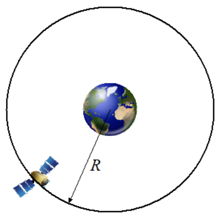
Nombre y apellidos: ____

1. Si un cuerpo **pesa 100N** cuando está en la **superficie** terrestre, ¿a qué **altura** pesará la **mitad**?
   Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s^2 2639 km (2 pt.)

2. Se pretende situar un satélite artificial de **50 kg** en una **órbita** circular a **500 km** de **altura** sobre la **superficie** terrestre. Calcula:



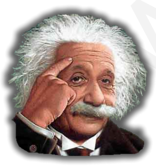
   a. La **velocidad** que ha de poseer el satélite para girar en esa **órbita**. (**Justifica** la fórmula de la **velocidad orbital**) (1 pt.) $7{,}612 \cdot 10^3$ m/s
   b. La **energía cinética** que posee en ella. (0,5 pt.) $1{,}45 \cdot 10^9$ J
   c. La **energía** que fue **preciso** comunicarle para situarlo a esa **altura**. (1,5 pt.) $1{,}68 \cdot 10^9$ J
   d. La **energía mecánica total** que posee el satélite en **órbita**. (0,5 pt.) $-1{,}45 \cdot 10^9$ J
   e. La **velocidad** de **escape desde** esa **órbita**. (0,5 pt.) 10765 $\frac{m}{s}$
   Datos: R_T = 6370 km, g_0 = 9,81 m/s^2

3. Plutón describe una **órbita elíptica** alrededor del Sol. Indica cuál de las siguientes **magnitudes** es **mayor** en el **afelio** (punto más alejado del Sol) que en el **perihelio** (punto más próximo): (1 pt.)
   a) **Momento angular** respecto a la posición del Sol
   b) **Momento lineal**
   c) **Energía potencial**

   Justifica la respuesta

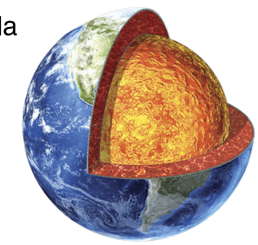
4. Tenemos una **masa** de **3 kg** situada en el **punto (0,0)** y otra **masa** de **6 kg** situada en **(8,0)** medidos en metros. Datos: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2
   a) Calcula el vector y módulo del **campo gravitatorio** en el punto **(4,0)**. (1 pt.)
   b) Calcula el vector y módulo del **campo gravitatorio** en el punto **(4,3)**. (1,5 pt.)
   c) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de **2 kg** desde el punto **(4,3)** hasta el **infinito**. (0,5 pt.) $-2{,}4 \cdot 10^{-10}$ J

a) $\vec{g}_T = 1{,}25 \cdot 10^{-11}\, \vec{i}\ \frac{N}{kg}$ $|\vec{g}_T| = 1{,}25 \cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg}$ b) $\vec{g}_T = 6{,}4 \cdot 10^{-12}\, \vec{i} - 1{,}44 \cdot 10^{-11}\, \vec{j}\ \frac{N}{kg}$ $|\vec{g}_T| = 1{,}58 \cdot 10^{-11}\ \frac{N}{kg}$



COMPLEMENTARIO

¿A qué **profundidad x** hay que descender por **debajo** de la **superficie** terrestre para que un cuerpo pese lo mismo que a una **altura h** sobre ella? Datos: R_T, h (1,5 pt.)



$$x = R_T - \frac{R_T^3}{(R_T+h)^2}$$

1. Si un cuerpo pesa 100N cuando está en la superficie terrestre, ¿a qué altura pesará la mitad?
Datos: RT = 6370 km, g_0= 9,81 m/s²

$$P = m \cdot g_0 = 100\,N \qquad g = \frac{g_0}{2}$$
$$P = m \cdot g = 50N$$
$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$
$$g = \cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{(R_T+h)^2} = \frac{1}{2}\cdot\cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{R_T^2}$$

$$2R_T^2 = (R_T+h)^2$$ Tomo la raíz cuadrada en ambos términos

$$R_T\sqrt{2} = R_T + h$$
$$h = R_T\sqrt{2} - R_T = R_T(\sqrt{2}-1)$$
$$h = 6370\cdot(\sqrt{2}-1) \simeq 2639\ Km$$

2. Se pretende situar un satélite artificial de 50 kg en una órbita circular a 500 km de altura sobre la superficie terrestre.

