estos datos y decide qué tipo de interpolación es la adecuada para este problema.

La gráfica queda:



Si trazásemos una recta que pasase por los dos primeros puntos, el tercero se me alejaría mucho de la misma. Sin embargo, considerando la recta que pasa por el primero y el tercero, el segundo no queda muy lejos. Nos decidimos por la interpolación lineal.

b) Estima la distancia de frenado para un vehículo que circula a 80 km/h

Tenemos que la recta que determina el razonamiento del apartado anterior es:

$$\left. \begin{array}{l} A = (30, 12) \\ B = (90, 57.6) \end{array} \right\} \rightarrow y - 12 = \frac{57.6 - 12}{90 - 30}(x - 30) \Leftrightarrow y = 12 + 0.76(x - 30)$$

Recordamos que  $m = \frac{57.6 - 12}{90 - 30} = 0.76$  es la pendiente de la recta.

Ahora interpolamos.

Calculamos la abscisa para  $x = 80 \rightarrow y = 12 + 0.76(80 - 30) = 50$  m es la distancia de frenado para una velocidad de 80 km/h.

c) Calcula la distancia de frenado para un coche que lleva una velocidad de 150 km/h.

Sería extrapolar la recta obtenida para  $x = 150 \rightarrow y = 12 + 0.76(150 - 30) = 103.2$  m es la distancia de frenado para una velocidad de 80 km/h.