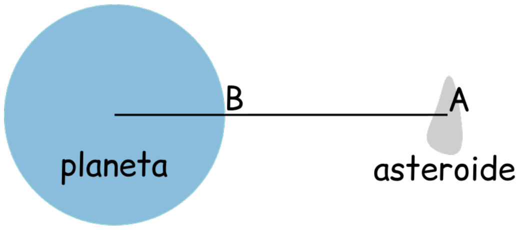
1) Un planeta petit sense atmosfera de $7{,}1\times10^{22}$ kg té un radi de 1700 km.

a) Un asteroide de mitja tona es dirigeix en línia recta cap al centre del planeta. Quan es troba a 14000 km del centre, l'asteroide es mou a 5,2 km/s. Calcula la velocitat i l'energia mecànica total de l'asteroide just abans d'impactar sobre el planeta. (1 punt)

b) Determina si un asteroide de mitja tona pot orbitar el planeta amb una trajectòria circular o el·líptica movent-se a 5,2 km/s quan està a 14000 km del centre del planeta. Si pot, determina el període de l'òrbita circular. Si no pot, determina la velocitat que hauria de tenir per seguir una òrbita circular de 14000 km de radi. (1 punt)

a)

Considerando la conservación de la energía mecánica para el asteroide:



$$E_{mec,B} = E_{mec,A} \quad \Rightarrow \quad E_{mec,B} = E_{k,A} + E_{p,A}$$

$$E_{mec,B} = \frac{1}{2} m_{ast} \cdot v_A^2 - G\frac{m_{ast} M_{pl}}{r_A} =$$

$$= \frac{1}{2} 500 \cdot (5.2 \cdot 10^3)^2 - 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{500 \cdot 7.1 \cdot 10^{22}}{1.4 \cdot 10^7} = 6.59 \cdot 10^9 \ J$$

$$E_{mec,B} = E_{mec,A} \quad \Rightarrow \quad E_{k,B} + E_{p,B} = E_{mec,A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{ast} \cdot v_B^2 = E_{mec,A} - E_{p,B}$$

$$\frac{1}{2} m_{ast} \cdot v_B^2 = E_{mec,A} + G\frac{m_{ast} M_p}{r_B} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{2E_{mec,A}}{m_{ast}} + G\frac{2M_p}{r_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.59 \cdot 10^9}{500} + 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 7.1 \cdot 10^{22}}{1.7 \cdot 10^6}} =$$

$$= 5651 \ m/s$$

Solución: $\boxed{6.59\cdot10^9 \text{ J; } 5651 \text{ m/s}}$

b)

No es posible tener una órbita cerrada (circular o elíptica) si la energía mecánica es ≥ 0. En una órbita circular la fuerza de atracción gravitatoria es igual a la fuerza centrípeta, por tanto

$$F_g = m_{ast} \cdot a_c \quad \Rightarrow \quad G\frac{m_{ast} M_p}{r_{orb}^2} = m_{ast} \frac{v_{orb}^2}{r_{orb}} \quad \Rightarrow \quad v_{orb} = \sqrt{G\frac{M_p}{r_{orb}}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{7.1 \cdot 10^{22}}{14 \cdot 10^6}} = 582 \ m/s$$

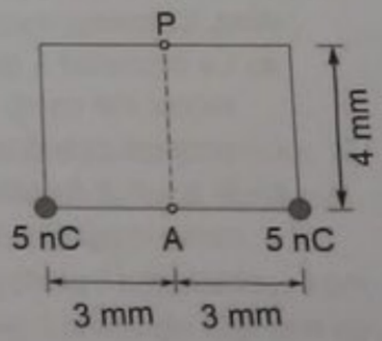
Solución: $\boxed{582 \text{ m/s}}$

2) Dues partícules amb 5 nC de càrrega elèctrica cada una estan separades 6 mm.

a) Dibuixa i identifica els vectors que representen els camps elèctrics en el punt P de la figura a causa de cada càrrega per separat i conjuntament. (0,7 punts)

