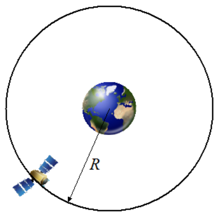
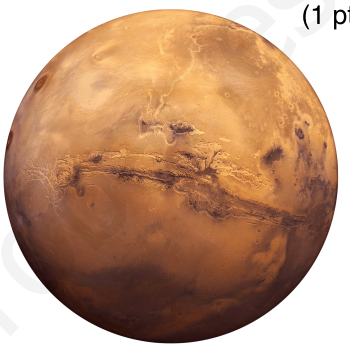
Nombre y apellidos: ____

1. Se pretende situar un satélite artificial de **100 kg** en una **órbita** circular a **2000 km** de **altura sobre** la **superficie** terrestre. Calcula:



   a) La **velocidad** que ha de poseer el satélite para girar en esa **órbita**. (**Justifica** la fórmula de la **velocidad orbital**) (1 pt.) $6,9 \cdot 10^3$ m/s
   b) El **período** de la órbita. 7622 s $\simeq 2,12$ h (0,5 pt.)
   c) La **energía** que fue **preciso** comunicarle para situarlo a esa **altura**. (1,5 pt.) $3,9 \cdot 10^9$ J
   d) La **velocidad** de **escape desde** esa **órbita**. (1 pt.) $9,8 \cdot 10^3$ m/s

   Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s²



2. La **masa** de **Marte** es **1 / 10** parte de la **masa** de la **Tierra**, y su **radio** es **1 / 2** del **radio terrestre**. ¿Cuál es el valor de **g en la superficie de Marte**? Dato: g_{0T} = 9,81 m/s² (1,5 pt.)

   $3,9 \frac{N}{Kg} \left(\frac{m}{s^2}\right)$

3. CUESTIÓN: Dos satélites de comunicaciones **A** y **B** con **diferentes masas** (**$m_A > m_B$**) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de **diferente radio** siendo **$r_A < r_B$** : (1,5 pt.)

   a) **B** tiene **menor período orbital** Es falsa
   b) **A** gira con **mayor velocidad lineal** Es verdadera
   c) Los **dos** tienen la **misma energía mecánica** Es falsa

   Justifica bien la respuesta **verdadera** y **por qué las otras dos opciones** son **falsas**.

4. Tenemos una **masa** de **3 kg** situada en el **punto (0,0)** y otra **masa** de **30 kg** situada en **(10,0)** medidos en metros. Dato: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg²

   a) Calcula el **vector** y **módulo** del **campo gravitatorio** en el punto **(5,12)**. (1,5 pt.)
   b) Calcula el **vector** y **módulo** de la **fuerza** ejercida sobre una masa de **2 kg** situada en el punto **(5,12)**. $8,2 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 2,4 \cdot 10^{-11} \vec{j}$ N , $2,54 \cdot 10^{-11}$ N (0,5 pt.)
   c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** la misma masa de **2 kg** desde el punto **(5,12)** hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

$\vec{g}_T = 4,1 \cdot 10^{-12} \vec{i} - 1,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \frac{N}{Kg}$, $|\vec{g}_T| = 1,27 \cdot 10^{-11} \frac{N}{Kg}$, $-3,36 \cdot 10^{-10}$ J

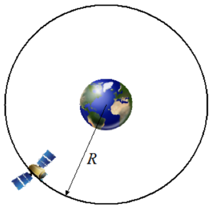
Isaac Newton

COMPLEMENTARIO

Se lanza un cuerpo **verticalmente** hacia arriba **desde la superficie** de la Tierra con una **velocidad** de **4000 m/s**. Calcula la **altura máxima** que alcanzará. Despreciamos el rozamiento con la atmósfera. Datos: g_0 = 9,81 m/s² , R_T = 6370 km (1,5 pt.)

