1. Dada la ecuación vectorial de la posición de una partícula $\vec{r}(t) = (t^2 + 3)\,\vec{i} + (3t^2 - 2)\,\vec{j}$, halla en unidades S.I.
    a. la velocidad en función del tiempo, v (t)
    b. la velocidad y su módulo a los 3 segundos
    c. la velocidad media entre t = 0 y t = 5 segundos
    d. la aceleración y su módulo a los 4 segundos
    e. la aceleración media entre t = 0 y t = 4 segundos
    f. la ecuación de la trayectoria
    g. ¿de qué tipo de movimiento se trata?

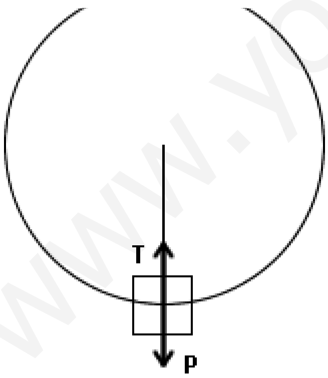
2. Calcula la velocidad lineal a la que se desplaza un ciclista si sus ruedas, de 90 cm de diámetro, dan 72 vueltas cada 20 segundos

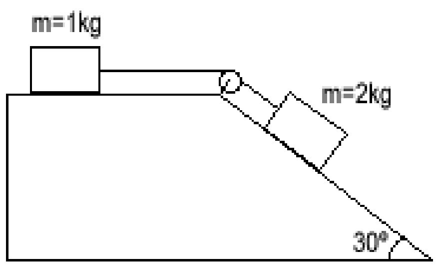
3. Desde lo alto del Empire State Building, de 381 m, se lanza verticalmente y hacia abajo una pelota de tenis, con velocidad de 10 m/s. Calcula:
    a. La velocidad con que llega al suelo
    b. El tiempo que tarda en llegar
    c. la distancia al suelo, a los 2 segundos

DINÁMICA

4. Calcula la aceleración con que deslizan los bloques y la tensión de la cuerda suponiendo que el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}1$

5. Una cuerda de 50 cm se rompe cuando un objeto de 25 kg sujeto a ella gira a 75 rpm al pasar por el punto más bajo de su trayectoria circular. Calcula la tensión máxima que soporta la cuerda





1. Dada la ecuación vectorial de la posición de una partícula $\vec{r}(t)=(t^2+3)\,\vec{i}+(3t^2-2)\,\vec{j}$, halla en unidades S.I.
   h. la velocidad en función del tiempo, v (t)
   i. la velocidad y su módulo a los 3 segundos
   j. la velocidad media entre t = 0 y t = 5 segundos
   k. la aceleración y su módulo a los 4 segundos
   l. la aceleración media entre t = 0 y t = 4 segundos
   m. la ecuación de la trayectoria
   n. ¿de qué tipo de movimiento se trata?

a.

La expresión de la velocidad instantánea se obtiene derivando el vector de posición, $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Por tanto, $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2t\;\vec{i}+6t\;\vec{j}$ *m/s*

b.

Sustituyendo en la expresión obtenida anteriormente, $\vec{v}(3)=2\cdot 3\;\vec{i}+6\cdot 3\;\vec{j}=6\,\vec{i}+18\,\vec{j}$ m/s

Para calcular el módulo, $|\vec{v}(3)|=\sqrt{6^2+18^2}=\sqrt{36+324}=\sqrt{360}=6\sqrt{10}$ m/s

c.

De la definición de velocidad media, $\vec{v}_m=\dfrac{\vec{r}(5)-\vec{r}(0)}{5-0}$

Además, $\vec{r}(5)=(5^2+3)\,\vec{i}+\left(3\cdot 5^2-2\right)\vec{j}=28\vec{i}+73\vec{j}$ *y* $\vec{r}(0)=3\,\vec{i}-2j$

Por tanto, $\vec{v}_m=\dfrac{\vec{r}(5)-\vec{r}(0)}{5-0}=\dfrac{28\vec{i}+73\vec{j}-(3\,\vec{i}-2j\,)}{5}=\dfrac{25\vec{i}+75\vec{j}}{5}=5\vec{i}+15\vec{j}$

d.

