PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOE - JUNIO 2012

FÍSICA

INDICACIONES
Elegir una de las dos opciones (1 ó 2).
No deben resolverse cuestiones de opciones diferentes

OPCIÓN DE EXAMEN 1

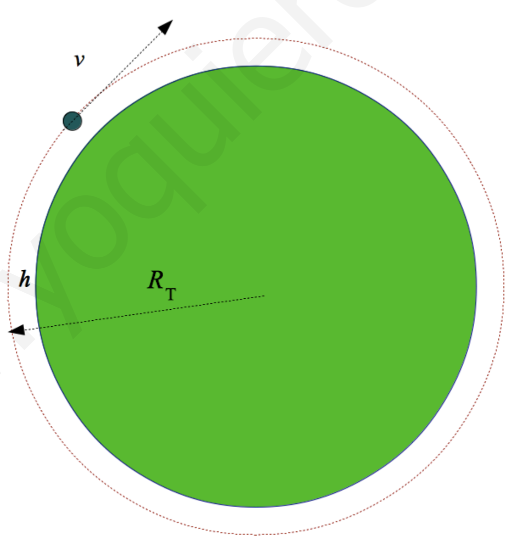
1. Un satélite artificial gira en una órbita circular a una altura de 450 km sobre la superficie terrestre.

   (a) [1,0 PUNTO] Hallar la velocidad del satélite.

   (b) [1,0 PUNTO] Hallar su periodo orbital.

   Datos. Masa de la Tierra: $M_{\mathrm{T}} = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: $R_{\mathrm{T}} = 6\,370$ km.

   Respuesta



En la figura se muestra un esquema del satélite orbitando relativamente cerca de la superficie terrestre.

(a) Velocidad de la órbita. Segunda ley de Newton: fuerza centrípeta igual a fuerza gravitatoria:

$$m\frac{v^2}{d} = G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{d^2}\,,$$

con distancia d al centro de la Tierra:

$$d = R_{\mathrm{T}} + h\,.$$

Ecuación de la velocidad v en función de la distancia:

$$v = \sqrt{G\frac{M_{\mathrm{T}}}{d}}\,.$$

Valores numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{(6370 + 450)10^3}} = 7.6 \cdot 10^3 \ \mathrm{ms}^{-1}\,.$$

$$\boxed{v = 7.6 \cdot 10^3 \ \mathrm{ms}^{-1}\,.}$$

Alternativamente, con la aceleración de la gravedad terrestre g:

$$g = G\frac{M_{\mathrm{T}}}{R_T^2}\,,$$

se tiene:

$$v = \left(\frac{g}{d}\right)^{1/2} R_{\mathrm{T}}\,.$$

Se evita así tener que utilizar la masa de la Tierra y la constante de gravitación universal G. Valores numéricos:

$$v = \left(\frac{9.81}{(6370 + 450)10^3}\right)^{1/2} 6370 \cdot 10^3 = 7.64 \cdot 10^3 \ \mathrm{ms}^{-1}\,.$$

Posible discusión: Esta velocidad es menor que la denominada primera velocidad de escape, $v_1 = 7.9$ km s^{-1}, o velocidad necesaria para que un satélite orbite justo en la superficie de la Tierra. Cuanto mayor es el radio de la órbita, con menor velocidad orbita.

(b) Período de la órbita. Ecuación del período:

$$T = \frac{2\pi d}{v}\,.$$

Valores numéricos:

$$T = \frac{2\pi(6370 + 450)10^3}{7.64 \cdot 10^3} = 5608 \ \mathrm{s}\,.$$

$$\boxed{T = 5608 \ \mathrm{s}\,.}$$

Unas 1.56 horas, unos 93 minutos.

Alternativamente, se puede poner:

$$T = \frac{2\pi d^{3/2}}{g^{1/2} R_{\mathrm{T}}} = \frac{2\pi[(6370 + 450)10^3]^{3/2}}{9.81 \cdot 6370 \cdot 10^3} = 5609 \ \mathrm{s}\,.$$

Alternativamente, aplicando la Tercera ley de Kepler, para la Tierra, con

$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{T_{\rm L}^2}{d_{\rm L}^3}\,,$$

donde $T_{\rm L} = 28$ días es el periodo de la Luna y $d_{\rm L} = 60R_{\rm T}$ su distancia al centro de la Tierra. Con:

$$T = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ dias} \approx 1.60 \text{ horas}\,.$$

$$\boxed{T = 1.60 \text{ horas}\,.}$$

Posible discusión: el tiempo obtenido es aproximadamente el tiempo que tardó Gagarin en dar una vuelta a la Tierra. Muy lejos de los satélites geoestacionarios (a 36.000 km, 24 horas).

