GRAVITACIÓN (RESUELTOS)

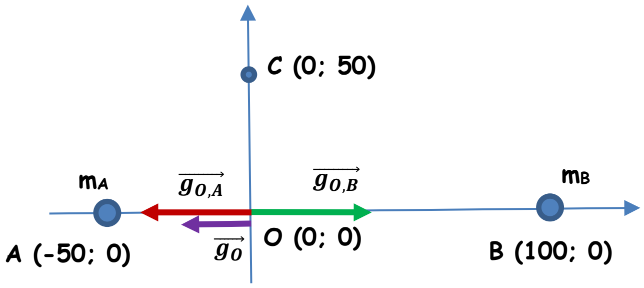
CONSTANTES FÍSICAS			
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3.0\ 10^{8}$ m s^{-1}	Masa del protón	$m_{p+} = 1.7\ 10^{-27}$ kg
Constante de gravitación universal	$G = 6.7\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}	Masa del electrón	$m_{e-} = 9.1\ 10^{-31}$ kg
Constante de Coulomb	$k = 9.0\ 10^{9}$ N m^2 C^{-2}	Carga del protón	$q_{p+} = 1.6\ 10^{-19}$ C
Constante de Planck	$h = 6.6\ 10^{-34}$ J s	Carga del electrón	$q_{e-} = -1.6\ 10^{-19}$ C
Radio de la Tierra	$R_T = 6370$ km	Masa de la Tierra	$M_T = 5.97{\cdot}10^{24}$ kg

Nota: estas constantes se facilitan a título informativo.

JULIO 2021

Un cuerpo de masa $2{\cdot}10^{10}$ kg se encuentra fijado en el punto (–50, 0) de un cierto sistema de referencia. Otro cuerpo de masa $3{\cdot}10^{10}$ kg se encuentra fijado en el punto (100, 0). Todas las distancias se dan en metros.

a) **(1 p)** Calcular y representar gráficamente el vector campo gravitatorio debido a los dos cuerpos en el punto (0,0).



$$r_{A,O} = 50\ m; \quad r_{B,O} = 100\ m$$

$$r_{A,C} = \sqrt{50^2 + 50^2} = \sqrt{5000}\ m$$

$$r_{A,C} = \sqrt{100^2 + 50^2} = \sqrt{12500}\ m$$

$$\overrightarrow{g_O} = \overrightarrow{g_{O,A}} + \overrightarrow{g_{O,B}} = G \cdot \left[-\frac{m_A}{(r_{A,O})^2} + \frac{m_B}{(r_{B,O})^2} \right] \cdot \vec{\imath} = 6,67.10^{-11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot 10^{10}}{(50)^2} + \frac{3 \cdot 10^{10}}{(100)^2} \right] \cdot \vec{\imath} = -3,34.10^{-4}\ \vec{\imath}\ N/kg$$

b) **(1 p)** Calcular el potencial gravitatorio debido a los dos cuerpos en los puntos (0, 0) y (0, 50).

$$V_O = V_{O,A} + V_{O,B} = -G \cdot \left[\frac{m_A}{r_{A,O}} + \frac{m_B}{r_{B,O}} \right] = -6,67.10^{-11} \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^{10}}{50} + \frac{3 \cdot 10^{10}}{100} \right] = -0,047\ J/kg$$

$$V_C = V_{C,A} + V_{C,B} = -G \cdot \left[\frac{m_A}{r_{A,C}} + \frac{m_B}{r_{B,C}} \right] = -6,67.10^{-11} \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^{10}}{\sqrt{5000}} + \frac{3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{12500}} \right] = -0,037\ J/kg$$

c) **(0,5 p)** Calcular el trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre una masa de 10 kg cuando se desplaza desde el punto (0, 0) hasta el punto (0, 50).

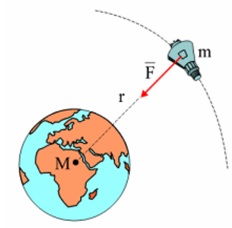
$$W_{O \to C} = -\Delta E_p = -m \cdot (V_C - V_O) = m \cdot (V_O - V_C) = 10 \cdot \big(-0,047 - (-0,037)\big) = -0,1\ J$$

El trabajo negativo significa que el proceso no es espontáneo, por lo que es necesaria una fuerza externa para realizar el traslado. El resultado es lógico, ya que estamos alejando la masa de 10 kg de las otras dos y la fuerza gravitatoria es siempre atractiva.

JULIO 2021

Un satélite natural, de $8 \cdot 10^{10}$ kg de masa, gira en una órbita circular a una altura de 800 km sobre la superficie de un cierto planeta P, cuyos datos se proporcionan debajo.

DATOS: Masa del planeta P: $M_P = 5 \cdot 10^{25}$ kg
Radio del planeta P: $R_P = 2 \cdot 10^4$ km



a) **(1 p)** Hallar el periodo orbital del satélite.

La fuerza gravitatoria del planeta actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite:

$$F_G = m \cdot a_n \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{(v_{orb})^2}{r}$$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \cdot 5.10^{25}}{(800 + 2.10^4).10^3}} = 12662,4 \ m/s$$

Como el satélite se mueve con movimiento circular uniforme:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{orb}} = \frac{2\pi \cdot (800 + 2.10^4).10^3}{12662,4} = 10321 \ s \cong 2,87 \ h$$

b) **(0,75 p)** Hallar la energía total del satélite.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_{orb})^2 = \frac{1}{2} \cdot 8.10^{10} \cdot (12662,4)^2 = 6,4.10^{18} \ J$$

$$E_p = -G.\frac{M \cdot m}{r} = -6,67.10^{-11}.\frac{5.10^{25} \cdot 8.10^{10}}{(800 + 2.10^4).10^3} = -1,3 \cdot 10^{19} \ J$$

$$E_m = E_c + E_p = 6,4.10^{18} + (-1,33 \cdot 10^{19}) = -6,6.10^{18} \ J$$

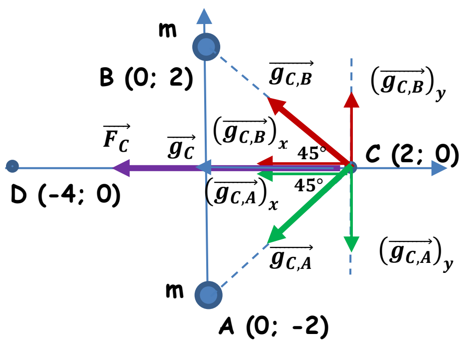
c) **(0,75 p)** Hallar el valor del campo gravitatorio en la superficie del planeta.

$$g_{0,P} = G \cdot \frac{M}{R^2} = 6,67.10^{-11} \cdot \frac{5.10^{25}}{(2.10^7)^2} = 8,34 \ m/s^2$$

JUNIO 2021

Ejercicio 5. **[2,5 PUNTOS]** Dos masas idénticas de 1000 kg de masa, están situadas en los puntos (0; -2) y (0; 2). Todas las distancias se dan en metros.

a) **(1 p)** Calcular y representar gráficamente el vector campo gravitatorio en el punto (2; 0), así como la fuerza gravitatoria que experimenta una masa de 10 kg situada en ese punto.



$$r_{A,C} = r_{B,C} = \sqrt{8} \ m$$

$$r_{A,D} = r_{B,D} = \sqrt{20} \ m$$

Se da una situación de simetría, ya que las masas situadas en A y B son iguales y, además, se encuentran a la misma distancia del punto C. Esto hace que se anulen las componentes verticales y que las dos componentes horizontales sean iguales.

$$\overrightarrow{g_C} = \overrightarrow{g_{C,A}} + \overrightarrow{g_{C,B}} = 2 \cdot (\overrightarrow{g_{C,A}})_x = -2 \cdot G \cdot \frac{m}{(r_{A,C})^2} \cdot \cos 45° \ \vec{\imath} \ N/kg$$

$$\overrightarrow{g_C} = -2 \cdot 6,67.10^{-11} \cdot \frac{1000}{8} \cdot \cos 45° \ \vec{\imath} = -1,18.10^{-8} \ \vec{\imath} \ N/kg$$

$$\vec{F_C} = m \cdot \vec{g_C} = 10 \cdot (-1,18.10^{-8}\,\vec{i}) = -1,18.10^{-7}\,\vec{i}\ N$$

b) **(1 p)** Calcular el potencial gravitatorio en los puntos (2; 0) y (-4; 0) debido a las dos masas de 1000 kg.

Por simetría, los potenciales que crean ambas masas en los dos puntos son iguales.

$$V_C = V_{C,A} + V_{C,B} = 2 \cdot V_{C,A} = -2 \cdot G \cdot \frac{m}{r_{A,C}} = -2 \cdot 6,67.10^{-11} \cdot \frac{1000}{\sqrt{8}} = -4,72.10^{8}\ J/kg$$

$$V_D = V_{D,A} + V_{D,B} = 2 \cdot V_{D,A} = -2 \cdot G \cdot \frac{m}{r_{A,D}} = -2 \cdot 6,67.10^{-11} \cdot \frac{1000}{\sqrt{20}} = -2,98.10^{8}\ J/kg$$

c) **(0,5 p)** Calcular el trabajo realizado por el campo gravitatorio para sobre una masa de 2 kg cuando se desplaza del punto (2; 0) hasta el punto (-4; 0).

$$W_{C\to D} = -\Delta E_p = -m \cdot (V_D - V_C) = m \cdot (V_C - V_D) = 2 \cdot \left(-4,72.10^{8} - (-2,98.10^{8})\right) = -3,48.10^{8}\ J$$

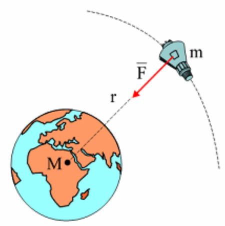
El trabajo negativo significa que el proceso no es espontáneo, por lo que es necesaria una fuerza externa para realizar el traslado. El resultado es lógico, ya que estamos alejando la masa de 2 kg de las otras dos y la fuerza gravitatoria es siempre atractiva.

JUNIO 2021

Un pequeño satélite, de 1500 kg de masa, describe una órbita circular alrededor de Marte, a una altura de 5000 km sobre su superficie.

DATOS: Masa de Marte: $M_M = 6,4.10^{23}$ kg Radio de Marte: $R_M = 3390$ km

a) **(1 p)** Calcular el período del movimiento del satélite.



La fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite:

$$F_G = m \cdot a_n \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{(v_{orb})^2}{r}$$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \cdot 6,4.10^{23}}{(3390 + 5000).10^{3}}} = 2255,6\ m/s$$

Como el satélite se mueve con movimiento circular uniforme:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{orb}} = \frac{2\pi \cdot (3390 + 5000).10^{3}}{2255,6} = 23371\ s \cong 6,5\ h$$

b) **(0,75 p)** Calcular la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la energía total del satélite.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_{orb})^2 = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot (2255,6)^2 = 3,82.10^{9}\ J$$

$$E_p = -G.\frac{M \cdot m}{r} = -6,67.10^{-11}.\frac{6,4.10^{23} \cdot 1500}{(3390 + 5000).10^{3}} = -7,63 \cdot 10^{9}\ J$$

$$E_m = E_c + E_p = 3,82.10^{9} + (-7,63 \cdot 10^{9}) = -3,82.10^{9}\ J$$

c) **(0,75 p)** ¿Cuánto pesaría el satélite en la superficie de Marte? ¿Y en la superficie de la Tierra?

Calculamos la gravedad en la superficie de Marte:

$$g_{0,M} = G \cdot \frac{M}{R^2} = 6,67.10^{-11} \cdot \frac{6,4.10^{23}}{(3,39.10^{6})^2} = 3,7\ m/s^2$$

El peso del satélite en la superficie de Marte es:

$$P_{0,M} = m \cdot g_{0,M} = 1500 \cdot 3,7 = 5550\ N$$

Calculamos la gravedad en la superficie de la Tierra, utilizando los datos de la tabla de constantes:

$$g_{0,T} = G \cdot \frac{M_T}{(R_T)^2} = 6,67.10^{-11} \cdot \frac{6.10^{24}}{(6,37.10^6)^2} = 9,86\ m/s^2$$

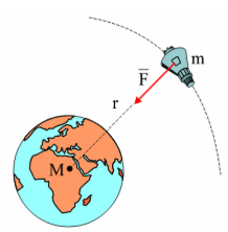
De modo que el peso del satélite en la superficie de la Tierra es:

$$P_{0,T} = m \cdot g_{0,T} = 1500 \cdot 9,86 = 14790\ N$$

SEPTIEMBRE 2020

Determinar para un satélite artificial de masa 500 kg que rodea la Tierra en una órbita circular a $0,30.10^6$ m de la superficie del planeta. Determinar:

a) **(1 p)** El valor de la velocidad, así como el tiempo que tarda en realizar una órbita.



La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{r^2} = m\,.\,\frac{v_O^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_O = \sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,7.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}}{(6.37.10^6 + 0,3.10^6)}} = 7744\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi\,.\,r}{v_0} = \frac{2\pi\,.\,(6.37.10^6 + 0,3.10^6)}{7744} = 5411,8\,s \cong 1,5\ h$$

b) **(0,5 p)** La aceleración en la órbita.

El satélite describe una órbita circula con velocidad constante, por lo que tiene aceleración normal o centrípeta:

$$a_n = \frac{v_O^2}{r} = \frac{(7744)^2}{(6.37.10^6 + 0,3.10^6)} = 9\ m/s^2$$

También se podría haber calculado la intensidad de campo a la altura de la órbita.

c) **(1 p)** La energía mecánica del satélite en órbita y el trabajo que se requiere para poner el satélite en esa órbita.

La energía mecánica del satélite, también conocida como energía de enlace, es la suma de las energías cinética y potencial que tiene el satélite en su órbita.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,(v_O)^2 + \left[\frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{r}\right] = \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,\left(\sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{r}}\right)^2 + \left[\frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{r}\right] = -\frac{1}{2}\,.\,G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{r}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\,.\,G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{r} = -\frac{1}{2}\,.\,6,7.10^{-11}\,.\,\frac{5,97.10^{24}\,.\,500}{(6.37.10^6 + 0,3.10^6)} = -1,5.10^{10}\ J$$

Antes del lanzamiento el satélite solo posee energía potencial gravitatoria, sin embargo, cuando se mueve en su órbita tiene tanto energía potencial como energía cinética, cuya suma recibe el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace. El trabajo necesario para poner el satélite en órbita es la diferencia entre la energía de enlace y la energía potencial en la superficie.

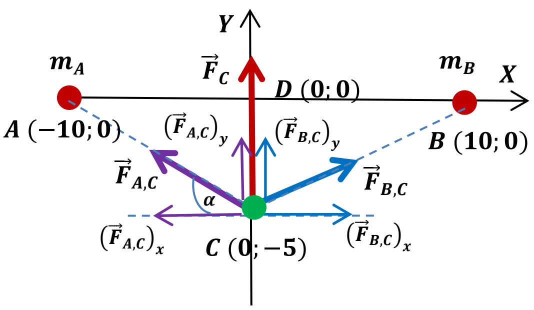
$$W = E_{enlace} - E_{p,superficie} = -\frac{1}{2}\,.\,G\,.\,\frac{m\,.\,M_T}{r} - \left(-G\,.\,\frac{m\,.\,M_T}{R_T}\right) = G\,.\,m\,.\,M_T\,.\,\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

$$W = 6,7.10^{-11}\,.\,500\,.\,5,97.10^{24}\,.\,\left(\frac{1}{6,37.10^6} - \frac{1}{2\,.\,(6.37.10^6 + 0,3.10^6)}\right) = 1,64.10^{10}\ J$$

SEPTIEMBRE 2020

Dos masas de 5 kg se hallan situadas en los puntos (-10, 0) y (10, 0) respectivamente. Nota: todas las distancias expresadas en metros.

a) **(1 p)** Calcula y representa la fuerza que experimenta una masa de 2 kg, situada en el punto (0, -5).



$$r_{AC} = r_{BC} = \sqrt{(10)^2 + (5)^2} = \sqrt{125}\ m$$

$$\alpha = arctg\frac{5}{10} = 26,56°$$

Como las masas situadas en los puntos A y B son iguales y la distancia de ambas masas al punto C también son iguales, los módulos de fuerzas ejercidas por ambas masas son iguales. Por simetría las dos componentes horizontales de ambas fuerzas son iguales y de sentido contrario, por lo que se anulan entre sí. Las dos componentes verticales son iguales y su suma nos da la fuerza total sobre la masa situada en el punto C.