Datos: RT = 6370 km, g_0= 9,81 m/s²

Calcula:

a. La velocidad que ha de poseer el satélite para girar en esa órbita. (Justifica la fórmula de la velocidad orbital)

En órbita $\boxed{F_g = F_c}$ Condición de órbita

$$r = (6370 + 500)\ Km$$
$$r = 6870\ Km = 6{,}87\cdot 10^6\ m$$

$$G\frac{M_T\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\cdot\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M_T}{r} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$$

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow GM_T = g_0\cdot R_T^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}}$$ velocidad orbital

$$v = \sqrt{\frac{9.81\times(6370\times10^3)^2}{(6370+500)\times10^3}} \approx 7611.94370\ m/s \simeq 7612\ m/s = 7{,}612\cdot 10^3\ m/s$$

b. La energía cinética que posee en ella.

$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$ Energía cinética $\quad E_c = \frac{1}{2}\times50\times(7612)^2 = 1448563600\ J \simeq 1{,}45\cdot10^9\ J$

c. La energía que fue preciso comunicarle para situarlo a esa altura.

$$E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$$

$\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$ Energía de satelización

$$-G\frac{Mm}{R_T} + E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \quad , r = R_T + h \quad , \text{A partir de ahora } M = M_T$$

En B, está en órbita: $G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

$$E_n = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{Mm}{R_T} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{r} + G\frac{Mm}{R_T}$$

$$E_n = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right) \quad , \; r = R_T + h \; , \quad GM = g_0 \cdot R_T^2$$

$$\boxed{E_n = g_0 R_T^2 m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)}$$ Energía de satelización

$$E_n = 9.81\times(6{,}37\times10^6)^2\times50\times\left(\frac{1}{6.37\times10^6} - \frac{1}{2\times6.87\times10^6}\right) \approx 1675942827.51092 \text{ J} \simeq 1{,}68\cdot10^9 \text{ J}$$

d. La energía mecánica total que posee el satélite en órbita.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}}$$ Energía mecánica

$$E_c = 1{,}45\cdot10^9 \text{ J}$$

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -g_0 R_T^2\frac{m}{r} = -9{,}81\times(6{,}37\times10^6)^2\times\frac{50}{6.87\times10^6} \approx -2897084344.97817 \text{ J} \simeq -2{,}9\cdot10^9 \text{ J}$$

$$E_m = 1{,}45\cdot10^9 \text{ J} - 2{,}9\cdot10^9 \text{ J} = -1{,}45\cdot10^9 \text{ J}$$ (la energía de enlace es siempre negativa)

Además se puede ver que : $\boxed{E_m = \frac{1}{2}E_p}$ $\boxed{E_c = -\frac{1}{2}E_p}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_m = -E_c}$

e. La velocidad de escape desde esa órbita.

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\underbrace{\cancel{0^2}}_{0} - G\underbrace{\cancel{\frac{Mm}{\infty}}}_{0}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2 = G\frac{M\cancel{m}}{r}$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{2\times9{,}81\times(6{,}370\times10^6)^2}{6{,}87\times10^6}} \approx 10764.91402 \frac{m}{s} \simeq 10765\frac{m}{s} \simeq 1{,}08\cdot10^4\frac{m}{s}$$

$$GM = g_0\cdot R_T^2$$

3. Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica cuál de las siguientes magnitudes es mayor en el afelio (punto más alejado del Sol) que en el perihelio (punto más próximo):

a) Momento angular respecto a la posición del Sol
b) Momento lineal
c) Energía potencial

Justifica la respuesta

a) El momento angular es constante en un sistema de fuerzas centrales. Es falsa.
b) $p = m \cdot v$. Por las leyes de Kepler, la velocidad es mayor en el perihelio (punto más próximo. Es falsa.

