

Nombre y apellidos: _____



1. El satélite europeo **Sentinel-2** del programa **Copernicus** se halla en estos momentos en órbita terrestre baja (**LEO**) monitorizando la erupción volcánica de Cumbre vieja en la isla de La Palma. Tiene una masa 1140 kg y orbita a una altura de 786 km sobre la superficie de la Tierra.

Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ km}$. Calcula:

- La **velocidad orbital** del satélite. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
- El **período** de la órbita en **minutos**. (0,5 pt.)
- La **energía necesaria** para su **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)

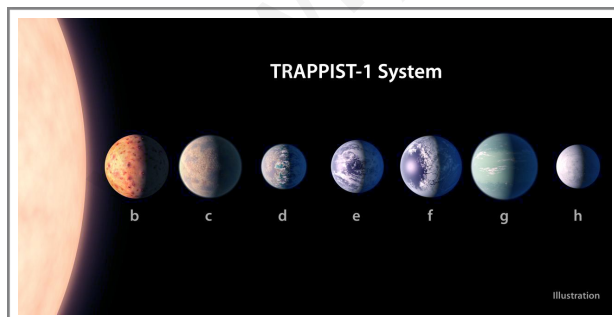
2. Tenemos una **masa** de 100 kg situada en el punto $A(0,0)$ y otra **masa** de 300 kg situada en $B(6,0)$. Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

- Dibuja un **diagrama**. Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto $C(3,4)$. (2 pt.)
- Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de 2 kg desde el punto $C(3,4)$ hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

3. CUESTIÓN: (**Justificada**) Dado un planeta esférico P , con radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, la relación entre la velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta respecto a la velocidad de escape de dicho objeto desde la superficie de la Tierra es:

a) $v_{eP} = 2 \cdot v_{eT}$ b) $v_{eP} = \frac{1}{2} \cdot v_{eT}$ c) $v_{eP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_{eT}$ (1,5 pt.)

4. CUESTIÓN **Práctica**: El telescopio robótico europeo TRAPPIST descubrió un sistema de 7 **exoplanetas** de tipo terráqueo al que se denominó **TRAPPIST-1** orbitando rápidamente en torno a una estrella enana roja. Calcula la **masa en kg** (y la **incertidumbre**) de **la estrella** a partir de las medidas del radio medio orbital, r , y del período, T , de los tres planetas más grandes que lo orbitan (b, c y g: ver tabla adjunta). **¿A cuántas masas solares equivale?** **Justifica** la fórmula que utilices. (**NO** hay que hacer la gráfica). Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, **Sol** $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ (2 pt.)



Planeta	T [días]	r [10^6 km]
b	1,51	1,73
c	2,42	2,37
g	12,35	7,01

1. El satélite europeo **Sentinel-2** del programa **Copernicus** se halla en estos momentos en órbita terrestre baja (**LEO**) monitorizando la erupción volcánica de Cumbre vieja en la isla de La Palma. Tiene una masa 1140 kg y orbita a una altura de 786 km sobre la superficie de la Tierra.

Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6370 \text{ km}$. Calcula:



- La **velocidad orbital** del satélite. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)
- El **período** de la órbita en **minutos**. (0,5 pt.)
- La **energía necesaria** para su **satelización**. (**Justifica** la fórmula) (1,5 pt.)

a) Condición de órbita: $F_g = F_c \Rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$

No conozco ni G ni M , pero a partir de los datos: $g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2$, luego: $v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}}$

$h = 786 \text{ km} = 7,86 \cdot 10^5 \text{ m}$, $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \Rightarrow$ El radio orbital $r = R_T + h = 7,156 \cdot 10^6 \text{ m}$

$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{7,156 \cdot 10^6}} \approx 7458 \text{ m/s} = 7,458 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

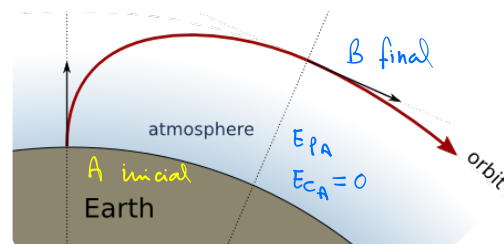
b) $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7,156 \cdot 10^6 \text{ m}}{7,458 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \approx 6029 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 100,5 \text{ min}$

c) Calculamos la energía de satelización: $E_{\text{necesaria}} = E_{m_B} - E_{m_A}$ Energía de satelización [J]

$E_{m_A} + E_{\text{necesaria}} = E_{m_B}$

$-G \frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2$,

En B, está en órbita: $G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2$



$E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m v^2 + G \frac{Mm}{R_T}$

$E_{\text{necesaria}} = -G \frac{Mm}{r} + \frac{1}{2} m G \frac{M}{r} + G \frac{Mm}{R_T}$

$E_{\text{necesaria}} = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T} \right) = GMm \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) \Rightarrow E_{\text{necesaria}} = GMm \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r} \right)$,

$G \cdot M = g_0 \cdot R_T^2$, luego: $E_{\text{necesaria}} = g_0 R_T^2 m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r} \right)$ Energía de satelización [J]

$E_{\text{necesaria}} = 9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2 \cdot 1140 \cdot \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2 \cdot 7,156 \cdot 10^6} \right) \text{ J} \approx 3,95 \cdot 10^{10} \text{ J}$

Como es lógico, la energía de satelización es positiva.