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{A,C} + \vec{F}_{B,C} = (\vec{F}_{A,C})_y + (\vec{F}_{B,C})_y = 2\ .\ (\vec{F}_{A,C})_y = 2\ .\ G\ .\frac{m_A\ .\ m_C}{(r_{AC})^2}\ .\ sen\ 26,56°\ \vec{j}$$

$$\vec{F}_C = 2\ .\ 6,7.10^{-11}\ .\ \frac{5\ .\ 2}{125}\ .\ sen\ 26,56°\ \vec{j} = 4,79.10^{-12}\ \vec{j}\ \ N$$

b) **(1,5 p)** Expresa correctamente el potencial en los puntos (0, -5) y (0, 0) debido a las dos masas. Calcula el trabajo realizado por la gravedad para llevar una masa de 2 kg desde el punto (0, -5) al punto (0, 0).

Se da situación de simetría en ambos puntos.

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = 2\ .\ V_{A,C} = 2\ .\ \left(-\ G\ .\ \frac{m_A}{r_{AC}}\right) = 2\ .\ \left(-\ 6,7.10^{-11}\ .\ \frac{5}{\sqrt{125}}\right) = -6.10^{-11}\ J/kg$$

$$V_D = V_{A,D} + V_{B,D} = 2\ .\ V_{A,D} = 2\ .\ \left(-\ G\ .\ \frac{m_A}{r_{AD}}\right) = 2\ .\ \left(-\ 6,7.10^{-11}\ .\ \frac{5}{10}\right) = -6,7.10^{-11}\ J/kg$$

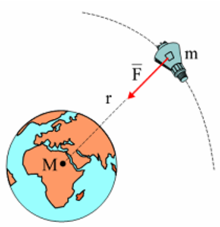
$$(W_{C\rightarrow D})_{F\ gravitatoria} = m'.\ (V_C - V_D) = 2.\ \left(-6.10^{-11} - (-6,7.10^{-11})\right) = 1,4.10^{-11}\ J$$

El proceso es espontáneo, para trasladar la masa no es necesaria una fuerza externa. El resultado es lógico, ya que la fuerza gravitatoria es atractiva y lo que estamos haciendo es acercar la masa m' a las masas A y B.

JULIO 2020

Determinar para un satélite artificial de masa 200 kg que rodea la Tierra en una órbita circular de periodo $8,40.10^3$ s.

a) **(1 p)** El radio de la órbita, así como el valor de la velocidad orbital.



La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G\ .\ \frac{M_T\ .\ m}{r^2} = m\ .\ \frac{v_0^2}{r}\ \Rightarrow\ v_0 = \sqrt{\frac{G\ .\ M_T}{r}}$$

Por otro lado, el período de revolución del satélite es:

$$T = \frac{2\pi \,.\, r}{v_0}$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \,.\, M_T \,.\, T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,7.10^{-11} \,.\, 5,97.10^{24} \,.\, (8,4.10^3)^2}{4\pi^2}} = 8,94.10^6 \; m$$

$$v_O = \sqrt{\frac{G \,.\, M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,7.10^{-11} \,.\, 5,97.10^{24}}{8,94.10^6}} = 6689 \; m/s$$

b) **(1 p)** Las energías, mecánica, cinética y potencial del satélite en esa órbita.

$$E_c = \frac{1}{2} \,.\, m \,.\, (v_o)^2 = \frac{1}{2} \,.\, m \,.\left(\sqrt{\frac{G \,.\, M_T}{r}}\right)^2 = \frac{1}{2} \,.\, G \,.\, \frac{M_T \,.\, m}{r} = \frac{1}{2} \,.\, 6,7.10^{-11} \,.\, \frac{5,97.10^{24} \,.\, 200}{8,94.10^6} = 4,47.10^9 \; J$$

$$E_p = \frac{-G \,.\, M_T \,.\, m}{r} = \frac{-6,7.10^{-11} \,.\, 5,97.10^{24} \,.\, 200}{8,94.10^6} = -8,95.10^9 \; J$$

La energía mecánica del satélite, también conocida como energía de enlace, es la suma de las energías cinética y potencial que tiene el satélite en su órbita.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \,.\, m \,.\, (v_O)^2 + \left[\frac{-G \,.\, M_T \,.\, m}{r}\right] = \frac{1}{2} \,.\, m \,.\left(\sqrt{\frac{G \,.\, M_T}{r}}\right)^2 + \left[\frac{-G \,.\, M_T \,.\, m}{r}\right]$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \,.\, G \,.\, \frac{M_T \,.\, m}{r} = -\frac{1}{2} \,.\, 6,7.10^{-11} \,.\, \frac{5,97.10^{24} \,.\, 200}{8,94.10^6} = -4,47.10^9 \; J$$

c) **(0,5 p)** El trabajo que se requiere para poner el satélite en esa órbita.

Antes del lanzamiento el satélite solo posee energía potencial gravitatoria, sin embargo, cuando se mueve en su órbita tiene tanto energía potencial como energía cinética, cuya suma recibe el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace. El trabajo necesario para poner el satélite en órbita es la diferencia entre la energía de enlace y la energía potencial en la superficie.

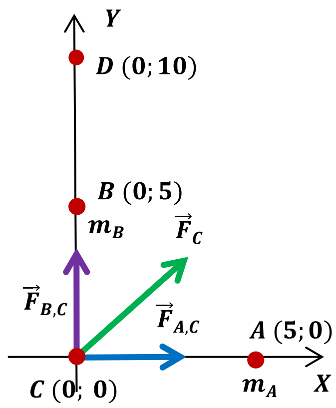
$$W = E_{enlace} - E_{p,superficie} = -\frac{1}{2} \,.\, G \,.\, \frac{m \,.\, M_T}{r} - \left(-G \,.\, \frac{m \,.\, M_T}{R_T}\right) = G \,.\, m \,.\, M_T \,.\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

$$W = 6,7.10^{-11} \,.\, 200 \,.\, 5,97.10^{24} \,.\left(\frac{1}{6,37.10^6} - \frac{1}{2 \,.\, 8.94.10^6}\right) = 8,1.10^9 \; J$$

JULIO 2020

Dos masas de 10 kg se hallan situadas en los puntos (5, 0) y (0, 5), respectivamente. Nota: todas las distancias expresadas en metros.

a) **(1 p)** Calcula y representa la fuerza que experimenta una masa de 5 kg, situada en el punto (0, 0).



$$\vec{F}_{A,C} = G \,.\, \frac{m_A \,.\, m_C}{(r_{A,C})^2} \; \vec{\imath} = 6,7.10^{-11} . \frac{10 \,.\, 5}{(5)^2} \; \vec{\imath} = 1,34.10^{-10} \, \vec{\imath} \;\; N$$

$$\vec{F}_{B,C} = G \,.\, \frac{m_B \,.\, m_C}{(r_{B,C})^2} \; \vec{\jmath} = 6,7.10^{-11} . \frac{10 \,.\, 5}{(5)^2} \; \vec{\jmath} = 1,34.10^{-10} \, \vec{\jmath} \;\; N$$

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{A,C} + \vec{F}_{B,C} = (1,34.10^{-10}\,\vec{\imath} + 1,34.10^{-10}\,\vec{\jmath}) \;\; N$$

$$|\vec{F}_C| = \sqrt{(1,34.10^{-10})^2 + (1,34.10^{-10})^2} = 1,9.10^{-10} \;\; N$$

b) **(1,5 p)** Calcula el trabajo necesario para llevar una masa de 5 kg desde el punto (0, 0) al punto (0, 10).

Calculamos el potencial gravitatorio que las masas *A* y B crean en ambos puntos (también se puede hacer con las energías potenciales):

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = G.\left(\frac{m_A}{r} + \frac{m_B}{r}\right) = -\frac{G}{r}.\ (m_A + m_B) = -\frac{6,7.10^{-11}}{5}.\ (20) = -2,68.10^{-10}\ J/kg$$

$$V_D = V_{A,D} + V_{B,D} = -G.\left(\frac{m_A}{r_{A,D}} + \frac{m_B}{r_{B,D}}\right) = -6,7.10^{-11}.\ \left(\frac{10}{\sqrt{125}} + \frac{10}{5}\right) = -1,94.10^{-10}\ J/kg$$

$$(W_{C\to D})_{F\,gravitatoria} = m_C.\ (V_C - V_D) = 5.\ \left(-2.68.10^{-10} - (-1,94.10^{-10})\right) = -\,3,7.10^{-10}\ J$$

Para trasladar la masa es necesaria una fuerza externa. El trabajo realizado por esta fuerza queda almacenado en la masa trasladada en forma de energía potencial gravitatoria. El resultado es lógico, ya que estamos alejando la masa C de la masa A, que tienden a atraerse.

JULIO 2019

a) **(1 p)** ¿Cuál es la velocidad mínima que es preciso comunicar a un objeto de 1000 kg situado a 1000 km de altura la superficie terrestre para que escape del campo gravitatorio? ¿En qué sentido?

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste.
La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, de modo que la energía mecánica se conserva.
Para que un cuerpo lanzado desde un punto dentro de un campo gravitatorio pueda abandonar éste, el cuerpo debe llegar a un punto suficientemente alejado con energía potencial gravitatoria nula (ya que hemos tomado como referencia potencial 0 un punto suficientemente alejado, el infinito, donde la influencia gravitatoria puede considerarse nula) y con energía cinética nula. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0, de modo que aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{-\,G.\ M_T.\ m}{r} + \frac{1}{2}.\ m.\ v_e^2 = 0 \;\;\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2.\ G.\ M_T}{r}} = \sqrt{\frac{2.\ 6,7.10^{-11}.\ 5,97.10^{24}}{7,37.10^6}} = 10418,5\ m/s$$

La velocidad de escape no depende de la dirección del lanzamiento (salvo aquellas que harían que el objeto se estrellase sobre la superficie terrestre) ni de la masa del objeto, como hemos podido demostrar al hacer una deducción estrictamente energética.

b) **(1 p)** Obtén la energía total del cuerpo, cuando se encuentra en esa órbita y las diferentes contribuciones a esta.

Un cuerpo en órbita tiene energía potencial gravitatoria (que es función de la distancia al centro del objeto de masas del objeto alrededor del cual orbita) y energía cinética (que es función de la velocidad con la que el cuerpo está orbitando). La energía total de este cuerpo es la suma de estas dos energías y reciben el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace.

$$E_p = \frac{-\,G.\ M_T.\ m}{r} = \frac{-\,6,7.10^{-11}.\ 5,97.10^{24}.\ 1000}{7,37.10^6} = -5,4.10^{10}\ J$$

La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{R^2}=m\,.\frac{v_O^2}{R}\;\Rightarrow\;v_O=\sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{R}}$$

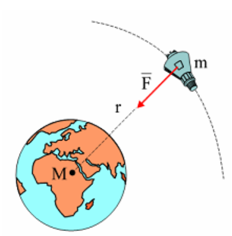
$$E_C=\frac{1}{2}\,.\,m\,.\,(v_O)^2=\frac{1}{2}\,.\,m\,.\left(\sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{r}}\right)^2=\frac{G\,.\,M_T\,.\,m}{2r}=\frac{6,7.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}\,.\,1000}{2\,.\,7,37.10^6}=2,7.10^{10}\;J$$

$$E_m=E_c+E_p=-5,4.10^{10}+2,7.10^{10}=-2,7.10^{10}\;J$$

<u>JULIO 2019</u>

Un satélite de 700 kg realiza una órbita circular alrededor de la Tierra de 7500 km de radio. Obtener:

a) **(1 p)** El periodo del satélite.



La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{r^2}=m\,.\,\frac{v_O^2}{r}\;\Rightarrow\;v_O=\sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{r}}=\sqrt{\frac{6,7.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}}{7,5.10^6}}=7302,9\;m/s$$

$$T=\frac{2\pi\,.\,r}{v_0}=\frac{2\pi\,.\,7,5.10^6}{7302,9}=6452,8\,s\cong 1,8\;h$$

b) **(1 p)** La energía potencial y mecánica.

$$E_p=\frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{r}=\frac{-6,7.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}\,.\,700}{7,5.10^6}=-3,73.10^{10}\;J$$

La energía mecánica del satélite, también conocida como energía de enlace, es la suma de las energías cinética y potencial que tiene el satélite en su órbita.

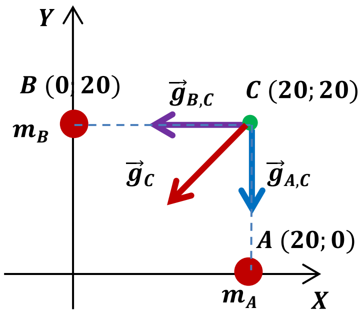
$$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}\,.\,m\,.\,(v_O)^2+\left[\frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{r}\right]=\frac{1}{2}\,.\,m\,.\left(\sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{r}}\right)^2+\left[\frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{r}\right]$$

$$E_m=-\frac{1}{2}\,.\,G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{r}=-\frac{1}{2}\,.\,6,7.10^{-11}\,.\,\frac{5,97.10^{24}\,.\,700}{7,5.10^6}=-1,87.10^{10}\;J$$

<u>JUNIO 2019</u>

En dos puntos, A y B, de coordenadas (20, 0) y (0, 20) expresadas en metros, se sitúan dos masas puntuales de 10 kg cada una.

a) **(0,75 p)** Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el punto C (20, 20).



$$\vec{g}_{A,C}=-G\,.\,\frac{m_A}{(r_{A,C})^2}\;\vec{j}=-6,7.10^{-11}.\frac{10}{(20)^2}\;\vec{j}=-1,675.10^{-12}\,\vec{j}\;\;N/kg$$

$$\vec{g}_{B,C}=-G\,.\,\frac{m_B}{(r_{B,C})^2}\;\vec{\imath}=-6,7.10^{-11}.\frac{10}{(20)^2}\;\vec{\imath}=-1,675.10^{-12}\,\vec{\imath}\;\;N/kg$$

$$\vec{g}_C=\vec{g}_{A,C}+\vec{g}_{B,C}=(-1,675.10^{-12}\,\vec{\imath}-1,675.10^{-12}\,\vec{j})\;\;N/kg$$

b) **(0,75 p)** Hallar el potencial gravitatorio en el punto C.

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = \left(-G\,.\frac{m_A}{r_{A,C}}\right) + \left(-G\,.\frac{m_2}{r_{B,C}}\right) = -\frac{G}{r}\,.(m_1 + m_2) = -\frac{6,7.10^{-11}}{20}\,.(20) = -6,7.10^{-11}\ J/kg$$

c) **(0,5 p)** Hallar la fuerza sobre una masa puntual de 5 kg, situada en ese punto C.

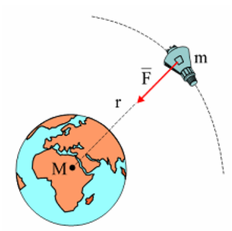
$$\vec{F}_C = m'.\ \vec{g}_C = 5\ .\ (-1,675.10^{-12}\,\vec{\imath} - 1,675.10^{-12}\,\vec{\jmath}) = (-8,375.10^{-12}\,\vec{\imath} - 8,375.10^{-12}\,\vec{\jmath})\ N$$

$$|\vec{F}_C| = \sqrt{(-8,375.10^{-12})^2 + (-8,375.10^{-12})^2} = 1,18.10^{-11}\ N$$

JUNIO 2019

Determinar para un satélite artificial de masa 750 kg que rodea la Tierra en una órbita circular de 8000 km de radio:

a) **(1 p)** Deduce la expresión de la velocidad y obtén su valor, así como el periodo.