$h \simeq 9,4 \cdot 10^5$ m

1. Se pretende situar un satélite artificial de **100 kg** en una **órbita** circular a **2000 km** de **altura sobre** la **superficie** terrestre. Calcula:



a) La **velocidad** que ha de poseer el satélite para girar en esa **órbita**. (**Justifica** la fórmula de la **velocidad orbital**) (1 pt.)
b) El **período** de la órbita. (0,5 pt.)
c) La **energía** que fue **preciso** comunicarle para situarlo a esa **altura**. (1,5 pt.)
d) La **velocidad** de **escape desde** esa **órbita**. (1 pt.)

Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s²

a) Condición de órbita: $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M, pero a partir de los datos: $g_0 = G\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G\cdot M = g_0\cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{r}}$

El radio orbital $r = R_T + h = 6370 \text{ km} + 2000 \text{ km} = 8370 \text{ Km} = 8,37\cdot 10^6 \text{ m}$

$$v = \sqrt{\frac{9,81\times(6370\times10^3)^2}{(6370+2000)\times10^3}} \approx 6896.221577 \frac{m}{s} \simeq 6,9\cdot10^3 \text{ m/s}$$

b) El período orbital se deduce de $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\times\pi\times8,37\times10^6}{6,9\times10^3} \approx 7621.776960 \text{ s} \simeq 7622 \text{ s} \simeq 2,12 \text{ h}$

c) Calculemos la energía de satelización: $\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$

$$-G\frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \qquad r = R_T + h$$

En B, está en órbita: $G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

$$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{Mm}{R_T} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mG\frac{M}{r} + G\frac{Mm}{R_T}$$

$E_{necesaria} = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$, $r = R_T + h$; como $GM = g_0 R_T^2$

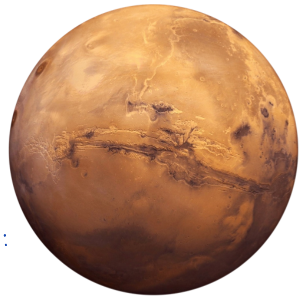
$\boxed{E_{necesaria} = g_0 R_T^2 m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)}$ Energía de satelización ; Masa del satélite: m = 100 kg

$$E_{necesaria} = 9,81\times(6370\times10^3)^2\times100\times\left(\frac{1}{6370\times10^3} - \frac{1}{2\times8370\times10^3}\right) = 3871076397.849462 \text{ J} \simeq 3,9\cdot10^9 \text{ J}$$

d) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} = \underbrace{\frac{1}{2}m\cdot0^2}_{0} - \underbrace{G\frac{Mm}{\infty}}_{0} \\ \frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2 = G\frac{M\cancel{m}}{r} \end{array}\right\} v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{r}}}$ Velocidad de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2\times9,81\times(6370\times10^3)^2}{8370\times10^3}} \approx 9752.730084 \frac{m}{s} \simeq 9,8\cdot10^3 \text{ m/s}$$

2. La **masa** de **Marte** es **1 / 10** parte de la **masa** de la **Tierra**, y su **radio** es **1 / 2** del **radio terrestre**. ¿Cuál es el valor de **g en la superficie de Marte**? Dato: $g_{0T} = 9{,}81$ m/s² (1,5 pt.)



$M_m = \frac{M_T}{10}$, $R_m = \frac{1}{2} \cdot R_T$

Los campos gravitatorios de la Tierra y Marte en su superficie son:

$g_{0T} = G \frac{M_T}{R_T^2}$

$g_{0m} = G \frac{M_m}{R_m^2} = G \frac{\left(\frac{M_T}{10}\right)}{\left(\frac{1}{2} R_T\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot G \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{4}{10} \cdot g_{0T} = \frac{4}{10} \times 9{,}81 = 3.924 \frac{N}{Kg}$, $g_{0m} \simeq 3{,}9 \frac{N}{Kg} \left(\frac{m}{s^2}\right)$

3. CUESTIÓN: Dos satélites de comunicaciones **A** y **B** con **diferentes masas** (**$m_A > m_B$**) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de **diferente radio** siendo **$r_A < r_B$** : (1,5 pt.)

a) **B** tiene **menor período orbital**
b) **A** gira con **mayor velocidad lineal**
c) Los **dos** tienen la **misma energía mecánica**

Justifica bien la respuesta **verdadera** y **por qué las otras dos opciones** son **falsas**.

a) Por la 3ª ley de Kepler $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte}$, luego si $r_A < r_B \Rightarrow T_A < T_B$. Es falsa.