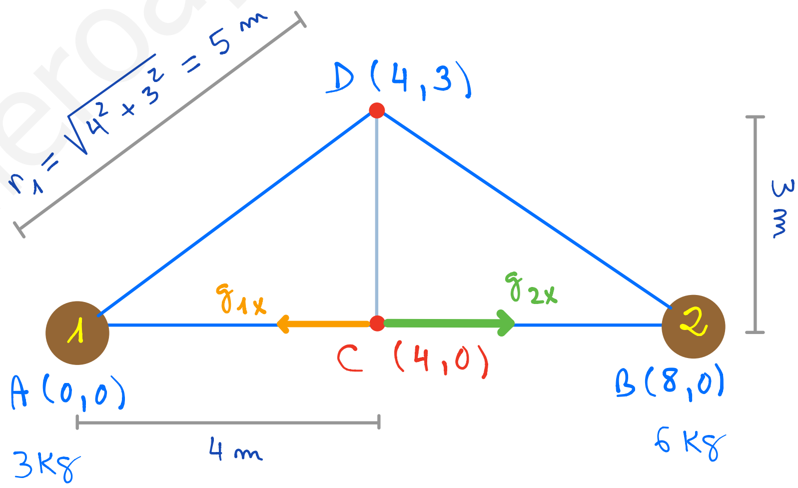
c) $E_p = -G\frac{Mm}{r}$. En el afelio, r es mayor luego Ep está más proxima al cero, es menos negativa y por lo tanto, más grande que en el perihelio. Verdadera.

4. Tenemos una masa de 3 kg situada en el punto (0,0) y otra masa de 6 kg situada en (8,0) medidos en metros.
Datos: G = 6,67·10-11 N · m²/kg²

a) Calcula el vector y módulo del campo gravitatorio en el punto (4,0).

$\vec{u}_1 = (1,0) = \vec{i}$

$\vec{u}_2 = (-1,0) = -\vec{i}$



$\vec{g}_1 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2}\, \vec{i}$

$\vec{g}_2 = -G \cdot \frac{m_2}{r_2^2}\, (-\vec{i})$

$\vec{g}_T = -G \cdot \left(\frac{m_1}{r_1^2} - \frac{m_2}{r_2^2} \right) \vec{i}$

$\vec{g}_T = -6.67 \times 10^{-11} \times \left(\frac{3}{16} - \frac{6}{16} \right) \approx 1.25063 \times 10^{-11}\, \vec{i}\ \frac{m}{s^2} \left(\frac{N}{Kg} \right)$

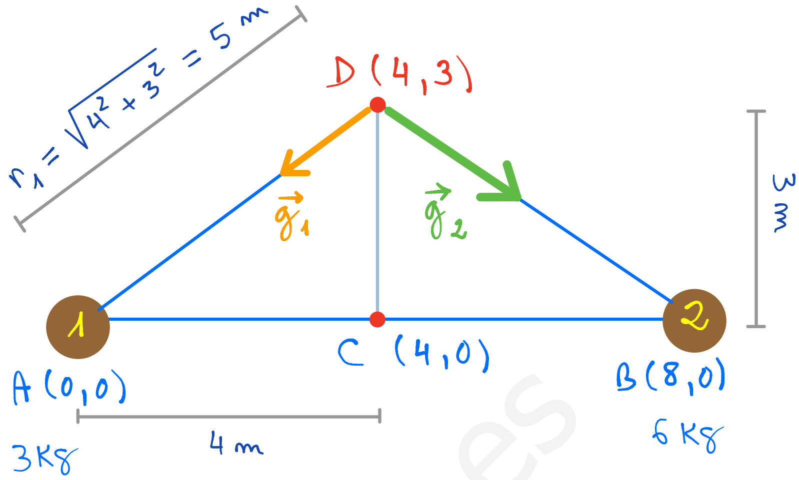
$\vec{g}_T = 1{,}25 \cdot 10^{-11}\, \vec{i}\ \frac{m}{s^2} \left(\frac{N}{Kg} \right)$

$|\vec{g}_T| = 1{,}25 \cdot 10^{-11}\ \frac{m}{s^2} \left(\frac{N}{Kg} \right)$

b) Calcula el vector y módulo del campo gravitatorio en el punto (4,3).

$$\vec{u}_1 = \frac{(4,3)-(0,0)}{5} = \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(4,3)-(8,0)}{5} = \left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$