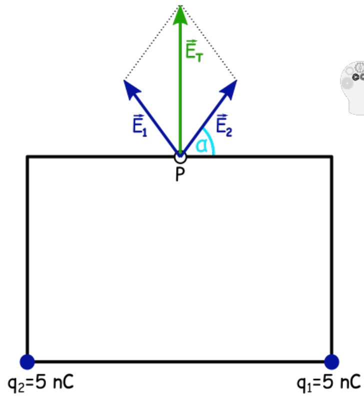
b) Calcula el mòdul del camp elèctric en el punt P a causa de les dues càrregues. (1 punt)

c) Quin valor ha de tenir una càrrega elèctrica en el punt A de la figura per anul·lar el camp elèctric anterior? (0,3 punts)



a)

Las dos cargas son iguales y se encuentran a la misma distancia del punto P. Por tanto los módulos de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ que crean ambas cargas son iguales. Su suma vectorial hará que la componente horizontal se anule quedando únicamente componente vertical dirigida hacia arriba.



b)

Vectorialmente

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{r}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3}\right) =$$

$$= 9\cdot 10^9 \cdot 5\cdot 10^{-9}\left(\frac{-3\cdot 10^{-3}\hat{\imath} + 4\cdot 10^{-3}\hat{\jmath}}{(5\cdot 10^{-3})^3}\right) + 9\cdot 10^9 \cdot 5\cdot 10^{-9}\left(\frac{3\cdot 10^{-3}\hat{\imath} + 4\cdot 10^{-3}\hat{\jmath}}{(5\cdot 10^{-3})^3}\right) = 2.88\cdot 10^6 \ \hat{\jmath} \ N/C$$

Trabajando con módulos y aprovechando la geometría del problema. El módulo del campo total será

$$\left|\vec{E}_T\right| = 2\left|\vec{E}_1\right| \cdot \sin\alpha = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{|\vec{r}_1|^2}\sin\alpha = 2\cdot 9\cdot 10^9\frac{5\cdot 10^{-9}}{(5\cdot 10^{-3})^2}\cdot\frac{4\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}} = 2.88\cdot 10^6 \ N/C$$

con la dirección y el sentido que muestra el dibujo.

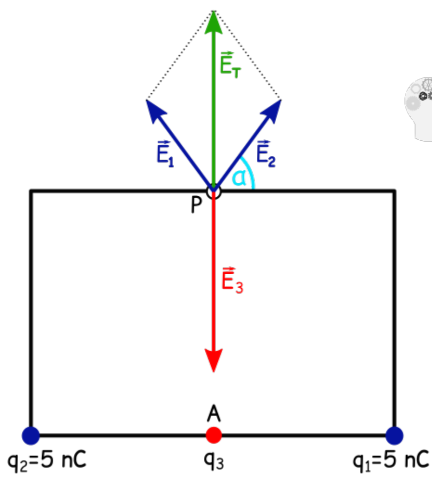
Solución: $\boxed{2.88\cdot 10^6 \ \hat{\jmath} \ N/C}$

c)

Para poder anular el campo creado por las dos cargas positivas habrá que poner una carga negativa en A, de tal manera que el campo tenga el mismo módulo y dirección que $\vec{E}_T$ pero con sentido contrario.

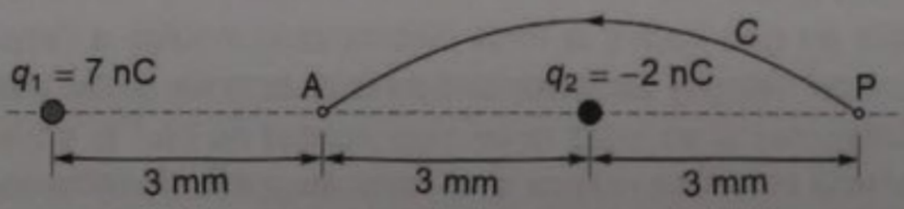
$$\left|\vec{E}_T\right| = \left|\vec{E}_-\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{E}_T\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_3|}{|\vec{r}_3|^2} \quad \Rightarrow \quad 2.88\cdot 10^6 = 9\cdot 10^9\frac{|q_3|}{(4\cdot 10^{-3})^2}$$

$$|q_3| = \frac{2.88\cdot 10^6\cdot 16\cdot 10^{-6}}{9\cdot 10^9} = 5.12\cdot 10^{-9} \ C$$



Solución: $\boxed{-5.12 \ nC}$

3) Una partícula amb 7 nC està a 6 mm d'una altra partícula amb –2 nC.