1.2. Un foco sonoro emite una onda armónica de amplitud 7.0 Pa y frecuencia 220 Hz. La onda se propaga en la dirección positiva del eje X a una velocidad de 340 m·s^{-1}. En el instante inicial la presión en el mismo foco es máxima.

(a) [1,0 PUNTO] Hallar los valores de los parámetros A, a, b y ϕ en la ecuación

$$P(x,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a} - \frac{t}{b} + \phi\right)$$

de la onda sonora.

(b) [1,0 PUNTO] Hallar la presión en el instante 300 s en un punto situado a una distancia de 2 m del foco.

Respuesta

(a) La ecuación general de la onda es:

$$P(x,t) = A \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T} + \phi\right) .$$

La velocidad de la onda es:

$$v = \lambda f .$$

Comparando la ecuación dada con ésta, se tiene:

$$\begin{aligned}
A &= 7,0 \text{ Pa} , \\
f &= \frac{1}{T} = 220 \text{ Hz} , \\
T &= \frac{1}{f} = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ s} , \\
b &= \frac{T}{2\pi} , \\
v &= \lambda f = 340 \text{ ms}^{-1} , \\
\lambda &= \frac{v}{f} = 1.55 \text{ m} , \\
a &= \frac{\lambda}{2\pi} ,
\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
A &= 7.0 \text{ Pa} , \\
a &= 0.246 \text{ m} , \\
b &= 7.23 \cdot 10^{-4} \text{ s} , \\
\phi &= \frac{\pi}{2} .
\end{aligned}$$

La presión debe ser máxima para $x = 0$ y $t = 0$, por lo que $\operatorname{sen}\phi = 1$, de donde $\phi = \pi/2$. Podría valer poner $\phi = -\pi/2$ si se entiende que es en valor máximo absoluto.

$$\boxed{P(x,t) = 7.0 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{0.246} - \frac{t}{7.23 \cdot 10^{-4}} + \frac{\pi}{2}\right)} .$$

(b) Sustituyendo valores numéricos en la ecuación:

$$P(2, 300) = 7.0\,\text{sen}\left(\frac{2}{0.246} - \frac{300}{7.23 \cdot 10^{-4}} + \frac{\pi}{2}\right) = 3.3 \text{ Pa}\,.$$

$$\boxed{P(2, 300) = 3.3 \text{ Pa}\,.}$$

Posible discusión: el valor obtenido para la presión en un punto debe estar entre 0 y 7.0 Pa.

Se ha detectado que la solución es muy sensible a los valores de los parámetros a y b de la fase, lo que conduce a resultados muy distintos de la presión, pues es de gran importancia el número de dígitos significativos del argumento de la función seno en este caso.
Si se utilizan:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-1} = 0.246 \text{ m}\,, \\ b &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{-1} = 7.2343 \cdot 10^{-4} \text{ s} \end{aligned}$$

la función de onda se puede escribir de dos formas:

$$P(x, t) = 7\text{sen}\left(\frac{22\pi}{17}x - 440\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

y sustituyendo $x = 2$ m y $t = 300$ s, se obtiene la presión -1.92 Pa. La otra forma, introduciendo los valores aproximados de a y b,

$$P(x, t) = 7\text{sen}\left(\frac{x}{0.246} - \frac{t}{7.2343 \cdot 10^{-4}} + \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

la fase en este caso es, para los valores dados, la presión es 4.01 Pa. Es decir, se pueden encontrar problemas de redondeo con las calculadoras. Por tanto, cualquier resultado obtenido por un alumno entre 0 y 7.0 Pa, habiendo sustituido bien en la ecuación, se daraá por correcto.

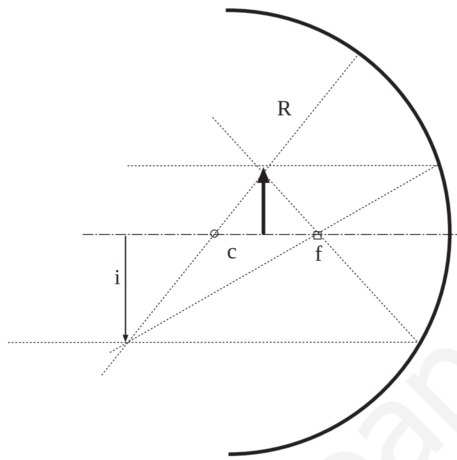
1.3. Un objeto de altura 15 cm se sitúa a una distancia de 0.7 m de un espejo cóncavo de radio 1.0 m.

(a) [1,0 PUNTO] Obtener la imagen del objeto mediante trazado de rayos, indicando el procedimiento seguido.

(b) [0,5 PUNTOS] Indicar si la imagen es real o virtual, derecha o invertida, y mayor o menor que el objeto.