2º método : $T = \frac{2\pi r}{v}$, radio menor y velocidad mayor $\Rightarrow T_A < T_B$, pero hace falta justificar que $v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

b) El momento angular $\vec{L} = cte \Rightarrow \vec{r} \times m\vec{v} = cte$, luego si $r_A < r_B \Rightarrow v_A > v_B$. Es verdadera.

2º método : $\boxed{F_g = F_c} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$, luego si $r_A < r_B \Rightarrow v_A > v_B$. Es verdadera.

c) $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$, $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{Mm}{r^{\cancel{2}}} = m \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow mv^2 = G \frac{Mm}{r}$, sustituyendo

$E_m = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} - G \frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r}$, luego si $r_A < r_B \Rightarrow E_{m_A} < E_{m_B}$. Es falsa.

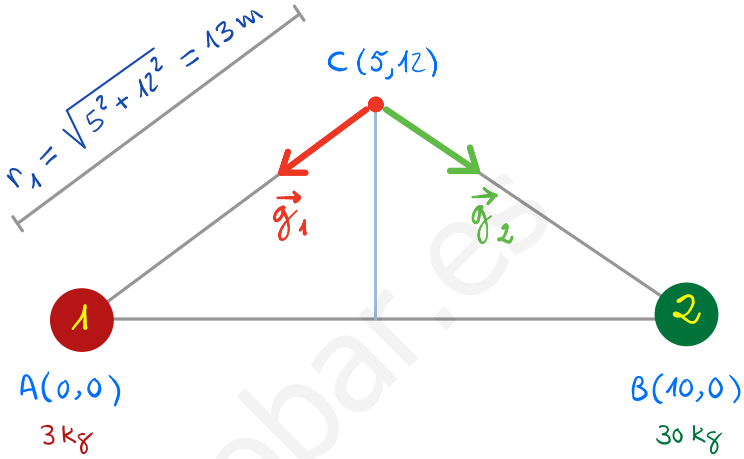
Como $m_A > m_B$ refuerza el efecto. Si $m_A < m_B$ podría pasar cualquier cosa.

4. Tenemos una **masa** de **3 kg** situada en el **punto (0,0)** y otra **masa** de **30 kg** situada en **(10,0)** medidos en metros. Dato: G = 6,67·10^{-11} N·m²/kg²

   a) Calcula el **vector** y **módulo** del **campo gravitatorio** en el punto **(5,12)**. (1,5 pt.)

   b) Calcula el **vector** y **módulo** de la **fuerza** ejercida sobre una masa de **2 kg** situada en el punto **(5,12)**. (0,5 pt.)

   c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** la misma masa de **2 kg** desde el punto **(5,12)** hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)



Calculamos primero los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{(5,12)-(0,0)}{\sqrt{5^2+12^2}} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(5,12)-(10,0)}{\sqrt{5^2+12^2}} = \left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}$$

a) Según el principio de superposición $\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_1 = -G\frac{3}{13^2}\left(\frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}\right) = -4{,}55\cdot 10^{-13}\,\vec{i} - 1{,}09\cdot 10^{-12}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = -G\frac{30}{13^2}\left(-\frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}\right) = +4{,}55\cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 1{,}09\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 4{,}1\cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 1{,}2\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$|\vec{g}_T| = \sqrt{g_{Tx}^2 + g_{Ty}^2} = \sqrt{\left(4{,}1\times 10^{-12}\right)^2 + \left(1{,}2\times 10^{-11}\right)^2} \approx 1.268110\times 10^{-11}\ \frac{N}{kg} \simeq 1{,}27\cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg}$$