La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G\,.\frac{M_T\,.\,m}{r^2} = m\,.\frac{v_0^2}{r} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,7.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}}{8.10^6}} = 7071\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi\,.\,r}{v_0} = \frac{2\pi\,.\,8.10^6}{7071} = 7108,7\ s \cong 1,97\ h$$

b) **(0,5 p)** La energía potencial gravitatoria que tendría dicho satélite.

Hay una discrepancia entre el enunciado del examen que se ha publicado en la web de UNICAN (el que está aquí reflejado) y el que se dio a los alumnos que decía: "La energía potencial gravitatoria que tendría dicho satélite respecto a la superficie de la Tierra".

Voy a resolverlo de las dos maneras:

$$(E_p)_{órbita} = \frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{r} = \frac{-6,7.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}\,.\,750}{8.10^6} = -3,75.10^{10}\ J$$

La energía potencial con respecto a la superficie terrestre es:

$$\Delta E_p = (E_p)_{órbita} - (E_p)_{superficie} = \frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{r} - \left(\frac{-G\,.\,M_T\,.\,m}{R_T}\right) = G\,.\,M\,.\,m\,.\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Delta E_p = (E_p)_{órbita} - (E_p)_{superficie} = 6,7.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}\,.\,750\,.\left(\frac{1}{6,37.10^6} - \frac{1}{8.10^6}\right) = 9,59.10^6\ J$$

La energía potencial en la órbita es mayor que en la superficie terrestre.

c) **(0,5 p)** El trabajo que se requiere para poner el satélite en esa órbita.

Antes del lanzamiento el satélite solo posee energía potencial gravitatoria, sin embargo, cuando se mueve en su órbita tiene tanto energía potencial como energía cinética, cuya suma recibe el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace. El trabajo necesario para poner el satélite en órbita es la diferencia entre la energía de enlace y la energía potencial en la superficie.

$$W = E_{enlace} - E_{p,superficie} = -\frac{1}{2}\,.\,G\,.\frac{m\,.\,M_T}{r} - \left(-G\,.\frac{m\,.\,M_T}{R_T}\right) = G\,.\,m\,.\,M_T\,.\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

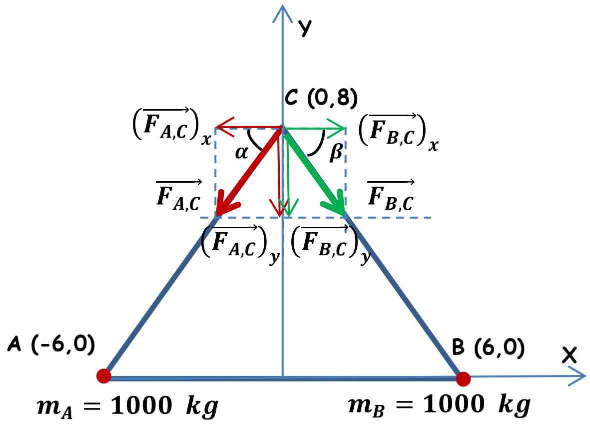
$$W = 6,7.10^{-11}\,.\,750\,.\,5,97.10^{24}\,.\left(\frac{1}{6,37.10^6} - \frac{1}{2\,.\,8.10^6}\right) = 2,83.10^{10}\ J$$

SEPTIEMBRE 2018

Dos masas iguales y de valor 1000 kg se hallan sobre el eje X situadas en los puntos (-6, 0) y (6, 0) respectivamente.

Nota: todas las distancias expresadas en metros.

a) **(0,75 p)** Expresa correctamente la fuerza que experimenta una masa m = 100 kg, situada en el punto (0, 8), así como el potencial en ese punto debido a las otras dos masas.



$$r_{A,C} = r_{B,C} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ m$$

$$\alpha = \beta = arctg\ \frac{8}{6} = 53,1°$$

Por simetría, las masas son iguales y las distancias son iguales, las componentes horizontales son iguales y de sentido contrario, anulándose entre sí, quedando como fuerza resultante la suma de las dos componentes verticales que son iguales entre sí.

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{A,C} + \vec{F}_{B,C} = 2\ .\ (\vec{F}_{A,C})_y = 2\ .\ G\ .\ \frac{m_A\ .\ m_C}{(r_{A,C})^2}\ .(sen\ \alpha\ .\ \vec{j})$$

$$\vec{F}_C = -2\ .\ 6,7.10^{-11} .\ \frac{1000\ .\ 100}{(10)^2}\ .(sen\ 53,1°\ .\ \vec{j}) = -1,07.10^{-7}\ \vec{j}\ \ N$$

A la hora del cálculo del potencial gravitatorio también se da la misma simetría, masas iguales y distancias iguales.

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = 2\ .\ V_{A,C} = -2\ .\ G\ .\ \frac{m_A}{r_{A,C}} = -2\ .\ 6,7.10^{-11}\ .\ \frac{1000}{10} = -1,34.10^{-8}\ J/kg$$

b) **(0,75 p)** Calcula el trabajo realizado por la gravedad para llevar la masa m desde el punto (0, 0) al punto (0, 8).

Calculamos el potencial en el punto O (0,0), teniendo en cuenta que también se da una situación de simetría, masas iguales y distancias iguales.

$$V_O = V_{A,O} + V_{B,O} = 2\ .\ V_{A,O} = -2\ .\ G\ .\ \frac{m_A}{r_{A,O}} = -2\ .\ 6,7.10^{-11}\ .\ \frac{1000}{6} = -2,23.10^{-8}\ J/kg$$

$$(W_{O\to C})_{F\ gravitatoria} = m_3.\ (V_O - V_C) = 100\ .\ \left(-2,23.10^{-8} - (-1,34.10^{-8})\right) = -8,9.10^{-7}\ J$$

Para trasladar la masa es necesaria una fuerza externa. El trabajo realizado por esta fuerza queda almacenado íntegramente en la masa trasladada en forma de energía potencial gravitatoria. El resultado es lógico, ya que la fuerza gravitatoria es atractiva y lo que estamos haciendo es alejar la masa m de las masas A y B.

c) **(0,5 p)** Enuncia el principio de superposición.

Aplicado al campo gravitatorio, el principio de superposición dice que la fuerza gravitatoria sobre una masa M debido a un sistema de masas puntuales, es igual a la suma de las fuerzas gravitatorias debidas a cada una de las masas m_i del sistema. Además, el campo creado en dicho punto por cada masa m_i es el mismo que si las demás masas del sistema no existieran:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F_i}$$

Este principio puede ser aplicado también a la intensidad del campo gravitatorio, al potencial gravitatorio y a la energía potencial gravitatoria, siendo en estos últimos dos casos una suma escalar.

SEPTIEMBRE 2018

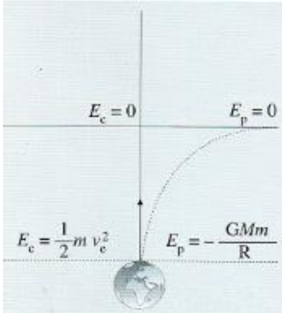
El planeta Mercurio tiene una gravedad en su superficie de 0,376 veces la terrestre y su radio es 0,38 veces el radio terrestre.

a) **(1 p)** Obtén la masa de Mercurio.

$$g_{o,M} = 0,376\ g_{0,T} \ \Rightarrow\ G\ .\ \frac{M_M}{(R_M)^2} = 0,376\ .\ G\ .\ \frac{M_T}{(R_T)^2} \ \Rightarrow\ M_M = 0,376\ .\ \frac{M_T\ .(R_M)^2}{(R_T)^2}$$

$$M_M = 0,376\ .\ \frac{M_T\ .(0,38R_T)^2}{(R_T)^2} = 0,376\ .\ (0,38)^2\ .\ M_T = 0,054\ .\ M_T = 0,054\ .\ 5,97.10^{24} = 3,24.10^{23}\ kg$$

b) **(1 p)** Determina la velocidad de escape desde la superficie de Mercurio.



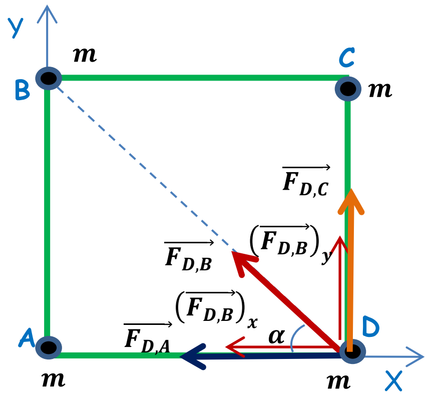
La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste.
La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, de modo que la energía mecánica se conserva.
Para que un cuerpo lanzado desde un punto dentro de un campo gravitatorio pueda abandonar éste, el cuerpo debe llegar a un punto suficientemente alejado con energía potencial gravitatoria nula (ya que hemos tomado como referencia potencial 0 un punto suficientemente alejado, el infinito, donde la influencia gravitatoria puede considerarse nula) y con energía cinética nula. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0, de modo que aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{-G\ .\ M_M\ .\ m}{R_M} + \frac{1}{2}\ .m\ .v_e^2 = 0 \ \Rightarrow\ v_e = \sqrt{\frac{2\ .\ G\ .\ M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2\ .\ 6,7.10^{-11}\ .\ 3,24.10^{23}}{(0,38\ .\ 6,37.10^6)}} = 4235\ m/s$$

JUNIO 2018

Cuatro masas idénticas de 3 kg cada una están situadas sobre los vértices de un cuadrado de 1 m de lado.

a) **(1 p)** Calcula la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre la que se halla en el vértice inferior derecho y represéntalo.



Calculo cada una de las tres fuerzas por separado y luego hago la suma vectorial.

$$\vec{F}_{D,A} = G\ .\ \frac{m\ .\ m}{(r_{A,D})^2}\ .\ (-\vec{\imath}) = -6,7.10^{-11}\ .\ \frac{3^2}{1}\ .\ \vec{\imath} = -6,03.10^{-10}\ \vec{\imath}\ N$$

$$\vec{F}_{D,C} = G\ .\ \frac{m\ .\ m}{(r_{C,D})^2}\ .\ (\vec{\jmath}) = 6,7.10^{-11}\ .\ \frac{3^2}{1}\ .\ \vec{\jmath} = 6,03.10^{-10}\ \vec{\jmath}\ N$$

$$\vec{F}_{D,B} = G\ .\ \frac{m\ .\ m}{(r_{B,D})^2}\ .\ (-\cos 45°\ \vec{\imath} + sen\ 45°\ \vec{\jmath}) = 6,7.10^{-11}\ .\ \frac{3^2}{(\sqrt{2})^2}\ .\ (-\cos 45°\ \vec{\imath} + sen\ 45°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{F}_{D,B} = (-2,12.10^{-10}\ \vec{\imath} + 2,12.10^{-10}\ \vec{\jmath})\ N$$

$$\vec{F}_D = \vec{F}_{D,A} + \vec{F}_{D,B} + \vec{F}_{D,C} = (-8,15.10^{-10}\ \vec{\imath} + 8,15.10^{-10}\ \vec{\jmath})\ N$$

b) **(1 p)** El potencial gravitatorio que hay en ese vértice debido a las otras tres masas.

$$V_D = V_{D,A} + V_{D,B} + V_{D,C} = \left(-G \cdot \frac{m}{r_{D,A}}\right) + \left(-G \cdot \frac{m}{r_{D,B}}\right) + \left(-G \cdot \frac{m}{r_{D,C}}\right) = -G \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_{D,A}} + \frac{1}{r_{D,B}} + \frac{1}{r_{D,C}}\right)$$

$$V_D = -6{,}7 . 10^{-11} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1}\right) = -5{,}44 . 10^{-10}\ J/kg$$

JUNIO 2018

Un satélite de 500 kg se sitúa a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Determinar:

a) **(1 p)** ¿Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite desde la superficie de la Tierra? ¿Cuál sería la energía mecánica en esa órbita?

$$\Delta E_p = (E_p)_h - (E_p)_{superficie} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} - -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Delta E_p = 6{,}7 . 10^{-11} \cdot 5{,}97 . 10^{24} \cdot 500 \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 . 10^{6}} - \frac{1}{7{,}57 . 10^{6}}\right) = 4{,}98 . 10^{9}\ J$$

La energía mecánica del satélite en su órbita, también conocida como energía de enlace, es la suma de las energías cinética y potencial que tiene el satélite en su órbita.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_O)^2 + \left[\frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r}\right] = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}\right)^2 + \left[\frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r}\right] = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r}$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot 6{,}7 . 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 . 10^{24} \cdot 500}{7{,}57 . 10^{6}} = -1{,}32 . 10^{10}\ J$$

b) **(1 p)** Una vez en órbita, ¿Cuál es la energía mínima que hay que suministrar al satélite para que escape de la acción del campo?

Cuando un objeto escapa de la atracción gravitatoria terrestre su energía mecánica es cero o positiva.

$$E_{enlace} + W \geq 0$$

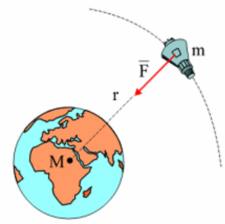
De modo que la mínima energía necesaria para llevar el satélite desde su órbita hasta un punto donde dejaría de estar bajo la influencia gravitatoria de la Tierra, sería igual a la energía de enlace del satélite cambiada de signo.

$$W = -E_{enlace} = 1{,}32 . 10^{10}\ J$$

SEPTIEMBRE 2017

Se desea poner un satélite de comunicaciones de 1000 kg de masa en una órbita circular a 300 km sobre la superficie de la Tierra.

a) **(1 p)** ¿Qué velocidad, periodo y aceleración debe tener en esa órbita?



La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$r = R_T + h = 6{,}37 . 10^{6} + 3 . 10^{5} = 6{,}67 . 10^{6}\ m$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v_O^2}{r} \Rightarrow v_O = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}7 . 10^{-11} \cdot 5{,}97 . 10^{24}}{6{,}67 . 10^{6}}} = 7743{,}9\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v_0} = \frac{2\pi \cdot 6{,}67 . 10^{6}}{7743{,}9} = 5411{,}8\ s \cong 1{,}5\ h$$

$$a_n = \frac{v_O^2}{r} = \frac{(7743{,}9)^2}{6{,}67 . 10^{6}} = 9\ m/s^2$$

b) **(0,5 p)** ¿Cuánto trabajo se requiere para poner el satélite en órbita?

Antes del lanzamiento el satélite solo posee energía potencial gravitatoria, sin embargo, cuando se mueve en su órbita tiene tanto energía potencial como energía cinética, cuya suma recibe el nombre de energía mecánica orbital o energía de enlace. El trabajo necesario para poner el satélite en órbita es la diferencia entre la energía de enlace y la energía potencial en la superficie.

$$W = E_{enlace} - E_{p,superficie} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r} - \left(-G \cdot \frac{m \cdot M_T}{R_T}\right) = G \cdot m \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

$$W = 6,7.10^{-11} \cdot 1000 \cdot 5,97.10^{24} \cdot \left(\frac{1}{6,37.10^6} - \frac{1}{2 \cdot 6,67.10^6}\right) = 3,28.10^{10}\ J$$

c) **(0,5 p)** ¿Cuánto trabajo adicional se necesitaría para que el satélite escapara de la influencia de la Tierra?

Cuando un objeto escapa de la atracción gravitatoria terrestre su energía mecánica es cero o positiva. De modo que la mínima energía necesaria para llevar el satélite desde su órbita hasta un punto donde dejaría de estar bajo la influencia gravitatoria de la Tierra, sería igual a la energía de enlace del satélite cambiada de signo.

$$W' = -E_{enlace} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r} = \frac{1}{2} \cdot 6,7.10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 5,97.10^{24}}{6,67.10^6} = 3.10^{10}\ J$$

SEPTIEMBRE 2017

Marte tiene una masa de 6,42.10^{23} kg es decir unas 0,107 veces la masa de la Tierra y un radio de 3400 km, es decir, unas 0,533 veces el radio terrestre.

a) **(1 p)** Determina el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte.