La expresión de la aceleración instantánea se obtiene derivando la velocidad, $\vec{a}(t)=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Por tanto, $\vec{a}(t)=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=2\vec{i}+6\vec{j}$ *m/s²*

Como es una magnitud constante, su módulo no depende del tiempo, $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ *m/s²*

e.

De la definición de aceleración media, $\vec{a}_m=\dfrac{\vec{v}(4)-\vec{v}(0)}{4-0}$

Además, $\vec{v}(4)=2\cdot 4\,\vec{i}+6\cdot 4\;\vec{j}=8\vec{i}+24\vec{j}$ *m/s,* $\vec{v}(0)=0$ *m/s*

Por tanto, $\vec{a}_m=\dfrac{\vec{v}(4)-\vec{v}(0)}{4-0}=\dfrac{8\vec{i}+24\vec{j}}{4}=2\vec{i}+6\vec{j}$ *m/s², que coincide con la aceleración instantánea por ser constante*

f.

Como $x=t^2+3$, $y=3t^2-2$, *si despejamos* t^2 *de la primera ecuación y sustituimos en la segunda,*

$t^2=x-3 \Rightarrow y=3\cdot(x-3)-2 \Rightarrow y=3x-9-2 \Rightarrow y=3x-11$

g.

Como la ecuación de la trayectoria es una línea recta y la aceleración es constante, se trata de un movimiento rectilíneo uniforme

2. Calcula la velocidad lineal a la que se desplaza un ciclista si sus ruedas, de 90 cm de diámetro, dan 72 vueltas cada 20 segundos

La relación entre la velocidad lineal y la angular es $v = \omega \cdot R$. Por tanto, debemos calcular primero la velocidad angular, ya que el radio de giro es el de la rueda. Como el diámetro es 90 cm, el radio será 45 cm = 0,45 m
Sabemos que la velocidad angular es el cociente entre el ángulo girado y el tiempo empleado en hacerlo, $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Por tanto, 72 vueltas es equivalente a $\Delta\varphi = 72 \cdot 2\pi$ rad $= 144\,\pi$ rad, que da en 20 s

Sustituyendo en la expresión $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{144\pi\ rad}{20\ s} = \dfrac{72\pi}{10}\dfrac{rad}{s}$

Finalmente, usando la expresión $v = \omega \cdot R = \dfrac{72\pi}{10}\dfrac{rad}{s} \cdot \dfrac{45}{100} m = \dfrac{324}{100}\pi\dfrac{m}{s} = 3{,}24\pi\dfrac{m}{s} \cong 10{,}18\ m/s \cong 37\ km/h$

3. Desde lo alto del Empire State Building, de 381 m, se lanza verticalmente y hacia abajo una pelota de tenis, con velocidad de 10 m/s. Calcula:

d. La velocidad con que llega al suelo

Como $v^2 = v_0^2 + 2gh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{(10m/s)^2 + 2 \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 381m} \cong 87\ m/s \cong 312\ km/h$

e. El tiempo que tarda en llegar

Como $v = v_0 + gt \Rightarrow t = \dfrac{v - v_0}{g} \Rightarrow t = \dfrac{(87-8)\,m/s}{9{,}8\,m/s^2} = 8{,}06\ s$

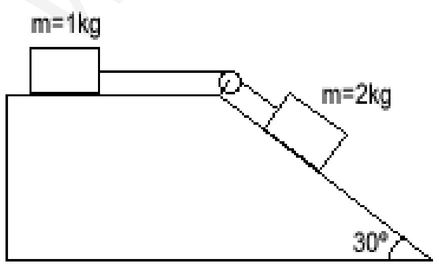
f. la distancia al suelo, a los 2 segundos

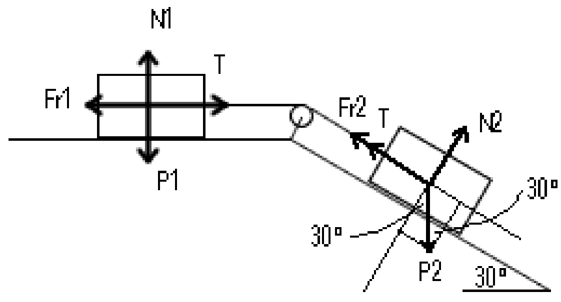
El espacio recorrido en 2 s es $s = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2} = 10\ m/s \cdot 2\,s + \dfrac{9{,}8\,m/s^2 \cdot (2s)^2}{2} = 39{,}6\,m$

