Problemas de PAU resueltos

1> Un futbolista golpea durante 0,5 s un balón de 1 kg de masa, que se encuentra en reposo, de forma que le imprime una velocidad de 5 m/s. ¿Cuál es el módulo del momento lineal de la pelota antes y después de la patada? ¿Cuál es el impulso sobre la pelota?

Solución

Como la pelota inicialmente está en reposo, su velocidad $v_0 = 0$, y su momento lineal también es nulo: $p_0 = m\, v_0 = 0$.

El momento lineal después de la patada es: $p_f = m\, v_f = 1 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/s} = 5 \text{ kg m/s}$.

El impulso de la fuerza aplicada al balón es igual a la variación de su momento lineal:

$$I = F\,t = m\,v_f - m\,v_0 = 5 \text{ kg m/s} - 0 = 5 \text{ kg m/s} = 5 \text{ N s}$$

2> Un soldado dispara una ametralladora. Las balas, de masa 100 g, salen con una velocidad de 400 m/s. La máxima fuerza que puede ejercer el soldado sujetando la ametralladora es de 200 N. ¿Cuál es el máximo número de balas que puede disparar en un minuto?

Solución

El momento lineal de cada bala es: $p = m\,v = 100 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 400 \text{ m s}^{-1} = 40 \text{ kg m s}^{-1}$.

De acuerdo con el Principio de conservación del momento lineal, el valor del momento lineal de la ametralladora será también 40 kg m s^{-1} por cada bala disparada. Para n balas, el momento lineal de la ametralladora será 40 n kg m s^{-1}.

El impulso mecánico de la fuerza que ejerce el soldado sobre la ametralladora es igual a la variación de su momento lineal, que antes de disparar es nulo porque la ametralladora está en reposo:

$$F\,t = m\,v - m\,v_0 = 40 \text{ n kg m s}^{-1} - 0 = 40 \text{ n kg m s}^{-1} = 40 \text{ n N s}$$

Al despejar el número de balas n, se obtiene:

$$n = \frac{F\,t}{40} = \frac{200 \text{ N} \cdot 60 \text{ s}}{40 \text{ N s}} = 300 \text{ balas}$$

3> Dos vagones de ferrocarril de masas $4 \cdot 10^4$ y $3 \cdot 10^4$ kg ruedan en la misma dirección y sentido. El vagón menos pesado rueda delante, moviéndose con una velocidad de 0,5 m/s, mientras que el más pesado se mueve a 1 m/s. Llega un momento que chocan y se acoplan. Calcula:

***a)* La cantidad de movimiento o momento lineal total del sistema antes y después del choque.**

***b)* La velocidad con que se mueven los vagones después del choque.**

Solución

a) Como se trata de un sistema aislado, no sometido a fuerzas exteriores, el momento lineal se mantiene constante; por tanto, su valor es el mismo antes y después del choque:

$$p = m_1\,v_1 + m_2\,v_2 = 4 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m s}^{-1} + 3 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 0{,}5 \text{ m s}^{-1} = 5{,}5 \cdot 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$$

b) Como los dos vagones se acoplan después del choque, su velocidad es la misma:

$$p = (m_1 + m_2)\,v' \;; \qquad v' = \frac{p}{m_1 + m_2} = \frac{5{,}5 \cdot 10^4 \text{ kg m s}^{-1}}{4 \cdot 10^4 \text{ kg} + 3 \cdot 10^4 \text{ kg}} = 0{,}79\ m\ s^{-1}$$

Problemas de PAU resueltos

4> La nave espacial «Lunar Prospector» permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina la velocidad lineal de la nave y el periodo del movimiento.

***Datos:* G = 6,67 · 10^{-11} N m² kg^{-2}; masa de la Luna M_L = 7,36 · 10^{22} kg; radio lunar R_L = 1 740 km.**

Solución

Como la fuerza centrípeta coincide con la fuerza gravitatoria, podemos calcular la velocidad lineal v de la nave:

$$G\frac{M_L\,m}{R^2}=\frac{m\,v^2}{R};\quad v=\sqrt{\frac{G\,M_L}{R}}$$

El radio de la órbita R es: $R = R_L + h$ = 1 740 km + 100 km = 1 840 km = 1,84 · 10^6 m

Sustituyendo los datos en la fórmula anterior, se obtiene la velocidad de la nave lunar:

$$v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}\cdot 7{,}36\cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}84\cdot 10^{6}\ \text{m}}}=1\,630\ \text{m s}^{-1}=1{,}63\ \text{km s}^{-1}$$

El periodo del movimiento es el tiempo que tarda la nave en recorrer la longitud de su órbita circular ($2\pi\,R$) con esta velocidad:

$$T=\frac{2\pi\,R}{v}=\frac{2\pi\cdot 1{,}84\cdot 10^{6}\ \text{m}}{1\,630\ \text{m s}^{-1}}=7\,090\ \text{s}=1{,}97\ \text{horas}$$

5> Un planeta esférico tiene un radio de 3 000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s². ¿Cuál es su densidad media?