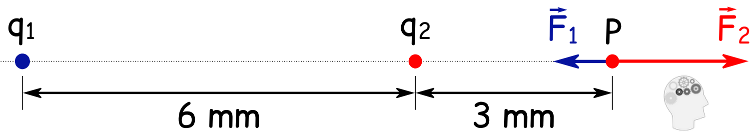


a) Calcula la força elèctrica a causa de les càrregues de les dues partícules sobre un electró en el punt P de la línia que passa per les partícules, a 3 mm a la dreta de la segona. Descriu explícitament el sentit de la força. (1 punt)

b) Calcula el mòdul del treball per portar l'electró al llarg d'una corba C com la de la figura des del punt P fins al punt mitjà A entre les dues partícules. (1 punt)

a)

Dado que $\left|\vec{F}\right| \propto \frac{|q|}{r^2}$ tenemos $F_1 \propto \frac{7}{81} < F_2 \propto \frac{2}{9}$ y por tanto la fuerza resultante estará dirigida hacia la derecha, sentido que tomaremos como positivo



$$\left|\vec{R}\right| = \left|\vec{F_2}\right| - \left|\vec{F_1}\right| = 9 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \left(\frac{2 \cdot 10^{-9}}{(3 \cdot 10^{-3})^2} - \frac{7 \cdot 10^{-9}}{(9 \cdot 10^{-3})^2} \right) = 1.96 \cdot 10^{-13} \ N$$

Solución: $\boxed{\left|\vec{R}\right| = 1.96 \cdot 10^{-13} \ N}$

b)

El campo eléctrico es conservativo y por tanto el trabajo no va a depender de la trayectoria, sólo del potencial final e inicial. Entendemos el módulo del trabajo como el valor absoluto del mismo, ya que es una magnitud escalar. Por tanto

$$W = |\Delta E_p| = |q\,(E_{p,A} - E_{p,P})| = |q\,(V_A - V_P)|$$

Para calcular el potencial en A y P aplicamos el principio de superposición, es decir el potencial en cada punto será la suma de los potenciales individuales de cada una de las cargas.

$$V_A = V_{A,q_1} + V_{A,q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1,A}} + \frac{q_2}{r_{2,A}} \right) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{7 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3}} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3}} \right) = 1.5 \cdot 10^4 \ V$$

$$V_P = V_{P,q_1} + V_{P,q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1,P}} + \frac{q_2}{r_2} \right) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{7 \cdot 10^{-9}}{9 \cdot 10^{-3}} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3}} \right) = 1 \cdot 10^3 \ V$$

Dado que el potencial final es mayor que el inicial, la carga negativa se movería espontáneamente de P a A. Por tanto el trabajo lo haría el propio campo eléctrico.

$$W = |\Delta E_p| = |q\,(E_{p,A} - E_{p,P})| = |q\,(V_A - V_P)| = \left|-1.6 \cdot 10^{-19}\,(15000 - 1000)\right| = 2.24 \cdot 10^{-15} \ J$$

Solución: $\boxed{W = 2.24 \cdot 10^{-15} \ J}$

4) Es crea una ona harmònica de 3 cm d'amplitud a la superfície de l'aigua d'un canal. Les crestes consecutives de l'ona estan separades 20 cm i es propaguen a 0,25 m/s.

a) Escriu l'equació general d'una ona harmònica que es propaga cap a la dreta amb la pertorbació positiva màxima a l'origen de coordenades a $t = 0$ i l'equació particular de l'ona a la superfície de l'aigua descrita abans. (0,8 punts).

b) Argumenta quin serà el valor de la pertorbació del nivell de l'aigua d'un punt de la superfície després de 0,4 s d'haver estat en una cresta. (0,5 punts)

c) Calcula el temps que ha de passar des que un punt està en una cresta fins que s'ha desplaçat 4,5 cm des de la cresta cap a baix. (0,7 punts)

a)

La ecuación para una onda armónica transversal que se desplaza hacia la derecha, supondremos que a lo largo del eje x en sentido positivo, con la perturbación máxima positiva en el origen en el instante t = 0, viene dada por una función del tipo coseno sin fase inicial

$$Y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

Calculamos la frecuencia angular y vector de onda a partir de la longitud de onda y la velocidad de propagación. Como dos crestas consecutivas están separadas 20 cm

$$\lambda = 0.2\ m \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi\ m^{-1}\ ,\ v_p = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad 0.25 = \frac{\omega}{10\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2.5\pi\ rad/s$$

Por tanto $Y(x,t) = A \cdot \cos(2.50\pi t - 10\pi x)$

Solución: $\boxed{Y(x,t) = 0.03 \cdot \cos(2.5\pi t - 10\pi x)}$

b)

El período de la onda es $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2.50\pi} = 0.8\ s$, por tanto en 0,4 s habrá pasado $\frac{1}{2}$ períodos y por tanto la onda se encontrará en la posición negativa máxima, es decir -3 cm.