(c) [0,5 PUNTOS] Explicar brevemente qué es la miopía y cómo puede corregirse.

Respuesta



En la figura se muestra un esquema con trazado de rayos para obtener la imagen del objeto. Se ha tenido en cuenta que el foco del espejo está situado a una distancia igual a la mitad de su radio. Se han trazado tres rayos: uno que pasa por el foco, que sale paralelo al eje óptico, otro que pasa por el centro y sale sin desviarse y otro que viene paralelo al eje y sale por el foco. En todos los casos se aplica la primera ley de Snell o de la reflexión. Cualitativamente, la imagen que se obtiene es real (se cruzan rayos), mayor e invertida.

(a) Ecuación del espejo, con su distancia focal $f = R/2$:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}\,.$$

Valores numéricos:

$$\frac{1}{0,7} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{1}\,,$$

obteniéndose:

$$s' = 1,75 \text{ m}\,.$$

$$\boxed{s' = 1.75 \text{ m}\,.}$$

Alternativamente, se puede utilizar la ecuación:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}\,,$$

y obtenerse que

$$s' = -1.75 \text{ m}\,,$$

siempre que se especifique que el signo menos significa que la imagen se encuentra a la izquierda del espejo.

Posible discusión: el resultado está (cualitativamente) de acuerdo con el trazado de rayos de la figura.

(b) La imagen es real (se cruzan rayos reales), invertida y mayor. En espejos:

$$\beta = \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s} = -\frac{1.75}{0.7} = -2.5\,.$$

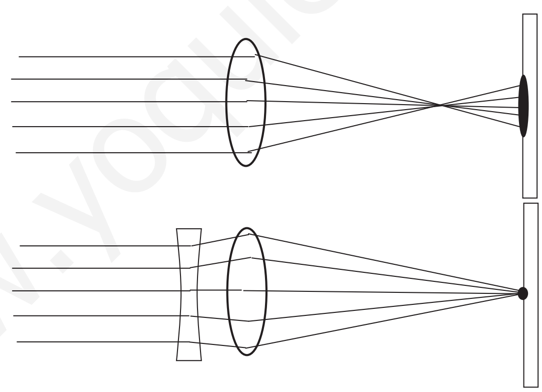
La imagen es 2.5 veces mayor e invertida.

$$\boxed{\beta = -2.5\,.}$$

Posible discusión: el resultado está (cualitativamente) de acuerdo con el trazado de rayos figura.

(c) **Miopía:** el ojo de una persona miope tiene excesiva convergencia y enfoca la luz procedente de los objetos lejanos delante de la retina. Por lo que su punto remoto no está en el infinito y los objetos lejanos se ven borrosos. La miopía se corrige utilizando lentes divergentes, de forma que el foco imagen de la lente coincida con el punto remoto del ojo.

En la miopía los rayos que atraviesan el cristalino se juntan antes de converger en la retina, por lo que por cada punto de la imagen se ve una imagen borrosa. Se corrige colocando una lente divergente delante del ojo, que abre algo los rayos y hace que los rayos se junten en la retina formando ahora una imagen clara.



Posibles esquemas para explicar la miopía, los rayos se focalizan antes de la retina y en ésta se forma una mancha en vez de un punto, y cómo corregirse, mediante una lente divergente que hace que los rayos se focalicen en la retina.

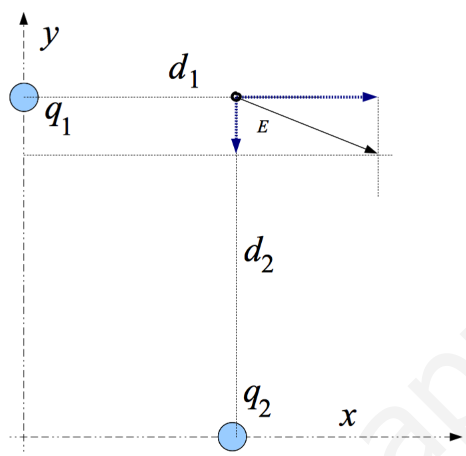
1.4. Una carga puntual de 27 μC se sitúa en el punto (0, 6) de un sistema de referencia (todas las distancias se dan en metros). Otra carga de -9 μC se fija en el punto (3, 0).

(a) [1,0 PUNTO] Dibujar y calcular el vector campo eléctrico creado por ese sistema de cargas en el punto (3, 6).

(b) [1,0 PUNTO] Hallar el potencial eléctrico en el punto (3, 6).

Datos. 1 μC $= 10^{-6}$ C.

Resolución.