Teniendo en cuenta la definición de intensidad de campo gravitatorio:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2}\ \vec{u_r}$$

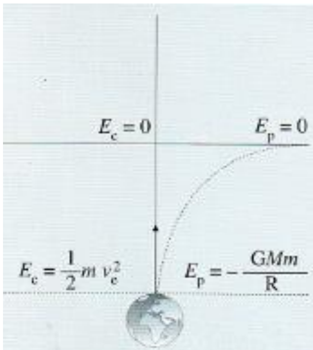
Cuyo módulo es:

$$g = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Si llamamos $g_{0,M}$ a la intensidad de campo gravitatorio en la superficie de Marte, tenemos:

$$g_{0,M} = G \cdot \frac{M_M}{(R_M)^2} = 6,67.10^{-11} \cdot \frac{6,42.10^{23}}{(3,4.10^6)^2} = 3,7\ N/kg = 3,7\ m/s^2$$

b) **(1 p)** Halla la velocidad de escape desde la superficie del planeta.



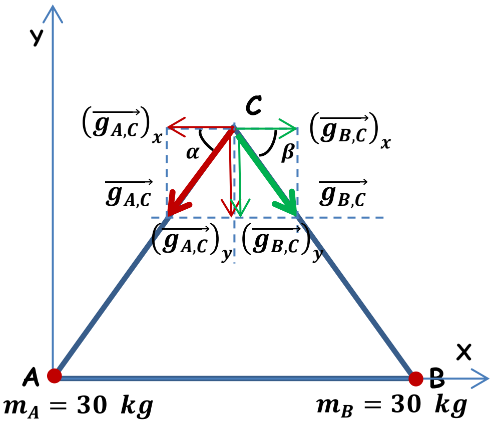
La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste.
La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, de modo que la energía mecánica se conserva.
Para que un cuerpo lanzado desde un punto dentro de un campo gravitatorio pueda abandonar éste, el cuerpo debe llegar a un punto suficientemente alejado con energía potencial gravitatoria nula (ya que hemos tomado como referencia potencial 0 un punto suficientemente alejado, el infinito, donde la influencia gravitatoria puede considerarse nula) y con energía cinética nula. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0, de modo que aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{-G \cdot M_M \cdot m}{R_M} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 = 0 \quad \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,7.10^{-11} \cdot 6,42.10^{23}}{3,4.10^6}} = 5030\ m/s$$

JUNIO 2017

En dos de los vértices, A y B, de un triángulo equilátero de lado 20 m se sitúan dos masas puntuales de 30 kg cada una.

a) **(0,75 p)** Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el vértice libre C del triángulo.



$$r_{A,C} = r_{B,C} = r = 20\ m$$

$$\alpha = \beta = 60°$$

$$\vec{g}_{A,C} = G\, .\, \frac{m_A}{r^2}\, .\, (-\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_{A,C} = 6,7.10^{-11}\, .\, \frac{30}{20^2}\, .\, (-\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_{A,C} = -2,51.10^{-12}\ \vec{\imath} - 4,35.10^{-12}\,\vec{\jmath}\ \ N/kg$$

$$\vec{g}_{B,C} = G\, .\, \frac{m_B}{r^2}\, .\, (\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_{B,C} = 6,7.10^{-11}\, .\, \frac{30}{20^2}\, .\, (\cos 60°\ \vec{\imath} - sen\ 60°\ \vec{\jmath}) = -2,51.10^{-12}\ \vec{\imath} - 4,35.10^{-12}\,\vec{\jmath}\ \ N/kg$$

$$\vec{g}_C = \vec{g}_{A,C} + \vec{g}_{B,C} = -8,70.10^{-12}\,\vec{\jmath}\ \ N/kg$$

Las componentes del vector $\vec{g}_C$ dependen de los vértices elegidos, pero el módulo no.

b) **(0,5 p)** Calcular la fuerza sobre una masa puntual de 10 kg, situada en ese vértice libre.

$$\vec{F} = m\, .\, \vec{g} = 10\, .\, (-8,70.10^{-12}\,\vec{\jmath}) = -8,70.10^{-11}\,\vec{\jmath}$$

Las componentes del vector $\vec{F}$ dependen de los vértices elegidos, pero el módulo no.

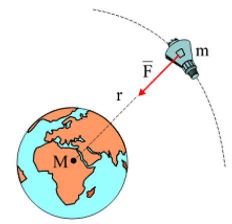
c) **(0,75 p)** Hallar el potencial gravitatorio en dicho vértice libre C.

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = -G\, .\left(\frac{m_A}{r_{A,C}} + \frac{m_B}{r_{B,C}}\right) = -2\, .\, \frac{G\, .\, m}{r} = -2\, .\, \frac{6,7.10^{-11}\, .\, 30}{20} = -2,01.10^{-10}\ J/kg$$

JUNIO 2017

Un satélite de 500 kg realiza una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 230 km sobre la superficie terrestre. Determina:

a) **(1 p)** El periodo del satélite y su velocidad orbital.



La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$r = R_T + h = 6,37.10^6 + 2,3.10^5 = 6,6.10^6\ m$$

$$G\, .\, \frac{M_T\, .\, m}{r^2} = m\, .\, \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{G\, .\, M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,7.10^{-11}\, .\, 5,97.10^{24}}{6,6.10^6}} = 7785\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi\, .\, r}{v_0} = \frac{2\pi\, .\, 6,6.10^6}{7785} = 5326,8\ s \cong 1,48\ h$$

b) **(0,5 p)** La energía potencial y mecánica del satélite en la órbita.

$$E_p = \frac{-G\, .\, M_T\, .\, m}{r} = \frac{-6,7.10^{-11}\, .\, 5,97.10^{24}\, .\, 500}{6,6.10^6} = -3,03.10^{10}\ J$$

La energía mecánica del satélite, también conocida como energía de enlace, es la suma de las energías cinética y potencial que tiene el satélite en su órbita.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_O)^2 + \left[\frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r}\right] = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}\right)^2 + \left[\frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r}\right]$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot 6,7.10^{-11} \cdot \frac{5,97.10^{24} \cdot 500}{6,6.10^6} = -1,52.10^{10}\ J$$

c) **(0,5 p)** Describe brevemente el concepto de "potencial gravitatorio".

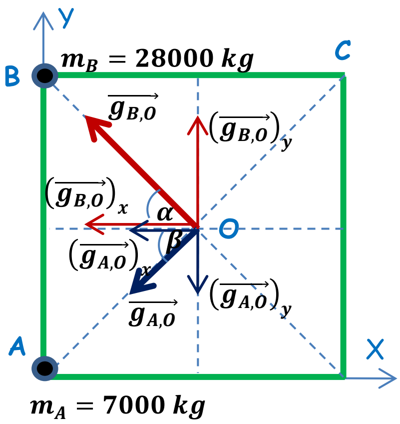
La existencia de una masa M en un punto del espacio hace que, al colocar cualquier otra masa m en un punto de su entorno, ésta adquiera una energía potencial. Es decir, la existencia de una masa M en un punto del espacio dota a los puntos de su alrededor de una propiedad escalar que se pone de manifiesto al poner otra masa a su alrededor, a la que llamamos potencial gravitatorio. Definimos el potencial gravitatorio, V, en un punto como la energía potencial que tendría una partícula de masa unidad colocada en dicho punto.

$$V_x = \frac{E_{p,x}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r_x} \quad (J/kg)$$

También podemos definir el potencial gravitatorio en un punto del campo gravitatorio como una magnitud escalar que representa el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza externa para transportar un cuerpo, a velocidad constante, desde el infinito hasta un punto del campo gravitatorio.

SEPTIEMBRE 2016

Dos cuerpos, A y B, de masas 7000 kg y 28000 kg, respectivamente, se encuentran fijos y situados en dos vértices contiguos de un cuadrado de lado igual a 200 m.



a) **(1 p)** Hallar el campo gravitatorio en el centro del cuadrado.

La distancia entre los vértices del cuadrado y el centro es:

$$r = \frac{\sqrt{200^2 + 200^2}}{2} = 141,42\ m; \qquad \alpha = \beta = 45°$$

$$\vec{g}_O = \vec{g}_{A,O} + \vec{g}_{B,O}$$

$$\vec{g}_O = \frac{G}{r^2} \cdot [m_A \cdot (-\cos 45°\ \vec{\imath} - sen\ 45°\ \vec{\jmath}) + m_B \cdot (-\cos 45°\ \vec{\imath} + sen\ 45°\ \vec{\jmath})]$$

$$\vec{g}_O = \frac{6,67.10^{-11}}{(141,42)^2} \cdot [\,7000 \cdot (-\cos 45°\ \vec{\imath} - sen\ 45°\ \vec{\jmath}) + 28000 \cdot (-\cos 45°\ \vec{\imath} + sen\ 45°\ \vec{\jmath})]$$

$$\vec{g}_O = -8,25.10^{-11}\ \vec{\imath} + 4,95.10^{-11}\ \vec{\jmath}\ \ N/C$$

$$|\vec{g}_O| = \sqrt{(-8,25.10^{-11})^2 + (4,95.10^{-11})^2} = 9,62.10^{-11}\ N/C$$

Las componentes del vector cambian en función de los vértices elegidos, pero el módulo no.

b) **(1 p)** Hallar el trabajo necesario para llevar una masa de 10^8 kg desde el centro del cuadrado hasta el vértice libre del cuadrado más próximo al cuerpo B.

Calculamos el potencial gravitatorio que las masas *A* y B crean en ambos puntos (también se puede hacer con las energías potenciales).

$$V_O = V_{A,O} + V_{B,O} = -G \cdot \left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r}\right) = -\frac{G}{r} \cdot (m_1 + m_2) = -\frac{6,67.10^{-11}}{141,42} \cdot (35000) = -1,65.10^{-8}\ J/kg$$

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = -G \cdot \left(\frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{L}\right) = -6,67.10^{-11} \cdot \left(\frac{7000}{282,84} + \frac{28000}{200}\right) = -1,1.10^{-8}\ J/kg$$

$$(W_{O\to C})_{F\ gravitatoria} = m' . (V_O - V_C) = 10^8 . \left(-1,65.10^{-8} - (-1,1.10^{-8})\right) = -0,55\ J$$

Para trasladar la masa es necesaria una fuerza externa. El trabajo realizado por esta fuerza queda almacenado en la masa trasladada en forma de energía potencial gravitatoria.

SEPTIEMBRE 2016

Un pequeño satélite de masa 4500 kg describe una órbita circular alrededor de Saturno, a una altura de 25000 km sobre su superficie.

DATOS: Masa de Saturno: M_S = 5,688 10^{26} kg Diámetro de Saturno: D_S = 1,205.10^5 km.

a) **(1 p)** Hallar el periodo del movimiento orbital del satélite.

La fuerza gravitatoria del planeta actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$R = R_p + h = 6,025.10^7 + 2,5.10^7 = 8,525.10^7\ m$$

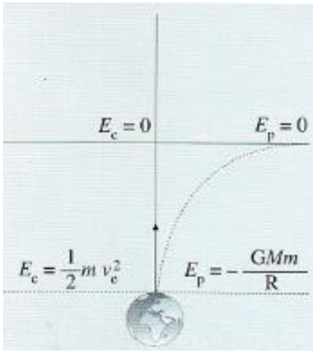
$$G . \frac{M_P . m}{R^2} = m . \frac{v_O^2}{R} \Rightarrow v_O = \sqrt{\frac{G . M_P}{R}} = \sqrt{\frac{6,7.10^{-11} . 5,668.10^{26}}{8,525.10^7}} = 2,11.10^4\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi . R}{v_0} = \frac{2\pi . 8,525.10^7}{2,11.10^4} = 25386\ s \cong 7,05\ h$$

b) **(0,5 p)** Hallar la energía total del satélite.

$$E_m = E_p + E_C = \frac{-G . M_P . m}{R} + \frac{1}{2} . m . {v_O}^2 = \frac{-G . M_P . m}{2 . R} = \frac{-6,7.10^{-11} . 5,668.10^{26} . 4500}{2 . 8,525.10^7} = -1.10^{12}\ J$$

c) **(0,5 p)** ¿Cómo se puede obtener la velocidad de escape de un planeta?



La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste. La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, de modo que la energía mecánica se conserva.
Para que un cuerpo lanzado desde un punto dentro de un campo gravitatorio pueda abandonar éste, el cuerpo debe llegar a un punto suficientemente alejado con energía potencial gravitatoria nula (ya que hemos tomado como referencia potencial 0 un punto suficientemente alejado, el infinito, donde la influencia gravitatoria puede considerarse nula) y con energía cinética nula. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0, de modo que aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{-G . M . m}{R} + \frac{1}{2} . m . v_e^2 = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 . G . M}{R}}$$

JUNIO 2016

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta P es de 49,05 m/s^2 y su masa es 2500 veces la masa de la Tierra. Pueden utilizarse los datos de la Tierra que se proporcionan.

DATOS: Masa de la Tierra, M_T = 5,98.10^{24} kg Radio de la Tierra, R_T = 6370 km
Gravedad en la superficie de la Tierra, $g_{o;T}$ = 9,81 m/s^2

a) **(1 p)** Halla el radio del planeta P.

Se define la intensidad de campo gravitatorio de un planeta, $\vec{g}$, también llamada aceleración de la gravedad, como la fuerza por unidad de masa que experimenta una masa m inmersa en el campo gravitatorio creado por dicho planeta.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M_P}{R^2} \cdot \vec{u_r}$$

El módulo de la aceleración de la gravedad que el planeta P y la Tierra crean en su superficie son:

$$\left.\begin{array}{l} g_{0,P} = G \cdot \dfrac{M_P}{R_P^2} \\ \\ g_{0,P} = G \cdot \dfrac{M_T}{R_T^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{g_{0,P}}{g_{0,T}} = \frac{M_P \cdot R_T^2}{M_T \cdot R_P^2} = \frac{2500\, M_T \cdot R_T^2}{M_T \cdot R_P^2} \quad \Rightarrow \quad R_P = R_T \cdot \sqrt{\frac{2500 \cdot g_{0,T}}{g_{0,P}}}$$

$$R_P = 6,37.10^6 \cdot \sqrt{\frac{2500 \cdot 9,81}{49,05}} = 1,42.10^8 \ m = 1,42.10^5 \ km$$

b) **(1 p)** Hallar la velocidad de escape desde la superficie del planeta P.

La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicar a una masa situada en el seno del campo gravitatorio de un planeta para escapar de éste.
Por el principio de conservación de la energía, si el objeto es lanzado desde la superficie del planeta:

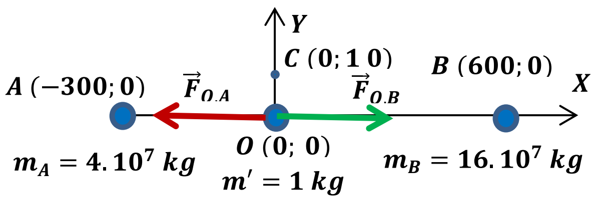
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 - G \cdot \frac{M_P \cdot m}{R_P} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot g_{0,P} \cdot R_P^2}{R_P}} = \sqrt{2 \cdot g_{0,P} \cdot R_P}$$

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 49,05 \cdot 1,42.10^8} = 1,18.10^5 \ m/s = 118 \ km/s$$

JUNIO 2016

Dos cuerpos, A y B, el cuerpo A de masa $4{,}0.10^7$ kg y el cuerpo B de masa $16{,}0.10^7$ se encuentran fijos en dos puntos del plano XY, el cuerpo A en el punto (-300; 0) y el cuerpo B en el punto (600; 0), con las distancias dadas en metros.
En el punto (0; 0) se encuentra situada una esfera de masa 1 kg.

a) **(1 p)** Hallar la fuerza gravitatoria ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera.