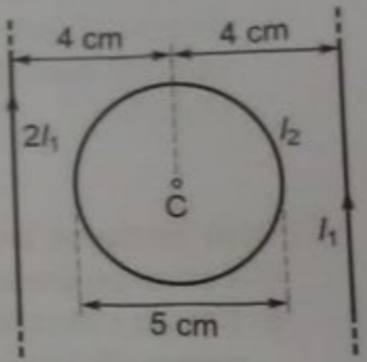
c)

En el instante t_1 y posición x_1, $Y(x_1,t_1) = 0.03\ m$. En la misma posición en el instante t_2 $Y(x_1,t_2) = -0.015\ m$, es decir la cresta se ha desplazado 4.5 cm hacia abajo.

$$\left.\begin{array}{r} Y(x_1,t_1) = 0.03\ ,\ \cos(2.5\pi t_1 - 10\pi x_1) = 1\ ,\ 2.5\pi t_1 - 10\pi x_1 = 0 \\ Y(x_1,t_2) = -0.015\ ,\ \cos(2.5\pi t_2 - 10\pi x_1) = -\frac{1}{2}\ ,\ 2.5\pi t_2 - 10\pi x_1 = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 2.5\pi(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{3}\ ,\ t_2 - t_1 = \frac{4}{15}\ s$$

Solución: $\boxed{t_2 - t_1 = \frac{4}{15}\ s}$

5) Entre dos fils conductors rectes, infinits i paral·lels, hi ha una espira circular. La figura mostra el sentit dels corrents en els fils rectes i la posició i el diàmetre de l'espira. La intensitat del corrent elèctric en el fil esquerre sempre és el doble de la intensitat en el fil dret. Calcula:



a) La intensitat I_1 que ha de passar pel fil dret perquè el mòdul del camp magnètic en el punt C a causa dels corrents dels dos fils rectes valgui 12 μT. (1 punt)

b) Si I_1 = 1,2 A, calcula la intensitat I_2 que ha de passar per l'espira circular perquè el camp magnètic total en el centre C sigui nul. Indica i justifica el sentit d'aquest corrent. (1 punt)

a)

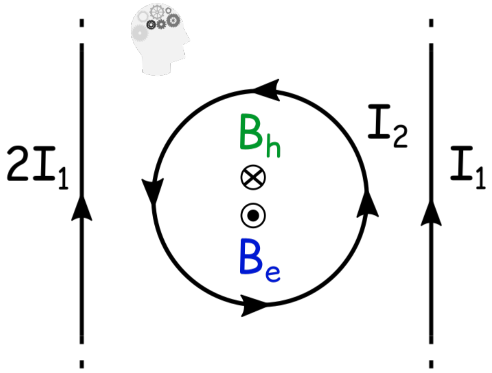
Como el campo creado por un hilo infinito a una distancia r es $\left|\vec{B}\right| \propto \frac{I}{r}$, el campo en el punto C debido al hilo de la izquierda será el doble que el del hilo de la derecha. Además el campo debido al hilo de la izquierda entra en el papel y el de la derecha sale del papel. Tomaremos como sentido positivo el entrante en el papel.

$$\left|\vec{B}_h\right| = \left|\vec{B}_{izq}\right| - \left|\vec{B}_{der}\right| = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{2I_1}{r} - \frac{I_1}{r}\right) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad 12\cdot 10^{-6} = \frac{4\pi 10^{-7} I_1}{2\pi 0.04} \quad \Rightarrow \quad I_1 = 2.4\ A$$

Solución: $\boxed{I_1 = 2.4\ A}$

b)

El campo creado por los dos hilos $\vec{B}_h$ es un campo que entra en el papel, por tanto el campo que crea la espira $\vec{B}_e$ debe ser un campo que sale del papel para que el campo total sea nulo. Por tanto la corriente que circula por la espira debe tener sentido antihorario.