En la figura se muestra la disposición de las cargas, sus distancias al punto y una aproximación cualitativa de la fuerzas ejercidas. En su trazado, colocando una carga unidad positiva en el punto (3, 6) se ha tenido en cuenta que las cargas eléctricas del mismo signo se repelen y que las de distinto signo se atraen.

(a) Ecuación de Coulomb. Se aplica el principio de superposición.
Componente X ($q = 1$ C):

$$F_x = k\frac{Q_1 q}{d_1^2} = 9.0 \cdot 10^9 \frac{27 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 27 \cdot 10^3 \text{ N}\,.$$

Componente Y:

$$F_y = -k\frac{Q_2 q}{d_2^2} = 9.0 \cdot 10^9 \frac{-9 \cdot 10^{-6}}{6^2} = -2.25 \cdot 10^3 \text{ N}\,.$$

La fuerza es $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. El vector campo eléctrico en ese punto es:

$$\mathbf{E} = (27 \cdot 10^3, -2.25 \cdot 10^3) \text{ NC}^{-1}\,,$$

con módulo

$$|\mathbf{E}| = 27.0 \cdot 10^3 \text{ NC}^{-1}\,.$$

$$\boxed{\mathbf{E} = (27.0 \cdot 10^3, -2.25 \cdot 10^3) \text{ NC}^{-1}\,.}$$

(b) Por el principio de superposición, el potencial es el punto dado es:

$$V = k\frac{Q_1}{d_1} + k\frac{Q_2}{d_2}\,.$$

Valores numéricos:

$$V = 9.0 \cdot 10^9 \frac{27 \cdot 10^{-6}}{3} + 9.0 \cdot 10^9 \frac{-9 \cdot 10^{-6}}{6} = 6.75 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}\,.$$

$$\boxed{V = 6.75 \cdot 10^4 \text{ V}\,.}$$

Posible discusión: este potencial es positivo (ha habido que realizar trabajo para llevar una carga unidad positiva desde el infinito hasta ese punto) debido a la mayor influencia de la carga positiva, que repela la carga de prueba más de lo que la atrae la negativa.

1.5. Se emite un electrón cuando luz ultravioleta de longitud de onda 170 nm incide sobre una superficie pulida de zinc cuya función de trabajo es 4.31 eV.

(a) [1 PUNTO] Hallar la velocidad del electrón emitido.

(b) [0,5 PUNTOS] Hallar la distancia recorrida por el electrón si es sometido a un campo eléctrico de 10^4 NC^{-1} que lo va frenando.

(c) [0,5 PUNTOS] Describir el concepto de frecuencia umbral y su relación con la hipótesis de Planck.

Datos. $1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}$ J; $1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}$ m.

Resolución.

(a) Ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v^2 = h\nu - \Phi \,,$$

con la frecuencia:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{170 \cdot 10^{-9}} = 1.76 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}\,.$$

Ecuación de la velocidad del electrón

$$v^2 = \frac{2(hc/\lambda - \Phi)}{m_{\mathrm{e}}}\,.$$

Valores numéricos:

$$v^2 = \frac{2(6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 1.76 \cdot 10^{15} - 4.31 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19})}{9.1 \cdot 10^{-31}} = 1.04 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m^2 s^{-2}}$$

$$v = 1.02 \cdot 10^6\ \mathrm{ms^{-1}}\,.$$

$$\boxed{v = 1.02 \cdot 10^6\ \mathrm{ms^{-1}}\,.}$$

Alternativamente:

$$E_{\mathrm{C}} = h\nu - \Phi = 4.72 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\,,$$

y

$$v = \left(\frac{2E_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{e}}}\right)^{1/2} = 1.02 \cdot 10^6\ \mathrm{ms^{-1}}\,.$$

Posible discusión: se obtiene una velocidad mucho menor que la de la luz $3 \cdot 10^8$ $\mathrm{ms^{-1}}$.

(b) Por el teorema trabajo-energía o de las fuerzas vivas $W = \Delta E_{\mathrm{C}}$:

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v^2 = eEd\,.$$

Alternativamente:

$$E_{\mathrm{C}} = eEd\,,$$

Ecuación de la distancia recorrida por el electrón:

$$d = \frac{m_{\mathrm{e}} v^2}{2eE}\,.$$

$$d = \frac{h\nu - \Phi}{eE} \,.$$

Valores numéricos:

$$d = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.037 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} 10^{4}} = 6.8 \cdot 10^{-3} \text{ m} \,.$$

$$\boxed{d = 2.96 \cdot 10^{-4} \text{ m} \,.}$$

Alternativamente, se puede hacer: Aceleración constante:

$$a = -\frac{q_{\mathrm{e}} E}{m_{\mathrm{e}}} = -1.75 \cdot 10^{15} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \,,$$

y con la ecuación de la distancia recorrida hasta pararse:

$$d = \frac{v_i^2}{2a} = 2.96 \cdot 10^{-4} \text{ m} \,.$$

(c) En el efecto fotoeléctrico, para cada metal existe una frecuencia luminosa umbral, f_0, por debajo de la cual no se produce la emisión fotoeléctrica, sea cual sea la intensidad de la luz o radiación incidente. Einstein propuso que en el efecto fotoeléctrico la radiación electromagnética en su interacción con los electrones de la materia se comporta en la forma propuesta por Planck para los osciladores atómicos en relación con la radiación del cuerpo negro, de tal manera que la energía no se absorbe de forma uniforme sino de forma cuantizada.