$r_{A,O} = 300 \ m \qquad r_{B,O} = 600 \ m$

$r_{A,C} = 300,17 \ m \qquad r_{B,C} = 600,08 \ m$

$$\vec{F}_O = \vec{F}_{O,A} + \vec{F}_{O,B} = G \cdot \frac{m_A \cdot m'}{(r_{A,O})^2} \cdot (-\vec{\imath}) + G \cdot \frac{m_B \cdot m'}{(r_{B,O})^2} \cdot \vec{\imath} = G \cdot m' \cdot \left(\frac{m_B}{(r_{B,O})^2} - \frac{m_A}{(r_{A,O})^2}\right) \cdot \vec{\imath}$$

$$\vec{F}_O = 6,67.10^{-11} \cdot 1 \cdot \left(\frac{16.10^7}{(600)^2} - \frac{4.10^7}{(300)^2}\right) \cdot \vec{\imath} = 0 \ \vec{\imath} \ N \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}_O| = 0 \ N$$

b) **(0,5 p)** Calcular el trabajo necesario para llevar la esfera desde el punto (0; 0) hasta el punto (0; 10).

Calculamos el potencial gravitatorio en los puntos O y C.

$$V_O = V_{A,O} + V_{B,O} = -G \cdot \left(\frac{m_A}{r_{A,O}} + \frac{m_B}{r_{B,O}}\right) = -6,7.10^{-11} \cdot \left(\frac{4.10^7}{300} + \frac{16.10^7}{600}\right) = -2,68.10^{-5} \ J/kg$$

$$V_C = V_{A,C} + V_{B,C} = -G \cdot \left(\frac{m_A}{r_{A,C}} + \frac{m_B}{r_{B,C}}\right) = -6,7.10^{-11} \cdot \left(\frac{4.10^7}{300,17} + \frac{16.10^7}{600,08}\right) = -2,679.10^{-5} \ J/kg$$

$$W_{O \to C}^{F_{gravitatoria}} = -m' \cdot \Delta V = m' \cdot (V_O - V_C) = 1 \cdot \left[-2,68.10^{-5} - \left(-2,679.10^{-5}\right)\right] = -1.10^{-8} \ J$$

El traslado no es espontáneo, se necesita una fuerza externa para realizarlo (las masas debido a la fuerza gravitatoria se atraen entre sí, y en este caso estamos alejando la masa m' de las masas

m_A y m_B). El trabajo realizado por esta fuerza externa queda almacenado íntegramente en la masa m' en forma de energía potencial gravitatoria.

c) **(0,5 p)** Describe brevemente el concepto de "potencial gravitatorio".

La existencia de una masa M en un punto del espacio hace que, al colocar cualquier otra masa m en un punto de su entorno, ésta adquiera una energía potencial. Es decir, la existencia de una masa M en un punto del espacio dota a los puntos de su alrededor de una propiedad escalar que se pone de manifiesto al poner otra masa a su alrededor, a la que llamamos potencial gravitatorio. Definimos el potencial gravitatorio, V, en un punto como la energía potencial que tendría una partícula de masa unidad colocada en dicho punto.

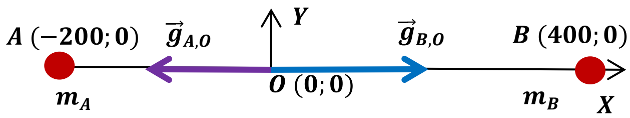
$$V_x = \frac{E_{p,x}}{m} = -G \,.\, \frac{M}{r_x} \quad (J/kg)$$

También podemos definir el potencial gravitatorio en un punto del campo gravitatorio como una magnitud escalar que representa el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza externa para transportar un cuerpo, a velocidad constante, desde el infinito hasta un punto del campo gravitatorio.

<u>SEPTIEMBRE 2015</u>

Un cuerpo de masa 10^7 kg se encuentra fijado en el punto (-200, 0) de un cierto sistema de referencia y otro cuerpo de masa $4{,}0.10^7$ kg se encuentra fijado en el punto (400, 0). Todas las distancias se dan en metros.

a) **(1 p)** Calcular y dibujar el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en el punto (0,0).



$$r_{AO} = 200 \ m$$

$$r_{BO} = 400 \ m$$

$$\vec{g}_O = \vec{g}_{A,O} + \vec{g}_{B,O}$$

Los campos gravitatorios creados por ambas masas solo tienen componente horizontal y son de sentidos contrarios.

$$\vec{g}_O = \vec{g}_{A,O} + \vec{g}_{B,O} = G \,.\left(-\frac{m_A}{(r_{AO})^2} \,.\, \vec{\imath} + \frac{m_B}{(r_{BO})^2} \,.\, \vec{\imath}\right) = 6{,}7.10^{-11} \,.\left(-\frac{10^7}{(200)^2} \,.\, \vec{\imath} + \frac{4.10^7}{(400)^2} \,.\, \vec{\imath}\right) = 0 \ \vec{\imath} \ \ N/kg$$

El campo gravitatorio en el punto O es nulo debido a que ambas masas crean campos en sentidos contrarios y la masa B, cuádruple de la masa A, se encuentra al doble de distancia, por lo que ambos campos individuales son iguales pero de senido contrario

b) **(0,5 p)** Hallar el potencial gravitatorio debido a estas dos masas en el punto (0,0).

$$V_O = V_{A,O} + V_{B,O} = -G \left(\frac{m_A}{r_{AO}} + \frac{m_B}{r_{BO}}\right) = -6{,}67.10^{-11} \,.\left(\frac{10^7}{200} + \frac{4.10^7}{400}\right) = -1{,}0005.10^{-5} \ J/kg$$

c) **(0,5 p)** Describir brevemente el "principio de superposición" para las fuerzas gravitatorias.

El principio de superposición dice que la fuerza gravitatoria sobre una masa M debido a un sistema de masas puntuales, es igual a la suma de las fuerzas gravitatorias debidas a cada una de las masas m_i del sistema. Además, el campo creado en dicho punto por cada masa m_i es el mismo que si las demás masas del sistema no existieran:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F_i}$$

SEPTIEMBRE 2015

Un satélite natural, de masa 15.000 kg, gira en una órbita circular a una altura de 450 km sobre la superficie de un cierto planeta P (cuyos datos se proporcionan debajo).

DATOS: Masa del planeta P: Mp = $8,0.10^{25}$ kg; Radio del planeta P: Rp = 700 km.

a) **(1 p)** Hallar el período orbital del satélite.

La fuerza gravitatoria del planeta actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$R = R_p + h = 700 + 450 = 1150\ km = 1,15.10^6\ m$$

$$G\,.\,\frac{M_P\,.\,m}{R^2} = m\,.\frac{v_O^2}{R} \Rightarrow v_O = \sqrt{\frac{G\,.\,M_P}{R}} = \sqrt{\frac{6,7.10^{-11}\,.\,8.10^{25}}{1,15.10^6}} = 6,83.10^4\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi\,.\,R}{v_0} = \frac{2\pi\,.\,1,15.10^6}{6,83.10^4} = 105,8\ s$$

b) **(1 p)** Hallar la energía total del satélite.

$$E_m = E_p + E_C = \frac{-G\,.\,M_P\,.\,m}{R} + \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,{v_O}^2 = \frac{-G\,.\,M_P\,.\,m}{2\,.\,R} = \frac{-6,7.10^{-11}\,.\,8.10^{25}\,.\,15000}{2\,.\,1,15.10^6} = -3,5.10^{35}\ J$$

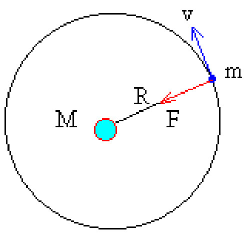
JUNIO 2015

Un satélite de masa 25.000 kg describe una órbita circular alrededor de un cierto planeta P, con un período orbital de 326 horas.

DATO: Masa de planeta P, $M_P = 6,0.10^{27}$ kg

a) **(1 p)** Halla la distancia al centro del planeta a la que se encuentra el satélite.

$$T = 326\ h = 326\,.\,3600 = 1,1736.10^6\ s$$



La fuerza gravitatoria del planeta actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

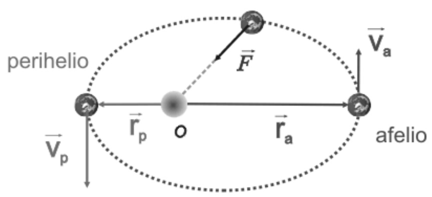
$$G\,.\,\frac{M_P\,.\,m}{R^2} = m\,.\frac{v_O^2}{R} = m\,.\,\omega^2\,.\,R = m\,.\,\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\,.\,R \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G\,.\,M_P\,.\,T^2}{4\pi^2}}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{6,7.10^{-11}\,.\,6.10^{27}\,.\,(1,1736.10^6)^2}{4\pi^2}} = 2,41.10^9\ m$$

b) **(0,5 p)** Hallar la energía total del satélite.

$$E_m = E_C + E_P = -\frac{1}{2}\,.\,G\,.\,\frac{M_P\,.\,m}{R} = -\frac{1}{2}\,.\,6,7.10^{-11}\,.\,\frac{6.10^{27}\,.\,25000}{2,41.10^9} = -2,08.10^{12}\ J$$

c) **(0,5 p)** Describir brevemente "la primera ley de Kepler".

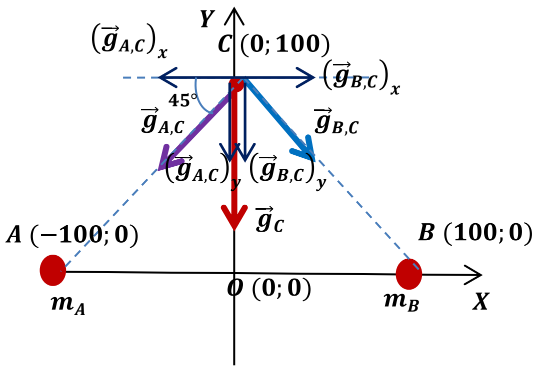


"Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol".

JUNIO 2015

Dos cuerpos idénticos de, de masa 10^{16} kg cada uno, se encuentran fijados en los puntos (-100; 0) y (100; 0), respectivamente, de un cierto sistema de referencia (X,Y). Todas las distancias se dan en metros.

a) **(1 p)** Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en el punto (0; 100)



$$r_{AC} = r_{BC} = \sqrt{20000}\ m$$

$$\vec{g}_C = \vec{g}_{A,C} + \vec{g}_{B,C}$$

Como ambas masas son iguales y la distancia de ambas masas al punto C también son iguales, el módulo de las intensidades de campo que crean ambas masas son iguales. Por simetría las dos componentes horizontales de ambos campos son iguales y de sentido contrario, por lo que se anulan entre sí. Las dos componentes verticales son iguales y su suma nos da el campo total en dicho punto.

$$\vec{g}_C = (\vec{g}_{A,C})_y + (\vec{g}_{B,C})_y = 2\,.\,(\vec{g}_{A,C})_y = -2\,.\,G\,.\frac{m_A}{(r_{AC})^2}\,.\,sen\,45°\,\vec{j}$$

$$\vec{g}_C = -2\,.\,6,7.10^{-11}\,.\frac{10^6}{20000}\,.\,sen\,45°\,\vec{j} = -\,4,74.10^{-9}\,\vec{j}\ \ N/kg$$

b) **(1 p)** Hallar el potencial gravitatorio debido a estas dos masas en el punto (0,0).

Por simetría, ambas masas son iguales y las distancias de ambas masas al punto O son iguales, los potenciales creados por ambas masas son iguales.

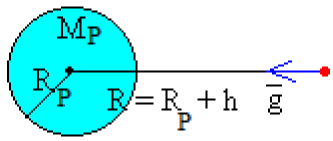
$$V_O = V_{A,O} + V_{B,O} = 2\,.\,V_{A,O} = 2\,.\left(-\,G\,.\,\frac{m_A}{r_{AO}}\right) = 2\,.\left(-\,6,67.10^{-11}\,.\,\frac{10^6}{100}\right) = -1,34.10^{-6}\ J/kg$$

SEPTIEMBRE 2014

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta P es 5,44 m/s^2 y su masa es 1100 veces la masa de la Tierra. Pueden utilizarse los datos de la Tierra y de la gravedad en la superficie terrestre.

DATOS: Masa de la Tierra, M_T = 5,98.10^{24} kg Radio de la Tierra, R_T = 6370 km
Gravedad en la superficie terrestre, g_0 = 9,80 m/s^2

a) **(1 p)** Hallar el radio del planeta P.



Teniendo en cuenta la definición de intensidad de campo gravitatorio:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\,.\,\frac{M}{r^2}\,\vec{u_r}$$

Cuyo módulo es:

$$g = \frac{F}{m} = G\,.\,\frac{M}{r^2}$$

Si llamamos g_0 a la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre, tenemos:

$$g_P = G\,.\,\frac{M_P}{(R_P)^2} = G\,.\,\frac{1100\,.\,M_T}{(R_P)^2} = \frac{1100\,.\,g_0\,.\,(R_T)^2}{(R_P)^2}$$

$$R_P = R_T\,.\,\sqrt{\frac{1100\,.\,g_0}{g_P}} = 6370\,.\,\sqrt{\frac{1100\,.\,9,80}{5,44}} = 2,84.10^5\ km$$

b) **(1 p)** Hallar la velocidad de escape desde la superficie del planeta P.

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0.

$$\frac{-G\,.\,M_P\,.\,m}{R_P}+\frac{1}{2}\,.\,m\,.\,v_{e,P}^2=0$$

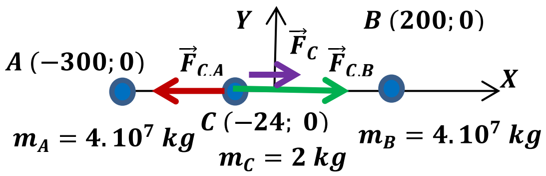
$$v_{e,P}=\sqrt{\frac{2\,.\,G\,.\,M_P}{R_P}}=\sqrt{2\,.\,g_P\,.\,R_P}=\sqrt{2\,.\,5,44\,.\,2,84.10^8}=5,56.10^4\ m/s$$

SEPTIEMBRE 2014

Dos cuerpos A y B, cada uno de ellos de masa 4.10^7 kg, se encuentran fijos en dos puntos del plano (X; Y), el cuerpo A en el punto (-300; 0) y el cuerpo B en el puno (200; 0), con las distancias dadas en metros. En el punto (-24; 0) se encuentra una esfera de masa 2 kg que puede moverse libremente.

a) **(1 p)** Hallar la fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera en su posición inicial.

$r_{A.C}=276\ m\qquad r_{B.C}=224\ m$



$$\vec{F}_C=\vec{F}_{C,A}+\vec{F}_{C,B}$$

$$\vec{F}_C=G\,.\,\frac{m_A\,.\,m_C}{(r_{A,C})^2}\,.\,(-\vec{\imath})+G\,.\,\frac{m_B\,.\,m_C}{(r_{B,C})^2}\,.\,\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_C=G\,.\,m_A\,.\,m_C\,.\left(\frac{1}{(r_{B,C})^2}-\frac{1}{(r_{A,C})^2}\right).\,\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_C=6,67.10^{-11}\,.4.10^7\,.\,2\,.\left(\frac{1}{(224)^2}-\frac{1}{(276)^2}\right).\,\vec{\imath}=3,63.10^{-8}\ \vec{\imath}\ \ N$$

b) **(0,5 p)** Calcular el trabajo necesario para llevar la esfera desde el punto (-24; 0) hasta el punto (0; 48).