$$\left|\vec{B}_T\right| = \left|\vec{B}_h\right| - \left|\vec{B}_e\right| \quad \Rightarrow \quad 0 = \left|\vec{B}_h\right| - \left|\vec{B}_e\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{B}_h\right| = \left|\vec{B}_e\right|$$

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_2}{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{\pi r} = \frac{I_2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1.2}{\pi 0.04} = \frac{I_2}{0.025} \quad , \ I_2 = 0.239\ A$$

Solución: $\boxed{I_2 = 0.239\ A}$

6) El flux de camp magnètic a través d'una espira circular durant l'interval de 0 a 4 s està donat per la següent funció del temps en segons,

$$\phi(t) = 4t - t^2 \ \mu\text{Wb}.$$

a) Calcula en quin instant la força electromotriu induïda a l'espira és zero i en quin instant de l'interval és màxima. Escriu el nom de la llei usada per fer el càlcul. (1 punt)

b) Determina el radi de l'espira si el camp magnètic és uniforme, té una intensitat de 0,2 mT i és perpendicular al pla de l'espira a $t = 1$ s. (1 punt)

a)
Haciendo uso de la ley de Farady-Henry

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -4 + 2t$$

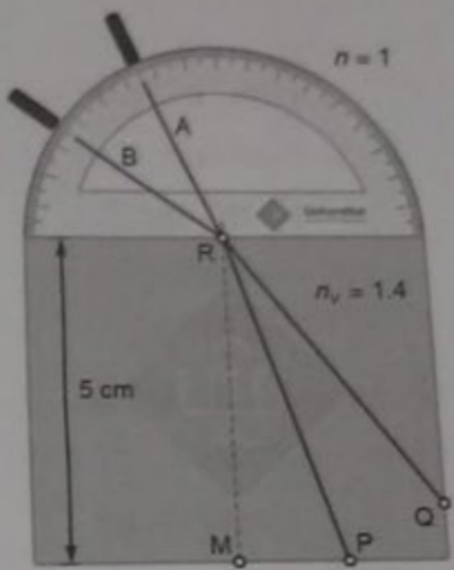
que es una recta creciente. En t=0 s $\varepsilon(0) = -4\ \mu V$ y en t= 4 s $\varepsilon(4) = 4\ \mu V$. La fem se anula $0 = -4 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = 2\ s$.

Solución: $\boxed{\varepsilon(2) = 0}$

b)
En t =1 el flujo es $\phi(1) = 3\ \mu Wb$. En ese instante el plano de la espira es perpendicular al campo y por tanto el flujo
$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos\theta = \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos 0 = \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \pi R^2 \ \Rightarrow \ 3 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-4} \pi R^2 \ , \ R = 6.9 \cdot 10^{-2}\ m$

Solución: $\boxed{R = 6.9 \cdot 10^{-2}\ m}$

7) El raig d'un làser es dirigeix cap a un bloc de plàstic de secció rectangular i índex de refracció $n_v = 1{,}4$. El raig es dirigeix en una direcció A i, després, en una altra direcció B. Les dues direccions s'han representat a la figura. Usa el portaangles de 180° dibuixat per determinar l'angle d'incidència del raig sobre el bloc en cada cas.



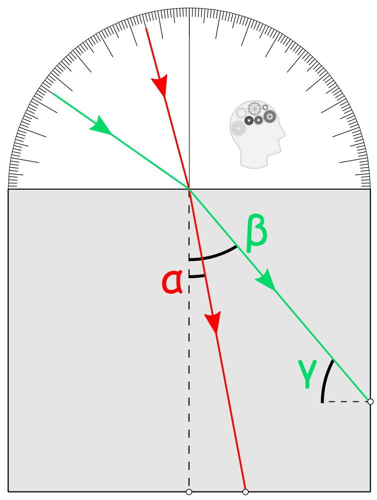
a) Quan el raig ha seguit la direcció A dins l'aire, passa per un punt P de la cara inferior del bloc, a la dreta del punt M de la vertical del punt de refracció. Calcula la distància entre els punts P i M. (0,8 punts)

b) Calcula quant de temps tarda la llum per avançar 3 cm al llarg del segment R-P. (0,4 punts)

c) Quan el raig ha seguit la direcció B dins l'aire, arriba al punt Q de la cara dreta del bloc. Determina si el raig es reflecteix totalment o no en aquest punt. (0,8 punts)

a)