Para un cierto metal, su función trabajo es $\Phi = h\nu_{\mathrm{u}}$, donde ν_{u} es su frecuencia umbral. Cuando el metal es iluminado con luz de menor frecuencia, no surgen electrones del metal, con independencia de la intensidad de la luz incidente. A partir de esa frecuencia de iluminación, surgen electrones con velocidad al cuadrado proporcional a la diferencia entre la frecuencia de iluminación y la umbral. Se trata de un fenómeno cuántico (relación con la hipótesis de Planck); es decir, los electrones en la materia, como si fueran osciladores cuánticos, no pueden acumular energía de forma continua, sólo discreta.

Pruebas de Acceso a la Universidad

LOE - JUNIO 2012

FÍSICA

INDICACIONES

Elegir una de las dos opciones (1 ó 2).
No deben resolverse cuestiones de opciones diferentes

OPCIÓN DE EXAMEN 2

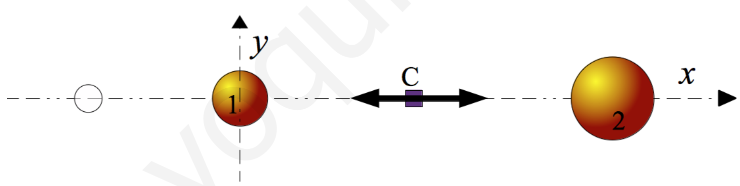
2.1. Dos cuerpos, 1 y 2, de masas 2000 kg y 5000 kg, respectivamente, se encuentran fijos y situados a una distancia de 100 m uno del otro. El cuerpo 1 se encuentra en el origen de coordenadas y el cuerpo 2 se encuentra a su derecha.

(a) [1,0 PUNTO] Dibujar y hallar el valor del campo gravitatorio en el punto medio C entre ambos.

(b) [0,5 PUNTOS] Hallar el potencial gravitatorio en dicho punto C.

(c) [0,5 PUNTOS] Hallar el trabajo necesario para llevar una masa de 1 kg desde el punto C hasta una distancia de 40 m a la izquierda del cuerpo 1.

Resolución



En la figura se muestra un esquema cualitativo del sistema de masas y de las fuerzas que intervienen. Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas.

(a) Ley de gravitación universal. Principio de superposición:

$$F = -G\frac{M_1 \cdot 1}{d_1^2} + G\frac{M_2 \cdot 1}{d_2^2}\,,$$

con distancias $d_1 = 50$ m y $d_2 = 50$ m. Valores numéricos:

$$F = 6.67 \cdot 10^{-11}\left[-\frac{2000}{50^2} + \frac{5000}{50^2}\right] = 8.004 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}\,.$$

El campo resultante es:

$$g = \frac{F}{1}\,.$$

$$\boxed{g = 8.0 \cdot 10^{-11} \ \mathrm{Nkg}^{-1}\,.}$$

$$\boxed{\mathbf{g} = (8.0 \cdot 10^{-11}, 0) \ \mathrm{Nkg}^{-1}\,.}$$

(b) Para el campo gravitatorio creado, el potencial es:

$$V = -G\left[\frac{M_1}{d_1} + \frac{M_2}{d_1}\right]\,.$$

Valores numéricos:

$$V = -6.7 \cdot 10^{-11}\left[\frac{2000}{50} + \frac{5000}{50}\right] = -9.38 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{Jkg}^{-1}\,.$$

$$\boxed{V = -9.38 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1}\,.}$$

Posible discusión: para un campo gravitatorio el potencial en un punto es siempre negativo, pues un agente externo obtendría un cierto trabajo se una masa se transportara desde el infinito hasta ese punto. Un agente externo debe realizar un trabajo positivo sobre un cuerpo para enviar el cuerpo desde un cierto punto hasta el infinito.