Esta distancia es la recorrida por la pelota a partir del lanzamiento. Como la altura del edificio es de 381 m, la distancia al suelo a los 2 s del lanzamiento será h = 381 m – 39,6 m = 341,4 m

DINÁMICA

4. Calcula la aceleración con que deslizan los bloques y la tensión de la cuerda suponiendo que el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}1$





Aplicando la 2ª ley de Newton a ambos bloques

<u>*Bloque 1*</u> $T - Fr_1 = m_1 a \Rightarrow T - \mu N_1 = m_1 a$

$N_1 - P_1 = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g$

Sustituyendo esta última ecuación en la primera $T - \mu m_1 g = m_1 a$

<u>Bloque 2</u> $P_2 sen\varphi - T - Fr_2 = m_2 a \Rightarrow m_2 g\, sen\varphi - T - \mu N_2 = m_2 a$

$N_2 - P_2 cos\varphi = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g cos\varphi$

Sustituyendo esta última ecuación en la primera $m_2 g\, sen\varphi - T - \mu m_2 g cos\varphi = m_2 a$

Sumando miembro a miembro con la ecuación $T - \mu m_1 g = m_1 a$

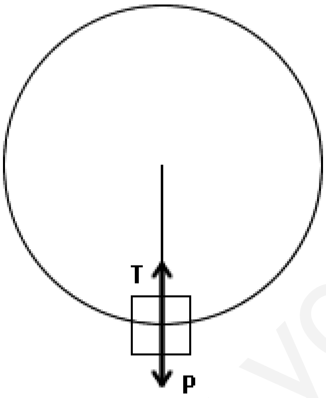
$m_2 g\, sen\varphi - \mu m_2 g cos\varphi - \mu m_1 g = m_2 a + m_1 a = (m_1 + m_2)\, a \Rightarrow (m_2 sen\varphi - \mu m_2 cos\varphi - \mu m_1) g = (m_1 + m_2)\, a$

$[m_2 sen\varphi - \mu (m_2 cos\varphi + m_1)]\, g = (m_1 + m_2)\, a \Rightarrow a = \dfrac{m_2 sen\varphi - \mu(m_2 \cos\varphi + m_1)}{m_1 + m_2} g$

$$a = \frac{m_2 sen\varphi - \mu(m_2 \cos\varphi + m_1)}{m_1 + m_2} g = \frac{2kg \cdot sen30^o - 0{,}1 \cdot (2kg \cdot \cos 30^o + 1kg)}{1kg + 2kg} \cdot 9{,}8 m/s^2 = 2{,}37 m/s^2$$

Como $T - \mu m_1 g = m_1 a \Rightarrow T = \mu m_1 g + m_1 a = m_1 (\mu g + a) = 1\ kg\ (0{,}1 \cdot 9{,}8\ m/s^2 + 2{,}37\ m/s^2) = 3{,}35\ N$

5. Una cuerda de 50 cm se rompe cuando un objeto de 25 kg sujeto a ella gira a 75 rpm al pasar por el punto más bajo de su trayectoria circular. Calcula la tensión máxima que soporta la cuerda



Teniendo en cuenta que en el movimiento circular uniforme la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es la fuerza centrípet, que apunta hacia el centro de la trayectoria, si aplicamos la 2ª ley de Newton en el punto más bajo de la trayectoria, que es cuando se rompe la cuerda

$$T - P = F_c \Rightarrow T - mg = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

Si despejamos la tensión $\Rightarrow T = mg + m\omega^2 R = m\,(g + \omega^2 R)$

Hay que tener en cuenta que la cuerda mide 50 c y que hay que poner la velocidad angular en rad / s, que está expresada en rpm

$$\omega = 75 rpm = 75 \frac{vueltas}{min} \cdot \frac{2\pi rad}{1 vuelta} \cdot \frac{1 min}{60 s} = \frac{5}{2}\pi \frac{rad}{s}$$

Sustituyendo en la expresión de la tensión

$$T = m(g + \omega^2 R) = 25kg \cdot (9{,}8 m/s^2 + (\frac{5\pi}{2} \frac{rad}{s})^2 \cdot 0{,}5m) = 343{,}17\ N$$