Determinamos el ángulo que forma el rayo refractado con la normal aplicando la ley de Snell



$$n_a \cdot \sin i = n_v \cdot \sin\alpha \quad , \quad 1 \cdot \sin 25 = 1.4 \cdot \sin\alpha \quad , \quad \alpha = 17.57$$

y con un poco de trigonometría

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MP}}{\overline{RM}} \quad , \quad \tan 17.57 \cdot 5 = \overline{RM} \quad , \quad \overline{RM} = 1.58\ cm$$

Solución: $\boxed{\overline{RM} = 1.58\ cm}$

b)

Al penetrar en el plástico la velocidad del rayo resultará ser $v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.4} = 2.14 \cdot 10^8\ m/s$ y por tanto el rayo tardará en recorrer 3 cm, $t = \frac{d}{v} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{2.14 \cdot 10^8} = 1.40 \cdot 10^{-10}\ s$

Solución: $\boxed{t = 1.40 \cdot 10^{-10}\ s}$

c)

Calculamos el ángulo β con el que el rayo es refractado aplicando la ley de Snell

$$n_a \cdot \sin i = n_v \cdot \sin\beta \quad , \quad 1 \cdot \sin 55 = 1.4 \cdot \sin\beta \quad , \quad \beta = 35.81 \quad , \quad \gamma = 90 - \beta = 54.19$$

Se producirá reflexión total si $n_p \cdot \sin\gamma > n_a = 1 \quad 1.4 \cdot \sin 54.19 = 1.13 > n_a$ y por tanto se produce reflexión total.

8) **a)** La imatge d'un objecte de 3 mm d'alçària creada per una lent prima és virtual, té 10 mm d'alçària i es forma a 14 cm de la lent. Calcula la distància focal de la lent. Escriu explícitament si la lent és convergent o divergent. (1,2 punts)

b) Traça els tres raigs principals que determinen la imatge d'un objecte de 4 cm d'alçària situat amb el peu sobre l'eix òptic a 7 cm d'una lent prima de +30 mm de distància focal. (0,8 punts)

a)
Dado que la imagen es virtual y de mayor tamaño que la original deducimos que es una lente convergente. La imagen virtual que se obtiene siempre con una lente divergente es de menor tamaño.

A partir de los tamaños del objeto y la imagen podemos determinar la posición del objeto.

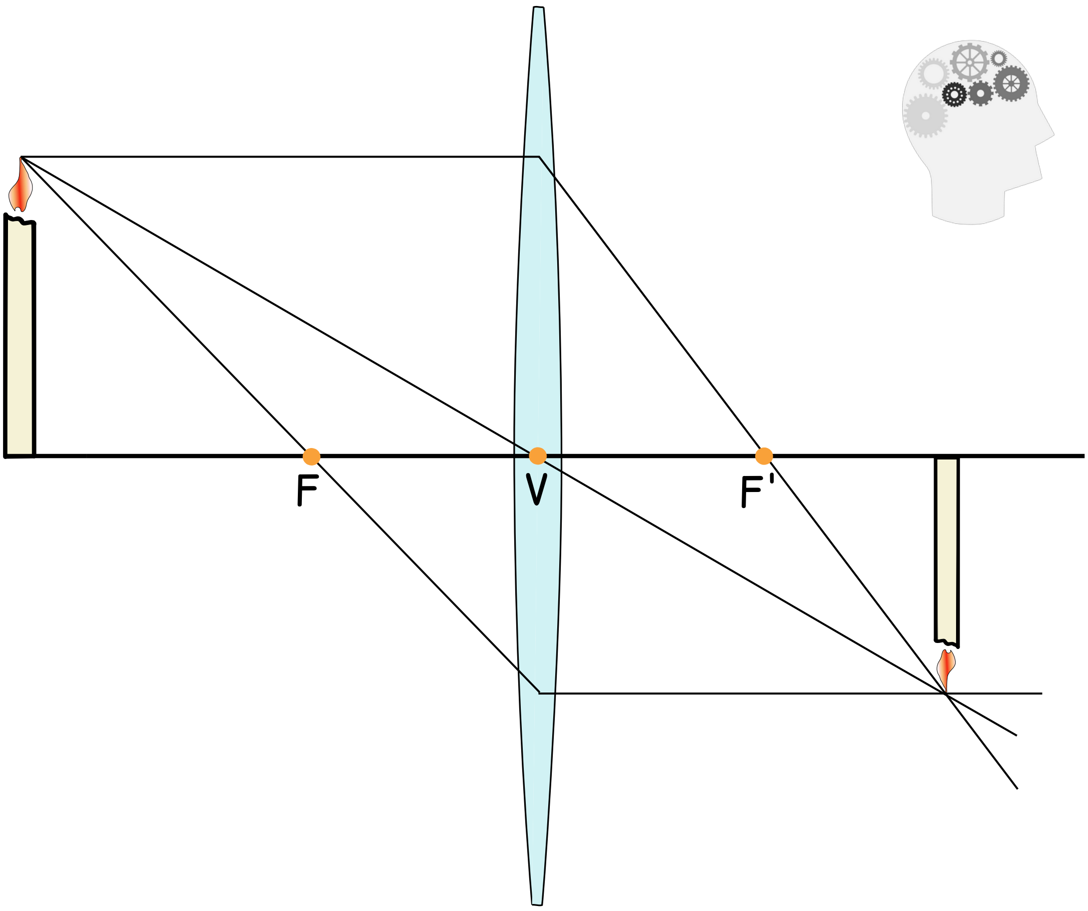
$$\frac{s}{s'} = \frac{y}{y'} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{-14} = \frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad s = -4.2\ cm$$