(c) En un campo conservativo como el gravitatorio, el trabajo a realizar por un agente externo necesario para llevar una masa de un punto inicial a otro final es:

$$W = -m(V_f - V_i)\,.$$

Como potencial gravitatorio V_f se tiene:

$$V_f = -6.7 \cdot 10^{-11}\left[\frac{2000}{40} + \frac{5000}{140}\right] = -5.74 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{Jkg}^{-1}\,.$$

Y

$$W = -1(-5.74 + 9.38)10^{-9} = 3.64 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{J}\,.$$

$$\boxed{W = -3.64 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{J}\,.}$$

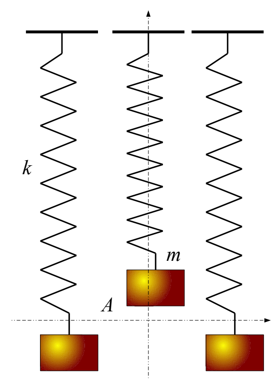
Posible discusión: el trabajo obtenido es negativo debido a que un agente externo debe realizar un trabajo sobre un cuerpo situado en C, con mayor interacción gravitatoria con las masas, para llevarlo hasta el punto final, con menor interacción gravitatoria con las masas. Es semejante a cuando hay que llevar un cuerpo desde cerca de la superficie terrestre hasta el infinito, que hay que realizar un trabajo (negativo) sobre el cuerpo por parte de un agente externo para conseguirlo.

2.2. Un sistema elástico, constituido por un cuerpo de masa 800 g unido a un muelle, realiza un movimiento armónico simple con un periodo de 0.60 s. La energía total del sistema es de 25 J.

(a) [1,0 PUNTO] Hallar la constante elástica del muelle.

(b) [0,5 PUNTOS] Hallar la amplitud de esta oscilación.

(c) [0,5 PUNTOS] Explicar brevemente los intercambios de energía que tienen lugar entre muelle y masa a lo largo de una oscilación.



En la figura se muestra una oscilación típica de este tipo de sistemas oscilantes masa-muelle. Con el muelle extendido, o comprimido, al máximo, la energía cinética es cero y la energía elástica es máxima, igual a la energía total. Con el muelle en su longitud en ausencia de tensión, la energía cinética es máxima e igual a la energía total y la energía elástica es cero.

Resolución

(a) Ecuación del período de un sistema oscilante masa-muelle:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Ecuación de la constante:

$$k = 4\pi^2\frac{m}{T^2}\,.$$

Valores numéricos:

$$k = 4\pi^2\frac{0.80}{0.6^2} = 87.6\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.$$

$$\boxed{k = 87.6\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.}$$

(b) Ecuación de la energía total en función del muelle: la energía es igual a la energía elástica en la posición de máxima elongación:

$$E = \frac{1}{2}kA^2\,.$$

Para la amplitud se tiene:

$$A^2 = \frac{2E}{k}\,.$$

Valores numéricos:

$$A^2 = \frac{2 \cdot 25}{87.6} = 0.38 \text{ m}^2 .$$

$$A = 0.75 \text{ m} .$$

$$\boxed{A = 0.75 \text{ m} .}$$

(c) La energía cinética es máxima en el centro de la vibración e igual a cero en los extremos. La energía potencial elástica es máxima en los extremos de la vibración e igual a cero en el centro de la misma.

En el proceso de oscilación (sin gravedad), hay una transformación oscilante entre la energía total en forma de energía potencial elástica, cuando el muelle se encuentra extendido, o comprimido, al máximo, con el bloque con cero energía cinética, y la energía total en forma de energía cinética del bloque, cuando pasa por la posición en que el muelle tiene su longitud en ausencia de tensión, que tiene su máxima velocidad. La energía total va pasando de una a otra forma de manera oscilatoria.

Posible discusión: ecuación de la posición:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \, ; \omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

ecuación de la velocidad:

$$v(t) = -A\omega \text{sen}(\omega t) ,$$

Posible discusión: se puede obtener la velocidad máxima del bloque haciendo:

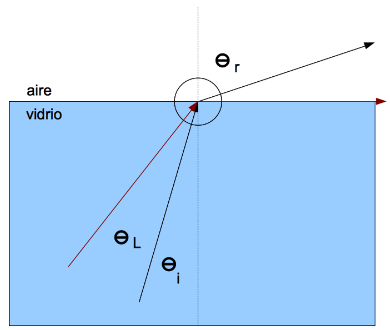
$$E = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} k A^2 .$$

2.3. Un rayo de luz de longitud de onda 550 nm que se mueve en un vidrio de índice de refracción $1,55$ para esa longitud de onda, alcanza la superficie de separación entre el vidrio y el aire, incidiendo con un ángulo de $15°$ respecto a la normal a dicha superficie.

(a) [1 PUNTO] Dibujar un esquema del proceso descrito y hallar el ángulo de refracción que experimenta el rayo.