Vamos a calcular la energía potencial de la masa C en los puntos C (-24; 0) y en el punto D (0; 48), debido a la presencia de las masas A y B.

$$E_{p,C}=-G\,.\,\frac{m_A\,.\,m_C}{r_{A,C}}+\left(-G\,.\,\frac{m_B\,.\,m_C}{r_{B,C}}\right)=-G\,.\,m_A\,.\,m_C\,.\left(\frac{1}{r_{A,C}}+\frac{1}{r_{B,C}}\right)$$

$$E_{p,C}=6,67.10^{-11}\,.\,4.10^7\,.\,2\,.\left(\frac{1}{276}+\frac{1}{224}\right)=-4,31.10^{-5}\ J$$

Calculamos las distancias de las masas A y B al punto D:

$$r_{A,D}=\sqrt{300^2+48^2}=303,8\,m\qquad r_{B,D}=\sqrt{200^2+48^2}=205,7\,m$$

$$E_{p,D}=-G\,.\,\frac{m_A\,.\,m_C}{r_{A,D}}+\left(-G\,.\,\frac{m_B\,.\,m_C}{r_{B,D}}\right)=-G\,.\,m\,.\,m_C\,.\left(\frac{1}{r_{A,D}}+\frac{1}{r_{B,D}}\right)$$

$$E_{p,D}=6,67.10^{-11}\,.\,4.10^7.\,2\,.\left(\frac{1}{303,8}+\frac{1}{205,7}\right)=-4,35.10^{-5}\ J$$

$$(W_{C\to D})_{Fgravitatoria}=-\Delta(E_p)=(E_{p,C})-(E_{p,D})=-4,31.10^{-5}-(-4,35.10^{-5})=4.10^{-7}\ J$$

El resultado indica que el proceso es espontáneo. La masa C se mueve espontáneamente de la posición C a la D debido a la fuerza gravitatoria, a costa de una disminución de la energía potencial de la masa C.

c) **(0,5 p)** Describir brevemente el concepto de "potencial gravitatorio"

La existencia de una masa M en un punto del espacio hace que, al colocar cualquier otra masa m en un punto de su entorno, ésta adquiera una energía potencial. Es decir, la existencia de una masa

M en un punto del espacio dota a los puntos de su alrededor de una propiedad escalar que se pone de manifiesto al poner otra masa a su alrededor, a la que llamamos potencial gravitatorio. Definimos el potencial gravitatorio, V, en un punto como la energía potencial que tendría una partícula de masa unidad colocada en dicho punto.

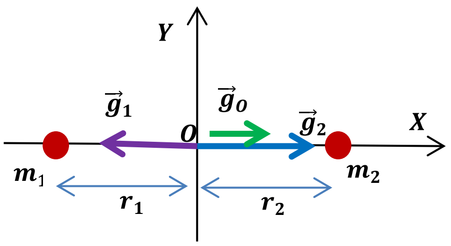
$$V_x = \frac{E_{p,x}}{m} = -G\,.\,\frac{M}{r_x} \quad (J/kg)$$

También podemos definir el potencial gravitatorio en un punto del campo gravitatorio como una magnitud escalar que representa el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza externa para transportar un cuerpo, a velocidad constante, desde el infinito hasta un punto del campo gravitatorio.

JUNIO 2014

Un cuerpo de masa 10^5 kg se encuentra fijado en el punto (-110, 0) de un cierto sistema de referencia y otro cuerpo de masa 10^6 kg se encuentra fijado en el punto (110,0). Todas las distancias se dan en metros.

a) **(1 p)** Calcular y dibujar el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en el punto (0,0).



$$r_1 = r_2 = r = 110\ m$$

$$\vec{g}_O = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$\vec{g}_O = -G\,.\frac{m_1}{r^2}\,.\,\vec{\imath} + G\,.\frac{m_2}{r^2}\,.\,\vec{\imath} = \frac{G}{r^2}.\,(m_2 - m_1)\,.\,\vec{\imath}\ \ N/kg$$

$$\vec{g}_O = \ = \frac{6,67.10^{-11}}{110^2}.\,(10^6 - 10^5) = 4,96.10^{-9}\,.\,\vec{\imath}\ \ N/kg$$

b) **(0,5 p)** Hallar el potencial gravitatorio debido a estas dos masas en el punto (0,0).

$$V_O = V_{1,O} + V_{2,O} = \left(-G\,.\frac{m_1}{r_1}\right) + \left(-G\,.\frac{m_2}{r_2}\right) = -\frac{G}{r}(m_1 + m_2) = -\frac{6,67.10^{-11}}{110}.\left(1,1.10^5\right) = -6,7.10^{-7}\ J/kg$$

c) **(0,5 p)** Describir brevemente el "principio de superposición'.

Aplicado al campo gravitatorio, el principio de superposición dice que la intensidad de campo gravitatorio, $\vec{g}$, en un punto debido a un sistema de masas puntuales es igual a la suma de las intensidades de campo debidos a cada una de las masas m_i del sistema. Además, el campo creado en dicho punto por cada masa m_i es el mismo que si las demás masas del sistema no existieran:

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g_\imath}$$

Este principio puede ser aplicado también a la fuerza gravitatoria, al potencial gravitatorio y a la energía potencial gravitatoria, siendo en estos últimos dos casos una suma escalar.

JUNIO 2014

Un satélite natural, de masa 15 000 kg, gira en una órbita circular a una altura de 450 km sobre la superficie de un cierto planeta P.

DATOS: Masa del planeta P: M_p = 7.98 10^{25} kg Radio del planeta P: R_p = 670 km.

a) **(1 p)** Hallar la velocidad del satélite.

La fuerza gravitatoria del planeta actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$R = R_p + h = 670 + 450 = 1120\ km = 1,12.10^6\ m$$

$$G\,.\,\frac{M_P\,.\,m}{R^2} = m\,.\frac{v_O^2}{R} \Rightarrow v_O = \sqrt{\frac{G\,.\,M_P}{R}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}\,.\,7,98.10^{25}}{1,12.10^6}} = 6,9.10^4\ m/s$$

b) **(1 p)** Hallar la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la energía total del satélite.

$$E_c = \frac{1}{2} \, . \, m \, . \, v_o^2 = \frac{1}{2} \, . \, 1500 \, . \, (6,9 . 10^4)^2 = 3,57 . 10^{13} \; J$$

$$E_p = \frac{-\,G \, . \, M_p \, . \, m}{R} = \frac{-\,6,67 . 10^{-11} \, . \, 7,98 . 10^{25} \, . \, 15000}{1,12 . 10^6} = -7,13 . 10^{13} \; J$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \, . \, G \, . \, \frac{M_P \, . \, m}{R} = -\frac{1}{2} \, . \, 6,67 . 10^{-11} \, . \, \frac{7,98 . 10^{25} \, . \, 15000}{1,12 . 10^6} = -3,56 . 10^{13} \; J$$

SEPTIEMBRE 2013

Galileo observó las lunas de Júpiter en 1610. Descubrió que Ío, el satélite más cercano a Júpiter que pudo observar en su época, poseía un período orbital de 1,8 días y el radio de su órbita era aproximadamente 3 veces el diámetro de Júpiter. Así mismo, encontró que el período orbital de Calixto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de 16,7 días. Con estos datos, suponiendo órbitas circulares y utilizando que el radio de Júpiter es de 7.15 10^7 m, calcular:

a) **(1 p)** La masa de Júpiter.

La fuerza gravitatoria de Júpiter actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite Ío.

$$G \, . \, \frac{M_J \, . \, m}{R^2} = m \, . \, \frac{v_O^2}{R} = m \, . \, \omega^2 \, . \, R = m \, . \, \frac{4\pi^2}{T^2} \, . \, R$$

$$M_J = \frac{4\pi^2 \, . \, R^3}{G \, . \, T^2} = \frac{4\pi \, . \, (6 \, . \, 7,15 . 10^7)^3}{6,7 . 10^{-11} \, . \, (1,8 \, . \, 24 \, . \, 3600)^2} = 1,92 . 10^{27} \; kg$$

b) **(1 p)** El radio de la órbita de Calixto.

Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_{Ío}^2}{R_{Ío}^3} = \frac{T_{Calixto}^2}{R_{Calixto}^3} \Rightarrow R_{Calixto} = R_{Ío} \, . \, \sqrt[3]{\frac{T_{Calixto}^2}{T_{Ío}^2}} = (6 \, . \, 7,15 . 10^7) \, . \, \sqrt[3]{\frac{(16,7)^2}{(1,8)^2}} = 1,89 . 10^9 \; km$$

SEPTIEMBRE 2013

Dos cuerpos, A y B, cada uno de ellos de masa 2 10^5 kg, se encuentran fijos en dos puntos del eje de abscisas X, el cuerpo A en el punto (-30, 0) y el cuerpo B en el punto (+20, 0), con las distancias dadas en metros. En el punto (0, -15) se encuentra una pequeña esfera de masa 0,200 kg, que puede moverse libremente.

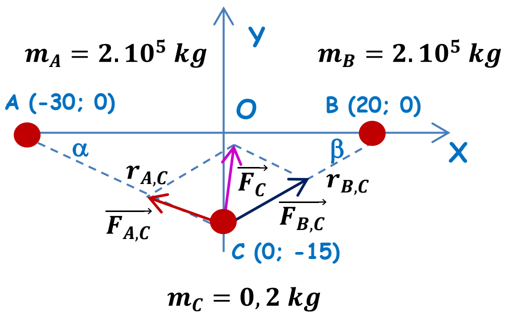
a) **(1 p)** Hallar la fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera en su posición inicial.

$$r_{A,C} = \sqrt{30^2 + 15^2} = 33,54 \; m$$

$$r_{B,C} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \; m$$

$$\alpha = arctg \, \frac{15}{30} = 26,56° \qquad \beta = arctg \, \frac{15}{20} = 36,87°$$

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{A,C} + \vec{F}_{B,C}$$



$$\vec{F}_c = G \, . \, m_C \; . \left[\frac{m_A}{(r_{A,C})^2} \, . \, (-\cos 26,56° \; \vec{\imath} + sen \; 26,56° \; \vec{\jmath}) + \frac{m_B}{(r_{B,C})^2} \, . \, (\cos 36,87° \; \vec{\imath} + sen \; 36,87° \; \vec{\jmath}) \right]$$

$$\vec{F}_C = 6,67 . 10^{-11} \, . \, 0,2 \, . \left[\frac{2 . 10^5 \, . \, 0,2}{(33,54)^2} \, . \, (-\cos 26,56° \; \vec{\imath} + sen \; 26,56° \; \vec{\jmath}) + \frac{2 . 10^5}{(25)^2} \, . \, (\cos 36,87° \; \vec{\imath} + sen \; 36,87° \; \vec{\jmath}) \right]$$

$$\vec{F}_C = +1,29.10^{-9}\ \vec{\imath} + 3,62.10^{-9}\ \vec{\jmath}\ \ N$$

$$|\vec{F}_C| = \sqrt{(1,29.10^{-9})^2 + (3,62.10^{-9})^2} = 3,84.10^{-9}\ \ N$$

b) **(0,5 p)** Hallar la aceleración que experimentará la esfera justo cuando se encuentre en el punto medio (0, 0) entre las esferas A y B.

$$\vec{F}_O = \vec{F}_{A,O} + \vec{F}_{B,O} = G\,.\ \frac{m_A\ .\ m_C}{(r_{A,O})^2}\,.\ \vec{\imath} + G\,.\ \frac{m_B\ .\ m_C}{(r_{B,O})^2}\,.\ (-\vec{\imath})$$

$$\vec{F}_O = 6,67.10^{-11}\ .\ \frac{2.10^5\ .\ 0,2}{(30)^2}\,.\ \ \vec{\imath} + 6,67.10^{-11}\ .\ \frac{2.10^5\ .\ 0,2}{(20)^2}\,.\ (-\,\vec{\imath}) = -3,7.10^{-9}\ \vec{\imath}\ \ N$$

Aplicando la 2ª ley de Newton:

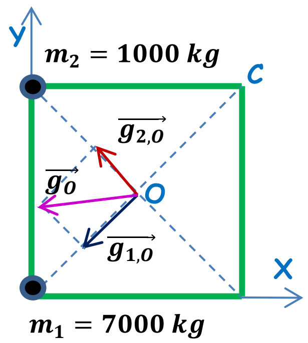
$$\vec{a}_O = \frac{\vec{F}_O}{m} = \frac{-3,7.10^{-9}\ \vec{\imath}}{0,2} = -1,85.10^{-8}\ \vec{\imath}\ \ \frac{m}{s^2}\quad ;\quad |\vec{a}_O| = 1,85.10^{-8}\ \ m/s^2$$

c) **(0,5 p)** Enunciar y explicar brevemente el principio de superposición de fuerzas.

Aplicado al campo gravitatorio, el principio de superposición dice que la fuerza gravitatoria que experimenta una masa m en un punto del espacio debido a un sistema de masas puntuales es igual a la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada una de las cargas m_i del sistema. Además, la fuerza realizada por cada una de las masas m_i es el misma que si las demás masas del sistema no existieran:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F_\imath}$$

<u>JUNIO 2013</u>



Dos cuerpos, 1 y 2, de masas 7000 kg y 1000 kg, respectivamente, se encuentran fijos y situados en dos vértices contiguos de un cuadrado de lado igual a 200 m.

a) **(1 p)** Hallar y dibujar el campo gravitatorio en el centro del cuadrado.

La distancia entre los vértices del cuadrado y el centro es:

$$r = \frac{\sqrt{200^2 + 200^2}}{2} = 141,42\ \ m$$

$$\vec{g}_O = \vec{g}_{1,O} + \vec{g}_{2,O} = \frac{G}{r^2}\,.\ [m_1\ .\ (-\cos 45°\ \vec{\imath} - sen\ 45°\ \vec{\jmath}) + m_2\ .\ (-\cos 45°\ \vec{\imath} + sen\ 45°\ \vec{\jmath})]$$

$$\vec{g}_O = \frac{6,67.10^{-11}}{(141,42)^2}\,.\ [7000\ .\ (-\cos 45°\ \vec{\imath} - sen\ 45°\ \vec{\jmath}) + 1000\ .\ (-\cos 45°\ \vec{\imath} + sen\ 45°\ \vec{\jmath})]$$

$$\vec{g}_O = -1,89.10^{-11}\ \vec{\imath} - 1,41.10^{-11}\ \vec{\jmath}\ \ N/C$$

$$|\vec{g}_O| = \sqrt{(-1,89.10^{-11})^2 + (-1,41.10^{-11})^2} = 2,36.10^{-11}\ \ N/C$$

La expresión vectorial de la intensidad del campo gravitatorio depende de en qué vértice situemos cada masa y dónde tomemos el sistema de referencia. El módulo de la intensidad del campo gravitatorio no depende de estos factores.

b) **(1 p)** Hallar el trabajo necesario para llevar una masa de 2 kg desde el punto anterior hasta el vértice libre del cuadrado más próximo al cuerpo 2.

$$V_O = V_{1,O} + V_{2,O} = -G\,.\left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r}\right) = -\,\frac{G}{r}\,.\ (m_1 + m_2) = -\,\frac{6,67.10^{-11}}{141,42}\,.\ (8000) = -3,77.10^{-9}\ J/kg$$

$$V_C = V_{1,C} + V_{2,C} = -G\,.\left(\frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{L}\right) = -G\,.\left(\frac{7000}{282,84} + \frac{1000}{200}\right) = -1,98.10^{-9}\ J/kg$$

$$(W_{O\to C})_{F\ gravitatoria} = m'.\ (V_O - V_C) = 2.\ \left(-3,77.10^{-9} - (-1,98.10^{-9})\right) = -3,58.10^{-9}\ J$$

Para trasladar la masa es necesaria una fuerza externa. El trabajo realizado por esta fuerza queda almacenado en la masa trasladada en forma de energía potencial gravitatoria.