Haciendo uso de la ecuación para las lentes con s'= -14 cm y s= -4.2 cm

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-14} - \frac{1}{-4.2} = \frac{1}{f'} \quad , \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{6} \quad , \quad f' = 6$$

Solución: $\boxed{f' = 6\ cm}$

b)



9) Una placa de sodi, una de silici i una d'alumini s'il·luminen amb llum monocromàtica de 538 nm.

a) Determina quines de les plaques emeten electrons per efecte fotoelèctric. (0,6 punts)

b) Calcula en cada cas la velocitat màxima dels electrons. (1 punt)

c) Si la intensitat de la llum es duplica, quin és el canvi de la velocitat màxima dels electrons emesos? (0,4 punts)

a)

Calculamos la frecuencia de la radiación incidente.

$$c = \lambda \cdot \nu \ , \ 3 \cdot 10^8 = 538 \cdot 10^{-9} \cdot \nu_{inc} \quad \Rightarrow \quad \nu_{inc} = 5.58 \cdot 10^{14} \ Hz$$

Del formulario, el trabajo de extracción W para el sodio, el silicio y el aluminio son 2.28 eV, 3.59 eV y 4.08 eV.

Elemento	$W(eV)$	$W(J) = W(eV)e$	$\nu_{umb}(Hz) = \dfrac{W(J)}{h}$
Na	2.28	$3.65 \cdot 10^{-19}$	$5.51 \cdot 10^{14}$
Si	3.59	$5.74 \cdot 10^{-19}$	$8.66 \cdot 10^{14}$
Al	4.08	$6.53 \cdot 10^{-19}$	$9.85 \cdot 10^{14}$

Todos los elementos que presentan una ν_{umb} mayor que la frecuencia de la radiación incidente no emitirán fotoelectrones. Por tanto sólo en el sodio se observará la fotoemisión.

Solución: Sólo el sodio

b)

Para el efecto fotoeléctrico $E_{fot} = W + E_{k,e}$ y de aquí despejando la velocidad de los electrones

$$\frac{h \cdot c}{\lambda} = W_{ext} + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 \ , \ \frac{h \cdot c}{\lambda} - W_{ext} = \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 \ , \ v_e = \sqrt{\frac{2\left(\frac{h \cdot c}{\lambda} - W_{ext}\right)}{m_e}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\left(\frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{538 \cdot 10^{-9}} - 3.65 \cdot 10^{-19}\right)}{9.1 \cdot 10^{-31}}} = 1.02 \cdot 10^5 \ m/s$$

Solución: $\boxed{v_e = 1.02 \cdot 10^5 \ m/s}$

c)

Al duplicar la intensidad de la luz no varía la velocidad máxima de los fotoelectrones pero si su número que se duplicará.