2. Tenemos una **masa** de 100 kg situada en el punto A(0,0) y otra **masa** de 300 kg situada en B(6,0).

Las distancias están medidas en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

a) Dibuja un **diagrama**. Calcula el **vector campo gravitatorio** en el punto C(3,4). (2 pt.)

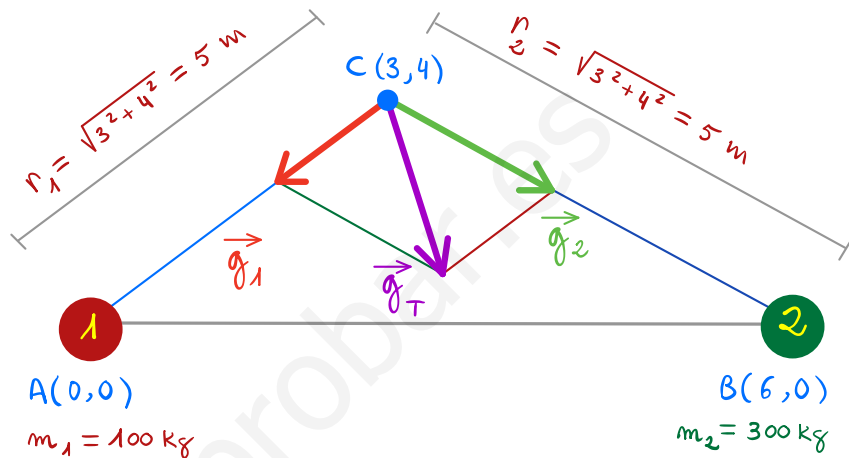
b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de 2 kg desde el punto C(3,4) hasta el **infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia C(3,4)

$$\vec{u}_1 = \frac{(3,4)-(0,0)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(3,4)-(6,0)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

Esperamos un campo más fuerte creado por la masa de 300 kg y que el campo total tenga sentido hacia la derecha y hacia abajo.



Según el principio de superposición

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Campo gravitatorio (forma vectorial) $\left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$

$$\vec{g}_1 = -G \frac{m_1}{r_1^2} \vec{u}_1 = -G \frac{100}{5^2} \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) = -1,6 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 2,13 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_2 = -G \frac{m_2}{r_2^2} \vec{u}_2 = -G \frac{300}{5^2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) = 4,8 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 6,4 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 3,2 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 8,5 \cdot 10^{-10} \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{kg}} \text{ en } C(3,4) \text{ hacia la derecha y hacia abajo.}$$

$$b) W_{A \rightarrow B} = -m \cdot (V_B - V_A) = -(E_{PB} - E_{PA}) , m = 2 \text{ kg} , V_\infty = -G \frac{M}{\infty} = 0 , E_{P\infty} = -G \frac{Mm}{\infty} = 0$$

Podemos utilizar el método de los potenciales o bien el de las energías potenciales.

$$\text{Calculemos ahora el potencial: } V = \frac{E_P}{m} = -G \frac{M}{r} \text{ Potencial gravitatorio (escalar) } \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right]$$

$$V_T = V_1 + V_2 , V_T = -G \cdot \frac{M}{r} = -G \cdot \left[\frac{100}{5} + \frac{300}{5}\right] \simeq -5,34 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$W_{C \rightarrow \infty} = -m \cdot (V_\infty - V_C) = -2 \text{ kg} \cdot (0 - (-5,34 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{kg}})) \simeq -1,07 \cdot 10^{-8} \text{ J} < 0$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realiza una fuerza externa en contra del campo gravitatorio.

Tiene sentido porque la masa se aleja en contra de la atracción gravitatoria de las otras dos.

3. CUESTIÓN: (**Justificada**) Dado un planeta esférico P , con radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, la relación entre la velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta respecto a la velocidad de escape de dicho objeto desde la superficie de la Tierra es:

a) $v_{eP} = 2 \cdot v_{eT}$ **b) $v_{eP} = \frac{1}{2} \cdot v_{eT}$** c) $v_{eP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_{eT}$ (1,5 pt.)