b) $\vec{F} = m\vec{g}$, $m = 2\ kg \Rightarrow$

$$\vec{F}_T = 2kg\cdot\left(4{,}1\cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 1{,}2\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}\right) = 8{,}2\cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 2{,}4\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ N$$

$$|\vec{F}_T| = 2kg\cdot 1{,}27\cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg} = 2{,}54\cdot 10^{-11}\ N$$

c) $\boxed{W = \Delta E_c = -\Delta E_p}$ $\quad W_{C\to\infty} = -\left(E_{p_\infty} - E_{p_C}\right)$

$E_p = -G\frac{Mm}{r}$, luego $E_{p_\infty} = 0$

$$E_{p_C}(1) = -G\frac{3\cdot 2}{13}\ ,\ E_{p_C}(2) = -G\frac{30\cdot 2}{13} \Rightarrow E_{p_C} = E_{p_C}(1) + E_{p_C}(2) = -G\frac{66}{13} = -6{,}61\times 10^{-11}\times\frac{66}{13} \approx -3.355850\times 10^{-10}\ J$$

$$W_{C\to\infty} = -\left(0 - \left(-3{,}36\cdot 10^{-10}\ J\right)\right) = -3{,}36\cdot 10^{-10}\ J$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realizamos en contra del campo gravitatorio.

Tiene sentido porque estamos alejando la masa en contra de la atracción gravitatoria de las otras dos.

Isaac Newton

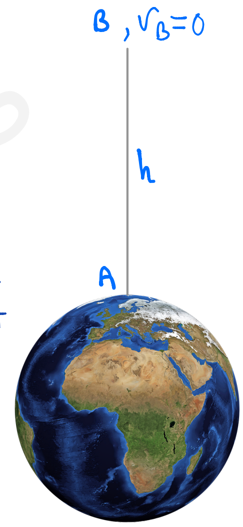
COMPLEMENTARIO

Se lanza un cuerpo **verticalmente** hacia arriba **desde la superficie** de la Tierra con una **velocidad** de **4000 m/s**. Calcula la **altura máxima** que alcanzará. Despreciamos el rozamiento con la atmósfera. Datos: $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$, $R_T = 6370$ km (1,5 pt.)

Resolvemos el problema por conservación de la energía.

$E_{m_A} = E_{m_B}$. En la altura máxima (h en el punto B), la velocidad $v_B = 0$. $r = R_T + h$

$$-G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = -G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T+h} + \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{v_B^2}^{\,0} \Rightarrow v_A^2 = 2\cdot G M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right)$$



$$g_0 = G\frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G\cdot M = g_0 \cdot R_T^2 \quad \text{(sustituimos)}$$

$$v_A^2 = 2\cdot g_0\, R_T^2 \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = 2\cdot g_0 R_T^2 \cdot \left(\frac{\cancel{R_T}+h-\cancel{R_T}}{R_T\cdot(R_T+h)}\right) = 2\cdot g_0 R_T^2 \cdot \frac{h}{R_T^2 + h\cdot R_T}$$

$$v_A^2 R_T^{\cancel{2}} + v_A^2 h \cancel{R_T} = 2 g_0 R_T^{\cancel{2}} h \Rightarrow$$

$$h = \frac{v_A^2 R_T}{2 g_0 R_T - v_A^2} = \frac{4000^2 \times 6370\times 10^3}{2\times 9{,}8\times 6370\times 10^3 - 4000^2} \approx 936317.201338 \text{ m}$$

$$h \simeq 9{,}4 \cdot 10^5 \text{ m}$$

2º método. Alternativamente podemos despejar primero $r = R_T + h$ y finalmente calcular $h = r - R_T$