(b) [1 PUNTO] Hallar el ángulo límite para reflexión total en ese vidrio.

Resolución.



En la figura se muestra un esquema del proceso en el que un rayo de luz incide desde el interior de un vidrio sobre la superficie de separación entre éste y el aire, dando lugar a un rayo refractado. El ángulo límite es aquel en el que el rayo refractado sale perpendicular a la normal de la superficie de separación entre medios.

(a) Segunda Ley de Snell o de la refracción:

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_r\,.$$

Valores numéricos:

$$1.55 \operatorname{sen} 15° = 1.0 \operatorname{sen}\theta_r\,.$$

$$\theta_r = 23.65°\,.$$

$$\boxed{\theta_r = 23.65°\,.}$$

Posible discusión: el ángulo de refracción se aleja de la normal, pues se pasa de un medio de mayor índice de refracción a un medio de menor índice.

(b) Condición de ángulo límite:

$$1.55 \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{L}} = 1.0\,.$$

Para los datos dados se obtiene el valor numérico

$$\theta_{\mathrm{L}} = 40.2°\,.$$

$$\boxed{\theta_{\mathrm{L}} = 40.2°\,.}$$

2.4. Un campo magnético espacialmente uniforme y que varía con el tiempo según la expresión

$$B(t) = 0,7\,\mathrm{sen}\,(6t)\,,$$

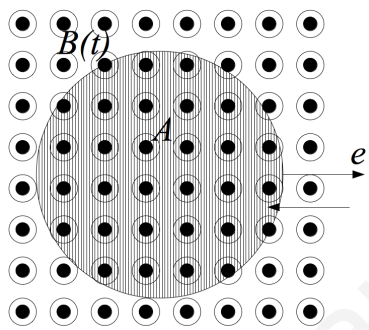
(en unidades del SI, T) atraviesa perpendicularmente una espira circular de radio 20 cm.

(a) [0,5 PUNTOS] Hallar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

(b) [1,0 PUNTO] Hallar la fuerza electromotriz máxima.

(c) [0,5 PUNTOS] Describa los fundamentos de la obtención de energía eléctrica mediante el principio de inducción de Faraday.

Resolución.



En la figura se muestra un esquema de un campo magnético atravesando el área de una espira circular. El campo debe variar en el tiempo si se quiere que circule corriente por una espira estática.

(a) Flujo magnético:

$$\Phi(t) = AB(T)\,,$$

donde $A = \pi r^2$ es la sección de la espira. Sustituyendo los valores numéricos:

$$\Phi(t) = \pi\, 0.20^2 \cdot 0.7\,\mathrm{sen}\,(6t) = 8.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{sen}\,(6t)\,.$$

$$\boxed{\Phi(t) = 8.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{sen}\,(6t)\ \mathrm{Wb}\,.}$$

(b) Ecuación de la fuerza electromotriz o principio de inducción de Faraday:

$$\epsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -8.8 \cdot 10^{-2} \cdot 6\cos(6t)\,.$$

Valores numéricos:

$$\epsilon = 5.3 \cdot 10^{-1}\cos(6t)\,.$$

El máximo valor se obtiene cuando $\cos(6t) = 1$,

$$\epsilon_{\mathrm{max}} = 5.3 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{V}\,.$$

$$\boxed{\epsilon_{\mathrm{max}} = 5.3 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{V}\,.}$$

(c) El valor de la fuerza electromotriz inducida es igual a la rapidez con la que varía el flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito, independientemente de las causas que provoque esa variación del flujo.

El principio de inducción de Faraday establece que sólo un flujo magnético variable en el tiempo es capaz de generar corriente eléctrica en el circuito que atraviesa, que puede estar formado por una o por varias espiras:

$$\epsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

El signo menos indica que el campo magnético que genera la corriente inducida se opone a la variación del campo magnético que la genera (Ley de Lenz). Por tanto, o bien la espira se mantiene en movimiento, por ejemplo, haciéndola girar en un campo magnético estático, o bien la espira permanece en reposo mientras se hace variar el campo magnético.

2.5. Una roca contiene dos tipos de átomos radiactivos A (Radio 226) y B (Carbono 14) de período de semidesintegración $t_{1/2}^{(\mathrm{A})} = 1602$ años y $t_{1/2}^{(\mathrm{B})} = 5760$ años, respectivamente. Cuando la roca se formó, su contenido en A y en B era prácticamente el mismo, $N_0 = 10^{15}$ núcleos de cada tipo de átomo.

(a) [1,0 PUNTO] ¿Qué tipo de átomo tenía una actividad mayor en el momento de su formación?

(b) [1,0 PUNTO] ¿Cuál será la razón entre el número de átomos A y B todavía existentes en la roca 3000 años después de su formación.