Calculamos primeramente la velocidad de escape.

$E_e + E_p = E_{c\infty} + E_{p\infty}$ (no tenemos en cuenta la E_c)

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = 0 - G \frac{M \cdot m}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = G \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}} \quad \text{Velocidad de escape (fórmula general)}$$

Como la densidad $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$

Además, desde la superficie del planeta $r = R$

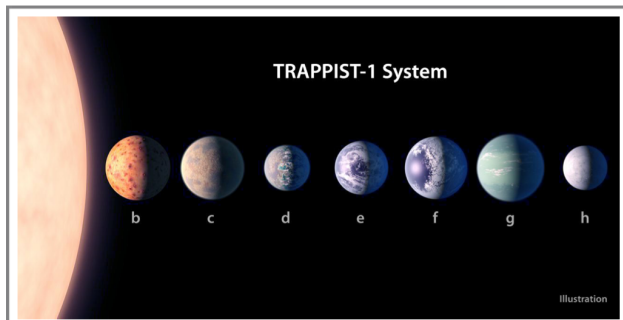
$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}{R}} = \sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^2} = R \cdot \sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi} \quad \text{Velocidad de escape desde la superficie}$$

Como ambos planetas tienen la misma densidad, la v_e comparada sólo depende del radio.

$$R_p = \frac{R}{2} \Rightarrow \frac{v_{eP}}{v_{eT}} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi}}{R \cdot \sqrt{2 \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{v_{eP} = \frac{1}{2} v_{eT}}$$

La respuesta correcta es la (b)

4. CUESTIÓN Práctica: El telescopio robótico europeo TRAPPIST descubrió un sistema de 7 **exoplanetas** de tipo terráqueo al que se denominó **TRAPPIST-1** orbitando rápidamente en torno a una estrella enana roja. Calcula la **masa en kg** (y la **incertidumbre**) de **la estrella** a partir de las medidas del radio medio orbital, r , y del período, T , de los tres planetas más grandes que lo orbitan (b, c y g: ver tabla adjunta). **¿A cuántas masas solares equivale? Justifica** la fórmula que utilices. (**NO** hay que hacer la gráfica). Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, **Sol** $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ (2 pt.)



Planeta	T [días]	r [10^6 km]
b	1,51	1,73
c	2,42	2,37
g	12,35	7,01

De acuerdo con la condición de órbita $F_g = F_c$

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \frac{M}{r} = v^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{En el movimiento circular } v = \frac{2\pi r}{T} \end{array} \right\} G \frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$G \frac{M}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K} \Rightarrow \boxed{T^2 = K \cdot r^3} \quad \begin{array}{l} \text{magnitudes} \\ \text{directamente} \\ \text{proporcionales} \end{array}$$

Podemos también calcular la masa de la estrella analíticamente:

$$\boxed{M_{\star} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}$$

Pasamos a unidades S.I. días $\cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}}$

$$b \Rightarrow T = 130.464 \text{ s} ; r_b = 1,73 \cdot 10^9 \text{ m} ; M_{\star} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1,73 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (130464)^2} \approx 1,800490 \times 10^{29} \text{ kg}$$

$$c \Rightarrow T = 209.088 \text{ s} ; r_c = 2,37 \cdot 10^9 \text{ m} ; M_{\star} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (2,37 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (209088)^2} \approx 1,802270 \times 10^{29} \text{ kg}$$

$$g \Rightarrow T = 1.067.040 \text{ s} ; r_g = 7,01 \cdot 10^9 \text{ m} ; M_{\star} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (7,01 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (1067040)^2} \approx 1,790720 \times 10^{29} \text{ kg}$$

La **media** de la masa estelar , $\overline{M}_{\star} = \frac{1,800 + 1,800 + 1,791}{3} \cdot 10^{29} \approx 1,797 \cdot 10^{29} \text{ kg}$ Tomo 3 decimales arbitrariamente

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Desviación estándar : cuantifica la incertidumbre de la medida.
 $n = 3$

$$\sqrt{\frac{1}{3-1} \cdot ((1,800 - 1,797)^2 + (1,802 - 1,797)^2 + (1,791 - 1,797)^2)} \approx 0,005916 \approx 0,006 \Rightarrow \sigma \approx 0,006 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

La medida se expresa como **media $\pm$ incertidumbre** : $\bar{x} \pm \sigma$,

$$\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} = \frac{1,797 \cdot 10^{29} \text{ kg}}{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \approx 0,09$$

En nuestro caso $\overline{M}_{\star} \pm \sigma = (1,797 \pm 0,006) \cdot 10^{29} \text{ kg}$

$$M_{\star} = 0,09 \cdot M_{\odot}$$