$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_1$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3}{5^2}\cdot\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_1 = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{12}{125}\vec{i} + \frac{9}{125}\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_2$$

$$\vec{g}_2 = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6}{5^2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_2 = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(-\frac{24}{125}\vec{i} + \frac{18}{125}\vec{j}\right)$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \underbrace{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{12}{125} - \frac{24}{125}\right)}_{-6.67\times10^{-11}\times\left(\frac{12}{125}-\frac{24}{125}\right)=6.4032\times10^{-12}}\vec{i} \underbrace{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{9}{125} + \frac{18}{125}\right)}_{-6.67\times10^{-11}\times\left(\frac{9}{125}+\frac{18}{125}\right)=-1.44072\times10^{-11}}\vec{j}$$

$$\vec{g}_T = 6{,}4\cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 1{,}44\cdot 10^{-11}\,\vec{j} \quad \frac{m}{s^2}\left(\frac{N}{Kg}\right)$$

$$|\vec{g}_T| = \sqrt{(6{,}4\times10^{-12})^2 + (1{,}44\times10^{-11})^2} \approx 1.57582\times10^{-11}\ \frac{m}{s^2}\left(\frac{N}{Kg}\right) \simeq 1{,}58\cdot 10^{-11}\ \frac{m}{s^2}\left(\frac{N}{Kg}\right)$$

c) Calcula el trabajo necesario para trasladar una masa de 2 kg desde el punto (4,3) hasta el infinito. $r_{1D} = r_{2D} = 5$ m

$$Ep_{1D} = -G\frac{Mm}{r_{1D}} = -G\cdot\frac{3\cdot 2}{5}\quad,\quad Ep_{2D} = -G\frac{Mm}{r_{2D}} = -G\cdot\frac{6\cdot 2}{5}$$

$$Ep_D = Ep_{1D} + Ep_{2D} = -G\cdot\left(\frac{3\cdot 2}{5} + \frac{6\cdot 2}{5}\right) = -6.67\times10^{-11}\times\left(\frac{3\times2}{5}+\frac{6\times2}{5}\right) = -2.4012\times10^{-10}\ J$$

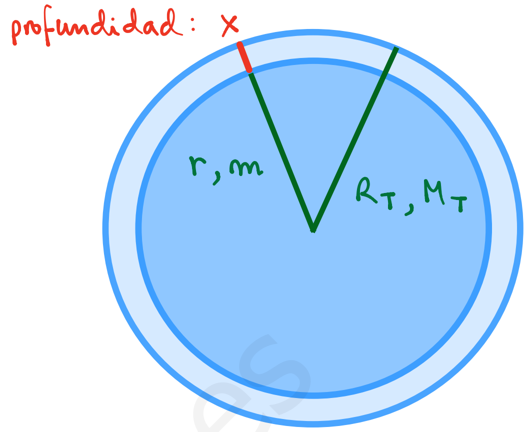
$$Ep_D \simeq -2{,}4\cdot 10^{-10}\ J\quad,\quad Ep_\infty = -G\frac{Mm}{\infty} = 0$$

$$W_{D\to\infty} = -\Delta E_p = -(Ep_\infty - Ep_D) = -2{,}4\cdot 10^{-10}\ J$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realizamos en contra del campo gravitatorio.

COMPLEMENTARIO

¿A qué profundidad x hay que descender por debajo de la superficie terrestre para que un cuerpo pese lo mismo que a una altura h sobre ella? Datos: RT, h.



- Calculamos el campo en el interior de la Tierra.

$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$ Suponemos una densidad constante:

$$\rho = \frac{masa}{volumen} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow M_T = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_T$$

$$g_{int} = G\frac{m}{r^2} = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r$$

$$\frac{g_{int}}{g_0} = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_T} \Rightarrow \boxed{g_{int} = \left(\frac{g_0}{R_T}\right) \cdot r} \quad r = R_T - x \Rightarrow g_x = \frac{g_0}{R_T} \cdot (R_T - x)$$

$$\text{Como } g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow g_x = G \cdot \frac{M_T}{R_T^3} \cdot (R_T - x)$$

- Calculamos el campo a una altura h sobre la superficie de la Tierra:

$$g_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Para que el cuerpo pese lo mismo en x y h, $P_x = P_h \Rightarrow g_x = g_h$

$$\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{R_T^3} \cdot (R_T - x) = \cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{(R_T + h)^2}$$

$$\frac{R_T - x}{R_T^3} = \frac{1}{(R_T + h)^2}$$

$$R_T - x = \frac{R_T^3}{(R_T + h)^2}$$

$$x = R_T - \frac{R_T^3}{(R_T + h)^2}$$