***Datos:* G = 6,67 · 10^{-11} N m² kg^{-2}.**

Solución

Como el peso de un cuerpo es la fuerza con que el planeta lo atrae, al igualar la fuerza gravitatoria con el peso se obtiene el valor de la aceleración de la gravedad en el planeta, y de ahí la masa del planeta:

$$m\,g=\frac{G\,M\,m}{R^2};\quad g=\frac{G\,M}{R^2};\quad M=\frac{g\,R^2}{G}=\frac{6\ \text{m s}^{-2}\cdot(3\cdot 10^{6}\ \text{m})^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}}=8{,}1\cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

La densidad del planeta es el cociente entre su masa y su volumen $\left(\frac{4}{3}\pi\,R^3\right)$:

$$d=\frac{M}{V}=\frac{8{,}1\cdot 10^{23}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi\cdot(3\cdot 10^{6}\ \text{m})^3}=7{,}16\cdot 10^{3}\ \text{kg m}^{-3}$$

6> La distancia media Tierra-Sol es 1,5 · 10^8 km. Calcula la masa del Sol.

***Dato:* G = 6,67 · 10^{-11} N m² kg^{-2}.**

Solución

La Tierra tarda un año en dar una vuelta alrededor del Sol; por tanto, su periodo de revolución es:

$$T=365\ \text{días}\cdot\frac{86\,400\ \text{segundos}}{1\ \text{día}}=365\cdot 86\,400\ \text{s}$$

Problemas de PAU resueltos

En el movimiento de giro de la Tierra alrededor del Sol, la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitatoria existente entre el Sol y la Tierra. Igualando ambos valores, podemos obtener la masa del Sol (M) en función de la distancia entre ambos astros (R) y la velocidad lineal de la Tierra (v), siendo m la masa de la Tierra:

$$\frac{m\,v^2}{R} = \frac{G\,M\,m}{R^2}\,; \qquad M = \frac{v^2\,R}{G}$$

El valor de v lo obtenemos a partir del valor del periodo de rotación de la Tierra y de la relación entre velocidad lineal y velocidad angular:

$$v = \omega\,R = \frac{2\pi}{T}\,R; \quad v^2 = \frac{4\pi^2\,R^2}{T^2}$$

Introduciendo este valor en la fórmula anterior de la masa del Sol, resulta:

$$M = \frac{4\pi^2\,R^3}{G\,T^2} = \frac{4\pi^2\,(1{,}5\cdot 10^{11}\ \text{m})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}\cdot(365\cdot 86\,400\ \text{s})^2} = 2\cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

7> Un automóvil de 1 500 kg de masa se mueve en un tramo recto con una velocidad de 90 km/h e inicia una curva, permaneciendo el trazado horizontal, cuyo radio de curvatura es R = 60 m, manteniendo siempre la misma velocidad tangencial *v*. Determina la dirección, el sentido y el valor de la fuerza que el asfalto ejerce sobre el automóvil durante su recorrido por la curva.

Solución

La fuerza centrípeta responsable del movimiento circular es en este caso la fuerza de rozamiento de las ruedas del automóvil con el asfalto.

La dirección de la fuerza centrípeta es perpendicular a la trayectoria circular de la curva y se dirige hacia el centro de la curva. Su valor es:

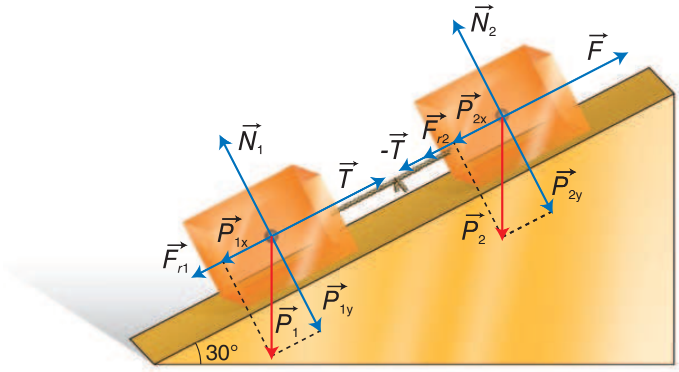
$$F = \frac{m\,v^2}{R} = \frac{1\,500\ \text{kg}\cdot(25\ \text{m s}^{-1})^2}{60\ \text{m}} = 1{,}56\cdot 10^4\ \text{N}$$