JUNIO 2013

Una lanzadera espacial giraba en una órbita circular a 300 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Para reparar un satélite artificial, la lanzadera se desplazó hasta una nueva órbita circular situada a 620 km de altura sobre la superficie terrestre. Sabiendo que la masa de la lanzadera era de 65000 kg, calcular:

DATOS: Masa de la Tierra: M_T = 5.98 10^{24} kg; Radio de la Tierra: R_T = 6 370 km.

a) **(1 p)** El período y la velocidad de la lanzadera en su órbita inicial

La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G\,.\ \frac{M_T\,.\ m}{R^2} = m\,.\frac{v_O^2}{R} \ \Rightarrow\ v_O = \sqrt{\frac{G\,.\ M_T}{R}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}\ .\ 5,98.10^{24}}{6,67.10^6}} = 7733\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi\,.\ R}{v_0} = \frac{2\pi\,.\ 6,67.10^6}{7733} = 5419\ s = 1,5\ h$$

b) **(1 p)** La energía necesaria para situarla en la órbita en la que se encontraba el satélite.

La energía necesaria para trasladar un satélite de una órbita a otra es igual a la diferencia de energía mecánica que el satélite tiene en ambas órbitas.

$$W = E_{m\,\text{órbita final}} - E_{m\,\text{órbita inicial}} = -\frac{G\,.\ M_T\,.\ m}{2\,.\ R_f} - \left(-\frac{G\,.\ M_T\,.\ m}{2\,.\ R_i}\right) = \frac{G\,.\ M_T\,.\ m}{2}\,.\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f}\right)$$

$$W = \frac{G\,.\ M_T\,.\ m}{2}\,.\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f}\right) = \frac{6,67.10^{-11}\ .\ 5,98.10^{24}\ .\ 65000}{2}\,.\left(\frac{1}{6,67.10^6} - \frac{1}{6,99.10^6}\right) = 8,9.10^{10}\ J$$

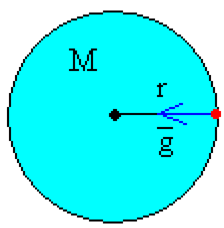
SEPTIEMBRE 2012

La aceleración de la gravedad en la superficie de Saturno es de 10,44 m.s^{-2} y su masa es aproximadamente 100 veces la masa de la Tierra. Con estos datos y utilizando los datos del radio de la Tierra y de la gravedad en la superficie terrestre,

DATOS: Masa de la Tierra: M_T = 5,98.10^{24} kg   Radio de la Tierra: 6 370 km.
Gravedad en la superficie de la Tierra: g = 9,80 m.s^{-2}

a) **(1 p)** Hallar la relación entre el radio de Saturno y el radio de la Tierra.

La intensidad de campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) generado por un cuerpo de masa M a una distancia r de su centro es:



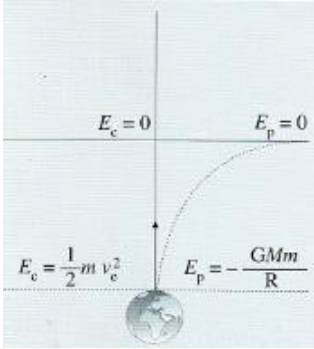
$$g = G\,.\ \frac{M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{G\,.\ M}{g}}$$

La relación de radios es:

$$\frac{R_S}{R_T} = \frac{\sqrt{\frac{G\,.\ M_S}{g_S}}}{\sqrt{\frac{G\,.\ M_T}{g_{0T}}}} = \sqrt{\frac{g_{0T}\,.\ M_S}{g_S\,.\ M_T}} = \sqrt{\frac{g_{0T}\,.\ 100\,.\ M_T}{g_S\,.\ M_T}} = \sqrt{\frac{g_{0T}\,.\ 100}{g_S}} = \sqrt{\frac{9,8\,.\ 100}{10,44}} = 9,7$$

b) **(0,5 p)** Hallar la velocidad de escape desde la superficie de Saturno.

c) **(0,5 p)** Describir brevemente, desde el punto de vista de las energías implicadas, cómo se puede obtener la velocidad de escape de un planeta.



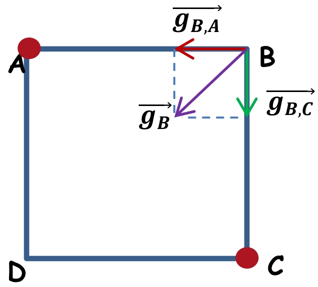
Voy a responder los dos apartados conjuntamente.
La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste.
La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, de modo que la energía mecánica se conserva.
Para que un cuerpo lanzado desde un punto dentro de un campo gravitatorio pueda abandonar éste, el cuerpo debe llegar a un punto suficientemente alejado con energía potencial gravitatoria nula (ya que hemos tomado como referencia potencial 0 un punto suficientemente alejado, el infinito, donde la influencia gravitatoria puede considerarse nula) y con energía cinética nula. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0, de modo que aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{-G \,.\, M \,.\, m}{R} + \frac{1}{2} \,.\, m \,.\, v_e^2 = 0 \;\Rightarrow\; v_e = \sqrt{\frac{2 \,.\, G \,.\, M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, g_S \,.\, R^2}{R}} = \sqrt{2 \,.\, g_S \,.\, R_S} = \sqrt{2 \,.\, g_S \,.\, 9,7 \,.\, R_T}$$

$$v_e = \sqrt{2 \,.\, 10,44 \,.\, 9,7 \,.\, 6,37.10^6} = 3,6.10^4 \; m/s$$

SEPTIEMBRE 2012

Dos cuerpos puntuales idénticos, de masa 600 kg cada uno, se encuentran fijados en vértices opuestos de un cuadrado de lado igual a 20 m.



a) **(1 p)** Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en otro de los vértices del cuadrado.

Teniendo en cuenta que las masas son iguales y que se encuentran a la misma distancia:

$$\overrightarrow{g_B} = \overrightarrow{g_{B,A}} + \overrightarrow{g_{B,C}} = -G \,.\, \frac{m}{r^2} \,.\, (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -6,67.10^{-11} \,.\, \frac{600}{20^2} \,.\, (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -10^{-10}\,\vec{\imath} - 10^{-10}\,\vec{\jmath} \;\; N/kg$$

$$|\overrightarrow{g_B}| = \sqrt{(-10^{-10})^2 + (-10^{-10})^2} = 1,41.10^{-10} \;\; N/kg$$

Las componentes del vector varían según el vértice elegido, pero el módulo no.

b) **(1 p)** Hallar el potencial gravitatorio, debido a las dos masas, en el punto central del cuadrado.

El potencial creado por ambas masas es igual, ya que las masas son iguales y están a la misma distancia:

$$V_O = V_{O,A} + V_{O,B} = 2 \,.\, V_{O,A} = -2 \,.\, 6,67.10^{-11} \,.\, \frac{600}{14,14} = -5,66.10^{-9} \;\; J/kg$$

JUNIO 2012

Un satélite artificial gira en una órbita circular a una altura de 450 km sobre la superficie terrestre.

DATOS: Masa de la Tierra: M_T = 5,98.10^{24} kg Radio de la Tierra: R_T = 6 370 km.

a) **(1 p)** Hallar la velocidad del satélite.

La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G \,.\, \frac{M_T \,.\, m}{R^2} = m \,.\, \frac{v_O^2}{R} \;\Rightarrow\; v_O = \sqrt{\frac{G \,.\, M_T}{R}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \,.\, 5,98.10^{24}}{6,82.10^6}} = 7647,5 \;\; m/s$$

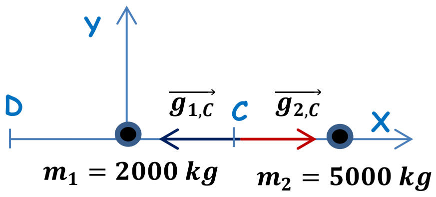
b) **(1 p)** Hallar su periodo orbital.

$$T = \frac{2\pi \,.\, R}{v_0} = \frac{2\pi \,.\, 6,82.10^6}{7647,5} = 5603\ s = 1,56\ h$$

<u>**JUNIO 2012**</u>

Dos cuerpos, 1 y 2, de masas 2000 kg y 5000 kg, respectivamente, se encuentran fijos y situados a una distancia de 100 m uno del otro. El cuerpo 1 se encuentra en el origen de coordenadas y el cuerpo 2 se encuentra a su derecha.

a) **(1 p)** Dibujar y hallar el valor del campo gravitatorio en el punto medio C entre ambos.



$$\vec{g}_C = \vec{g}_{1,C} + \vec{g}_{2,C} = G\,.\,\frac{m_1}{r^2}\,.\,(-\vec{\imath}) + G\,.\,\frac{m_2}{r^2}\,.\,(\vec{\imath})$$

$$\vec{g}_C = 6,67.10^{-11}\,.\,\frac{2000}{(50)^2}\,.\,(-\vec{\imath}) + 6,67.10^{-11}\,.\,\frac{5000}{(50)^2}\,.\,(\vec{\imath})$$

$$\vec{g}_O = 8,004.10^{-11}\ \vec{\imath}\ \ N/C \quad \Rightarrow \quad |\vec{g}_O| = 8,004.10^{-11}\ N/C$$

b) **(0,5 p)** Hallar el potencial gravitatorio en dicho punto C.

$$V_C = V_{1,C} + V_{2,C} = -G\,.\left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r}\right) = -\frac{G}{r}\,.\,(m_1 + m_2) = -\frac{6,67.10^{-11}}{50}\,.\,(7000) = -9,338.10^{-9}\ J/kg$$

c) **(0,5 p)** Hallar el trabajo necesario para llevar una masa de 1 kg desde el punto C hasta una distancia de 40 m a la izquierda del cuerpo 1.

$$V_D = V_{1,D} + V_{2,D} = -G\,.\left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r}\right) = -6,67.10^{-11}\,.\left(\frac{2000}{40} + \frac{5000}{140}\right) = -5,717.10^{-9}\ J/kg$$

$$(W_{C\to D})_{F\ gravitatoria} = m'.\ (V_O - V_C) = 1.\ \left(-9,338.10^{-9} - (-5,717.10^{-9})\right) = -3,621.10^{-9}\ J$$

Para trasladar la masa es necesaria una fuerza externa. El trabajo realizado por esta fuerza queda almacenado en la masa trasladada en forma de energía potencial gravitatoria.

<u>**SEPTIEMBRE 2011**</u>

La estación espacial internacional tiene una masa de 4.2 10^5 kg y describe una órbita circular a 400 km de altura sobre la superficie terrestre.

a) **(0,5 p)** Calcular la fuerza gravitatoria de la Tierra sobre la estación espacial.

La fuerza que la Tierra ejerce sobre la estación espacial, viene dada por la fuerza de gravitación universal:

$$F_G = G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{r^2} = 6,67.10^{-11}\,.\,\frac{6.10^{24}\,.\,4,2.10^5}{(6,778.10^6)^2} = 3,66.10^6\ N$$

b) **(0,5 p)** ¿Ejerce la estación espacial alguna fuerza sobre la Tierra?

Por la tercera ley de Newton (principio de acción-reacción), la estación espacial internacional ejerce una fuerza igual sobre la Tierra, pero en sentido contrario.

c) **(0,5 p)** Calcular la velocidad de la estación.

La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$F_G = m\,.\,\frac{v_O^2}{R} \Rightarrow v_O = \sqrt{\frac{R\,.\,F_G}{m}} = \sqrt{\frac{6,778.10^6\,.\,3,66.10^6}{4,2.10^5}} = 7,68.10^3\ \ m/s$$

d) **(0,5 p)** Calcular el periodo de su movimiento.

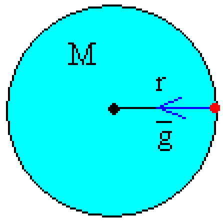
$$T = \frac{2\,.\,\pi\,.\,R}{v_0} = \frac{2\,.\,\pi\,.\,(6,778.10^6)}{7,68.10^3} = 5545\ s = 1,54\ h$$

SEPTIEMBRE 2011

Un planeta tiene un diámetro de 51100 km y la aceleración de la gravedad sobre su superficie tiene un valor de 8.69 m/s^2.

DATOS: constante de gravitación universal G = 6.67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

a) **(0,5 p)** Hallar la masa del planeta.



La intensidad de campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) generado por un cuerpo de masa M a una distancia r de su centro es:

$$g = G\,.\,\frac{M}{r^2} \Rightarrow M = \frac{g\,.\,r^2}{G} = \frac{8,69\,.\,(2,555.10^7)^2}{6,67.10^{-11}} = 8,5.10^{25}\ kg$$

b) **(1 p)** Deducir la velocidad de escape desde la superficie del planeta a partir del principio de conservación de la energía y calcular su valor.

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0.

$$\frac{-G\,.\,M\,.\,m}{R} + \frac{1}{2}\,.\,m\,.\,v_e^2 = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\,.\,G\,.\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2\,.\,6,67.10^{-11}\,.\,8,5.10^{25}}{2,555.10^7}} = 2,1.10^4\ m/s$$

c) **(0,5 p)** Hallar el valor del campo gravitatorio a una altura de 51100 km sobre su superficie.

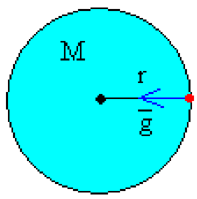
$$g = G\,.\,\frac{M}{r^2} = 6,67.10^{-11}\,.\,\frac{8,5.10^{25}}{(7,665.10^7)^2} = 0,96\ N/kg\ o\ m/s^2$$

JUNIO 2011

La distancia desde el centro del Sol hasta su superficie es 6,96.10^5 km.

DATOS: M_S = 2.10^{30} kg M_L = 7.10^{22} kg M_T = 6.10^{24} kg
Radio medio de la órbita de la Tierra en torno al Sol = 1,5.10^8 km
Radio medio de la órbita de la Luna en torno a la Tierra = 4.10^5 km

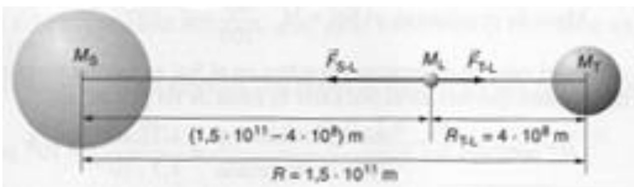
a) **(0,5 p)** Hallar la aceleración de la gravedad en dicha superficie.



La intensidad de campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) generado por un cuerpo de masa M a una distancia r de su centro es:

$$g = G\,.\,\frac{M}{r^2} = 6,67.10^{-11}\,.\,\frac{2.10^{30}}{(6,96.10^8)^2} = 275,4\ m/s^2$$

b) **(1 p)** ¿Cuál es aproximadamente el cociente entre la fuerza que el Sol y la Tierra ejercen sobre la Luna? Escoger entre las siguientes opciones y razonar la respuesta: I) 4000; II) 2; III) 10^6; IV) 10^{-6}.



$$\frac{(F_G)_S}{(F_G)_T} = \frac{G \cdot \dfrac{M_S \cdot M_L}{(r_{S,L})^2}}{G \cdot \dfrac{M_T \cdot M_L}{(r_{T,L})^2}} = \frac{M_S \cdot (r_{T,L})^2}{M_T \cdot (r_{S,L})^2} = \frac{2.10^{30} \cdot (4.10^8)^2}{6.10^{24} \cdot (1,496.10^{11})^2} = 2,4$$

La respuesta correcta es la II.

c) **(0,5 p)** Estimar el orden de magnitud del número de protones que hay en el Sol y en la Tierra.

La masa de los átomos reside fundamentalmente en el núcleo, donde se encuentran los protones y los neutrones (de masa muy parecida), cuya masa es mucho mayor que la de los electrones de la corteza (masa aprox. 2000 veces menor), que puede considerarse despreciable.