Resolución.

(a) Ecuación de la desintegración:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\lambda t\right) \, ,$$

donde la constante de desintegración es

$$\lambda = \frac{0.69}{t_{1/2}} \, .$$

Posible discusión: esta ecuación corresponde a una sucesión de procesos aleatorios iguales e independientes.

La actividad $A = |\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t|$, a tiempo $t = 0$, es:

$$A = \left| \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} \right| = \lambda N_0 \, .$$

Así:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{A}} &= \frac{0.69}{t_{1/2}^{(\mathrm{A})}} = \frac{0,69 N_0}{1602} \, , \\ A_{\mathrm{B}} &= \frac{0.69}{t_{1/2}^{(\mathrm{B})}} = \frac{0,69 N_0}{5760} \, . \end{aligned}$$

$$r = \frac{A_{\mathrm{A}}}{A_{\mathrm{B}}} = 3.59 \, .$$

$$\boxed{r = 3.59 \, .}$$

Posible discusión: tiene mayor actividad el núcleo A, pues es el que tiene mayor constante de desintegración o menor período de semidesintegración.

(b) Al cabo de 3000 años:

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{A}}(3000) &= N_0 \exp\left(-\frac{0.69}{1602} 3000\right) = 0.27 N_0 \, , \\ N_{\mathrm{B}}(3000) &= N_0 \exp\left(-\frac{0.69}{5760} 3000\right) = 0.70 N_0 \, . \end{aligned}$$

$$\frac{N_{\mathrm{A}}(3000)}{N_{\mathrm{B}}(3000)} = 0,39 \, .$$

$$\boxed{\frac{N_{\mathrm{A}}(3000)}{N_{\mathrm{B}}(3000)} = 0.39\,.}$$

Posible discusión: al cabo de cierto tiempo quedan menos núcleos sin desintegrar de aquel átomo que tiene mayor actividad o menor período de semidesintegración. Como $3000 \approx 1600 \times 2$, la fracción de A que queda es del orden del 0.25. Como $3000 \approx 5760/2$, la fracción que queda de B es aproximadamente del 0.75. La razón está proxima a 1/3.

Este examen se ha resuelto a título informativo, intentando considerar todas las posibles opciones de resolución de un mismo problema. Naturalmente, con cualquiera de ellas el examinando podrá obtener la máxima calificación.

Las respuestas no son muy extensas, pues no se pretende que los examinandos elaboren demasiado el texto de la resolución de problemas.

Además de las constantes y datos proporcionados en el examen, los alumnos pueden utilizar todos aquellos datos correctos que consideren oportunos.

Las respuestas de los apartados teóricos se han tomado de libros de texto y se espera que los alumnos expliquen estos apartados teóricos tal y como vienen en los libros de texto, aunque, en su caso, se valorará que lo hagan con sus propias palabras.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

- Se calificará con la máxima puntuación posible cada apartado que haya sido resuelto aplicándose la ecuación correcta (citada de memoria o deducida de otras anteriores) y en el que se haya obtenido el resultado numérico correcto junto, en su caso, con las unidades correctas, de la magnitud solicitada.

- Las unidades supondrán el 10% del valor del apartado. Se calificará con un 90% de la máxima puntuación posible cada apartado que haya sido resuelto aplicándose la ecuación correcta (citada de memoria o deducida de otras anteriores), en el que se haya obtenido el resultado numérico correcto pero que, en su caso, las unidades no sean las correctas o estén ausentes.

- El planteamiento del problema tendrá mayor peso en la calificación que los cálculos numéricos. Se calificará con un 75% de la máxima puntuación posible cada apartado que haya sido resuelto aplicándose la ecuación correcta (citada de memoria o deducida de otras anteriores) y en el que no se haya obtenido el resultado numérico correcto.

- Cuando en un apartado no se haya obtenido la máxima puntuación posible se valorará (sin poder alcanzarse la máxima puntuación posible), hasta un máximo del 50% de la máxima puntuación posible, que las ecuaciones se planteen correctamente, se citen correctamente con sus nombres, las gráficas pertinentes, métodos alternativos de resolución del problema, y cualquier discusión correcta conceptual sobre los resultados obtenidos.

- En los apartados de carácter teórico se calificará con la máxima puntuación una descripción semejante a la que aparezca en los libros de texto. Se valorará el uso de un lenguaje técnico en la descripción teórica solicitada.

- Se calificará cada apartado aunque no se hayan resuelto los anteriores. Se valorará, con hasta un 90% de la máxima calificación del apartado, el uso correcto de ecuaciones pero con parámetros incorrectos provenientes de apartados anteriores (con el 100% en caso de resultados numéricos intrascendentes).