8> Dos bloques de masa m_1 = 4 kg y m_2 = 2 kg están unidos por una cuerda inextensible y de masa despreciable y situados sobre un plano inclinado 30° sobre la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento con el plano inclinado para ambos bloques vale 0,3, calcula:

***a)* Lafuerza *F* paralela al plano necesaria para que el sistema ascienda con velocidad constante por el plano inclinado.**

***b)* La tensión de la cuerda que une los dos bloques durante el ascenso.**

Solución:



Problemas de PAU resueltos

a) Como el sistema asciende a velocidad constante, la aceleración es nula, y la fuerza resultante también debe ser nula.

Teniendo en cuenta que $P_x = m\,g$ sen α, que $F_r = \mu\, m\, g \cos\alpha$ y que $\Sigma F = 0$, obtenemos las siguientes ecuaciones para las masas m_1 y m_2:

$$T - m_1\, g \text{ sen } 30° - \mu\, m_1\, g \cos 30° = 0; \qquad T = m_1\, g \text{ sen } 30° + \mu\, m_1\, g \cos 30°$$

$$F - m_2\, g \text{ sen } 30° - T - \mu\, m_2\, g \cos 30° = 0$$

Al introducir el valor de la tensión T en la última ecuación obtenemos el valor de F:

$$F = m_2\, g \text{ sen } 30° + m_1\, g \text{ sen } 30° + \mu\, m_1\, g \cos 30° + \mu\, m_2\, g \cos 30°$$

Simplificando e introduciendo los correspondientes valores, se obtiene:

$$F = (m_1 + m_2)\, g\, (\text{sen } 30° + \mu \cos 30°) = (4 + 2) \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot (0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}866) = 44{,}7 \text{ N}$$

b) Al introducir los correspondientes valores en la ecuación de la tensión, se obtiene:

$$T = 4 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 4 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot 0{,}866 = 29{,}8 \text{ N}$$

9> Si un cuerpo se desliza sobre un plano horizontal con rozamiento, tras ser lanzado con una determinada velocidad inicial, ¿cuáles de los siguientes factores influyen en el tiempo que tarda en pararse?

***a)* Velocidad inicial del lanzamiento.**

***b)* Masa del cuerpo.**

***c)* Naturaleza de los materiales que forman el cuerpo y la superficie del plano.**

Solución

Como hemos visto a lo largo de la Unidad, en un plano horizontal, el peso del cuerpo $\vec{P}$ y la reacción del plano $\vec{N}$ tienen el mismo valor numérico, pero sentido contrario. Por este motivo se equilibran y se anulan.

Una vez lanzado el cuerpo, la única fuerza que actúa sobre él es del rozamiento, que se opone al movimiento: $F_r = \mu_c\, N = \mu_c\, m\, g$.

La aceleración del cuerpo se obtiene a partir de la Segunda ley de Newton de la Dinámica:

$$a = \frac{\Sigma \vec{F}}{m}\ ; \quad a = \frac{-\vec{F}_r}{m} = \frac{-\mu_c\, m\, g}{m} = -\mu_c\, g$$

Como la aceleración es constante, porque lo son μ_c y g, el movimiento es uniformemente acelerado, lo que nos permite calcular el tiempo que tarda el cuerpo en pararse:

$$v = v_0 + at; \quad t = \frac{v - v_0}{a}; \quad \text{siendo } v = 0 \text{, porque el cuerpo se detiene}$$

Al sustituir en la ecuación del tiempo, se obtiene: $t = \dfrac{-v_0}{a} = \dfrac{-v_0}{-\mu_c\, g}\ ; \quad t = \dfrac{v_0}{\mu_c\, g}$

a) El tiempo que tarda el cuerpo en pararse es directamente proporcional a la velocidad inicial.

b) La masa del cuerpo no influye.

a) El tiempo es inversamente proporcional al coeficiente de rozamiento cinético; por tanto, sí depende de la naturaleza de las dos superficies en contacto.