SOL: El sol está formado aproximadamente por un 70% de hidrógeno y un 30% de helio. Los átomos de hidrógeno tienen un protón en el núcleo, y el isótopo mayoritario del hidrógeno no tiene neutrones. Por lo que podemos considerar que aproximadamente el 70% de la masa del Sol es la masa de los protones del hidrógeno. Los núcleos de helio contienen dos protones y dos neutrones, por lo que otro 15% de la masa del Sol es la masa de los protones del helio. En, resumen aproximadamente el 85% de la masa del Sol son protones: $m_p = M_S . 85\% \cong 1,7.10^{30}$ kg, de donde se deduce que el número de protones es, aproximadamente:

$$(N_p)_{Sol} = \frac{1,7.10^{30}}{1,7.10^{-27}} \cong 10^{57}$$

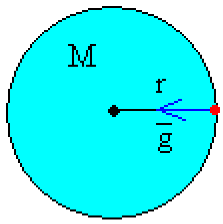
TIERRA: Los átomos, en general, tienen igual o mayor número de neutrones que de protones, siendo la relación neutrón/protón a medida que aumenta Z. En la Tierra, los elementos más abundantes son Fe, O, Si y Mg; elementos de Z relativamente bajo, por lo que podemos considerar que los átomos que constituyen la Tierra tienen aproximadamente el mismo número de neutrones que de protones. Por lo tanto:

$$m_p = M_T . 50\% \cong 3.10^{24}\ kg \quad \Rightarrow \quad (N_p)_{Tierra} = \frac{3.10^{24}}{1,7.10^{-27}} \cong 2.10^{51}$$

JUNIO 2011

Un planeta tiene un diámetro de 6800 km y la aceleración de la gravedad en su superficie alcanza un valor de 3,7 m/s^2.

a) **(0,5 p)** Hallar la masa del planeta.



La intensidad de campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) generado por un cuerpo de masa M a una distancia r de su centro es:

$$g = G . \frac{M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{g . r^2}{G} = \frac{3,7 . \ (3,4.10^6)^2}{6,67.10^{-11}} = 6,4.10^{23}\ kg$$

b) **(1 p)** Deducir la velocidad de escape desde su superficie a partir del principio de conservación de la energía y calcular su valor.

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0.

$$\frac{-G . M . m}{R} + \frac{1}{2} . m . v_e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2 . G . M}{R}} = \sqrt{\frac{2 . 6,67.10^{-11} . 6,4.10^{23}}{3,4.10^6}} = 5011\ m/s$$

c) **(0,5 p)** Hallar la fuerza que el planeta ejerce sobre un satélite de 200 kg que se encuentra a una altura de 2000 km sobre su superficie.

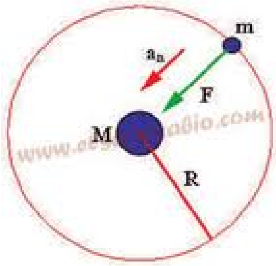
$$F_G = G . \frac{M . m}{r^2} = 6,67.10^{-11} . \frac{6,4.10^{23} . 200}{(5,4.10^6)^2} = 292,8\ N$$

SEPTIEMBRE 2010

Un satélite describe una órbita circular, sobre el ecuador terrestre, a una altura de 35860 km sobre la superficie.

DATOS: Masa de la Tierra = 6 10^{24} kg Radio terrestre = 6370 km
Constante de gravitación universal G = 6.67 10^{-11} N·m^2·kg^{-2}

a) **(1 p)** Calcular el periodo de su movimiento orbital.
b) **(0,5 p)** Hallar la velocidad del satélite.



Calculo los dos apartados simultáneamente:

La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$$G\,.\,\frac{M_T\,.\,m}{R^2}=m\,.\frac{v_0^2}{R}\ \Rightarrow\ v_0=\sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{R}}=\sqrt{\frac{6,67.10^{-11}\,.\,6.10^{24}}{4,223.10^7}}=3078,4\ m/s$$

$$T=\frac{2\pi\,.\,R}{v_0}=\frac{2\pi\,.\,4,223.10^7}{3078,4}=86194\ s$$

c) **(0,5 p)** Hallar la aceleración del satélite.

La única aceleración que tiene el satélite es centrípeta:

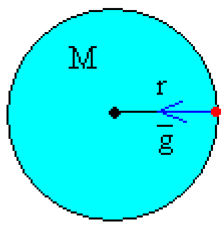
$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{3078,4^2}{4,223.10^7}=0,224\ m/s^2$$

SEPTIEMBRE 2010

Un planeta tiene un diámetro de 51100 km y la aceleración de la gravedad sobre su superficie tiene un valor de 8.69 m/s^2.

DATOS: Constante de gravitación universal G = 6.67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

a) **(0,5 p)** Hallar la masa del planeta.



La intensidad de campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) generado por un cuerpo de masa M a una distancia r de su centro es:

$$g=G\,.\,\frac{M}{r^2}\ \Rightarrow M=\frac{g\,.\,r^2}{G}=\frac{8,69\,.\ (2,555.10^7)^2}{6,67.10^{-11}}=8,5.10^{25}\ kg$$

b) **(1 p)** Hallar la velocidad de escape desde su superficie.

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0.

$$\frac{-G\,.\,M\,.\,m}{R}+\frac{1}{2}\,.m\,.v_e^2=0\ \Rightarrow\ v_e=\sqrt{\frac{2\,.\,G\,.\,M}{R}}=\sqrt{\frac{2\,.\,6,67.10^{-11}\,.\,8,5.10^{25}}{2,555.10^7}}=2,1.10^4\ m/s$$

c) **(0,5 p)** Hallar el valor del campo gravitatorio a una altura de 51100 km sobre su superficie.

$$g=G\,.\,\frac{M}{r^2}=6,67.10^{-11}\,.\,\frac{8,5.10^{25}}{(7,665.10^7)^2}=0,96\ N/kg\ o\ \ m/s^2$$

JUNIO 2010

DATOS: Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre = 9,8 m/s^2
Masa de Neptuno: $1{,}02.10^{26}$ kg Radio de Neptuno: $2{,}48.10^4$ km
Constante de gravitación universal, G = $6{,}67.10^{-11}$ N. m^2.kg^{-2}

a) **(0,5 p)** ¿Cuál es la masa de un cuerpo que en la superficie terrestre pesa 980 N?

$$P = m \, . \, g_{0T} \;\Rightarrow\; m = \frac{P}{g_{0T}} = \frac{980}{9{,}8} = 100 \;\; kg$$

b) **(0,5 p)** ¿Cuánto pesaría ese cuerpo en la superficie de Neptuno?

$$P_N = m \, . \, g_{0N} = m \, . \, \frac{G \, . \, M_N}{(R_N)^2} = 100 \, . \, \frac{6{,}67.10^{-11} \, . \, 1{,}02.10^{26}}{(2{,}48.10^7)^2} = 1106{,}2 \; N$$

c) **(1 p)** Halla la velocidad de escape desde la superficie de Neptuno

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debemos suministrar a un cuerpo situado dentro de un campo gravitatorio para escapar de la influencia de éste. Cuando el cuerpo alcanza esta situación su energía mecánica es 0.

$$\frac{-G \, . \, M \, . \, m}{R} + \frac{1}{2} \, . m \, . v_e^2 = 0 \;\;\Rightarrow\; v_e = \sqrt{\frac{2 \, . \, G \, . \, M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \, . \, 6{,}67.10^{-11} \, . \, 1{,}02.10^{26}}{2{,}48.10^7}} = 2{,}34.10^4 \;\; m/s$$

JUNIO 2010

Halla el valor del campo gravitatorio de Neptuno en su superficie.

DATOS: Masa de Neptuno: $1{,}02.10^{26}$ kg Radio de Neptuno: $2{,}48.10^4$ km
Constante de gravitación universal, G = $6{,}67.10^{-11}$ N. m^2.kg^{-2}

$$g_{0N} = \frac{G \, . \, M_N}{(R_N)^2} = \frac{6{,}67.10^{-11} \, . \, 1{,}02.10^{26}}{(2{,}48.10^7)^2} = 11{,}06 \;\; N/kg \;\; o \;\; m/s^2$$

SEPTIEMBRE 2009

Una nave sitúa un objeto de 20 kg de masa entre la Tierra y el Sol, en un punto en que la fuerza gravitatoria neta sobre el objeto es nula.

DATOS: Constante de gravitación universal G = 6.67 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}
Masa del Sol = 2.10^{30} kg; Masa de la Tierra = 6 10^{24} kg
Distancia Tierra-Sol = 1.5 10^{11} m.

a) **(1 p)** Calcular en ese instante la distancia del objeto al centro de la Tierra.

$$(F_G)_T = (F_G)_S \;\Rightarrow\; G \, . \, \frac{M_T \, . \, m}{x^2} = G \, . \, \frac{M_S \, . \, m}{(1{,}5.10^{11} - x)^2} \;\Rightarrow\; \frac{6.10^{24}}{x^2} = \frac{2.10^{30}}{(1{,}5.10^{11} - x)^2} \;\Rightarrow\; x = 2{,}59.10^8 \;\; m$$

b) **(0,5 p)** Hallar la fuerza que el objeto ejerce sobre la Tierra en dicha posición.

$$F_G = G \, . \, \frac{M_T \, . \, m}{x^2} = 6{,}67.10^{-11} \, . \, \frac{6.10^{24} \, . \, 20}{(2{,}59.10^8)^2} = 0{,}12 \;\; N$$

c) **(0,5 p)** Hallar la aceleración de la Tierra debida a esa fuerza.

$$a = \frac{F_G}{M_T} = \frac{0{,}12}{6.10^{24}} = 2.10^{-26} \;\; m/s^2$$

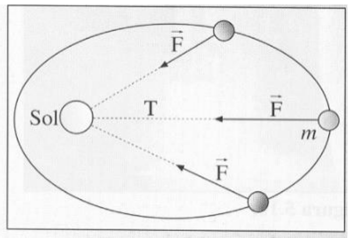
SEPTIEMBRE 2009

La Tierra describe una órbita elíptica en torno al Sol, que se puede considerar inmóvil. En un sistema de referencia ligado al Sol:

NOTA: el sistema de referencia elegido es un sistema de referencia inercial.

a) **(0,5 p)** Dibujar y describir las fuerzas que actúan sobre la Tierra.

La única fuerza que actúa sobre la Tierra es la fuerza de atracción gravitatoria del Sol. Se trata de una fuerza atractiva, en la dirección que une el centro de ambos astros, conservativa y central, cuya intensidad es proporcional a las masas del Sol y de la Tierra e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa el centro del Sol del centro de la Tierra.



$$\overrightarrow{F_G} = -G \, . \, \frac{M_s \, . \, M_T}{r^2} \, . \, \overrightarrow{u_r}$$

b) **(1 p)** ¿Existe una fuerza neta sobre la Tierra? Hallar el momento de esta fuerza respecto al centro del Sol.

Sí que hay fuerza neta sobre la Tierra, la fuerza gravitatoria del Sol, ya que solo actúa esta fuerza sobre ella. Como la fuerza gravitatoria es central, el momento de la fuerza es nulo ya que en todo momento la dirección de la fuerza y la dirección del vector de posición son paralelas:

$$\vec{M} = \vec{r} \, x \, \vec{F} = 0$$

c) **(0,5 p)** Expresar el periodo y la frecuencia del movimiento de la Tierra en torno al Sol en unidades del sistema internacional.

Tal y como está planteada la pregunta, se necesita dar un valor numérico. Sin embargo el enunciado no da ningún dato. Yo creo que para poder resolverlo tenemos dos opciones:

- **Partir del conocimiento del período de la Tierra alrededor del Sol (1 año).**
- **Tomar los datos necesarios de los suministrados en el problema 1 de la Opción 2, además de tomar la órbita de la Tierra alrededor del Sol como circular (ésta me parece muy improbable que se admitiese como buena).**

Voy a resolverlo de la primera manera:

$$T = 1 \, año \, . \, \frac{365 \; días}{1 \; año} \, . \, \frac{24 \; h}{1 \; día} \, . \, \frac{3600 \; s}{1 \; h} = 3,15.10^7 \; s$$

$$f = \frac{1}{T} = 3,17.10^{-8} \; Hz$$

JUNIO 2009

La siguiente tabla muestra la distancia entre dos objetos idénticos y la correspondiente fuerza gravitatoria entre ellos:

Distancia entre los objetos (m)	Fuerza gravitatoria (N)
	$14{,}4.10^{-9}$
0,1	$3{,}6.10^{-9}$
0,2	
0,3	

DATOS: Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$
Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre: $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$
Masa de la Luna = 0,012. masa de la Tierra
Radio de la Luna = 0,27. radio terrestre.

a) **(0,5 p)** Completa los datos que faltan en la tabla.

$$F_G = G\,.\,\frac{m\,.\,m'}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F_G\,.\,r^2 = cte;\ \ \textit{De la segunda experiencia obtenemos}:\ F_G\,.\,r^2 = 3,6.10^{-11}\ N.m^2$$

Haciendo uso de esta relación podemos completar la tabla:

Distancia entre los objetos (m)	Fuerza gravitatoria (N)
0,05	$14{,}4.10^{-9}$
0,1	$3{,}6.10^{-9}$
0,2	9.10^{-10}
0,3	4.10^{-10}

b) **(0,5 p)** Halla la masa de los objetos.

Como las dos masas son iguales, utilizando los datos de cualquiera de las medidas:

$$F_G = G\,.\,\frac{m\,.\,m'}{r^2} = G\,.\,\frac{m^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad m = r\,.\,\sqrt{\frac{F_G}{G}} = 0,1\,.\,\sqrt{\frac{3,6.10^{-9}}{6,67.10^{-11}}} = 0,735\ kg$$

c) **(1 p)** Halla el peso de los objetos sobre la superficie de la Tierra y de la Luna.

$$P_T = m\,.\,g_{0T} = 0,735\,.\,9,8 = 7,203\ N$$

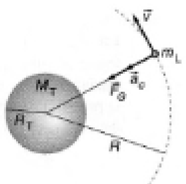
$$P_L = m\,.\,g_{0L} = m\,.\,G\,.\,\frac{M_L}{(R_L)^2} = m\,.\,G\,.\,\frac{0,012\,.\,M_T}{(0,27\,.\,R_T)^2} = m\,.\,\frac{0,012}{(0,27)^2}\,.\,g_{0T} = 0,735\,.\,\frac{0,012}{(0,27)^2}\,.9,8 = 1,18\ N$$

JUNIO 2009

La Luna describe una órbita circular alrededor de la Tierra que se puede considerar inmóvil:

DATOS: Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$ $M_T = 5{,}97.\ 10^{24}$ kg
Distancia Tierra-Luna = 384.000 km $M_L = 7{,}35.\ 10^{22}$ kg.

a) **(0,5 p)** Halla la velocidad de la Luna en su órbita



La fuerza gravitatoria de la Tierra actúa como fuerza centrípeta del movimiento de la Luna:

$$G\,.\,\frac{M_T\,.\,M_L}{R^2} = M_L\,.\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,.\,M_T}{R}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}\,.\,5,97.10^{24}}{3,84.10^8}} = 1018,3\ m/s$$

b) **(0,5 p)** Halla el período del movimiento de la Luna

$$T = \frac{2\pi \ . \ R}{v} = \frac{2\pi \ . \ 3,84 . 10^{8}}{1018,3} = 2,37 . 10^{6} \ s \ = 27,4 \ días$$

c) **(0,5 p)** Halla la energía cinética de la Luna.

$$E_C = \frac{1}{2} . \ M_L \ . \ v^2 \ = \frac{1}{2} . \ 7,35 . 10^{22} \ . \ (1018,3)^2 = 3,81 . 10^{28} \ J$$

d) **(0,5 p)** Halla la energía total.

$$E_m = \ E_p + \ E_C = \frac{- \ G \ . \ M_T \ . \ M_L}{R} + \frac{1}{2} . \ M_L \ . \ v^2 = \frac{- \ G \ . \ M_T \ . \ M_L}{2 \ . \ R}$$

$$E_m = \frac{- \ 6,67 . 10^{-11} \ . \ 5,97 . 10^{24} \ . \ 7,35 . 10^{22}}{2 \ . \ 3,84 . 10^{8}} = \ -3,81 . 10^{28} \ J$$