1. (1.5p) Obtén el cociente y el resto de la división $(-8x^4 + 6x^2 + 8x) : (2x^2 - x)$

2. (1.5p) De la división de dos polinomios se sabe que el divisor es $(2x - 3)$, el cociente es $(2x + 3)$ y el resto vale 9. ¿Cuál es el dividendo?

3. (2p) Obtén las raíces y factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9$

4. (2p) Simplifica la fracción algebraica:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$$

5. (3p) Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x} : \dfrac{x^3 + x}{x^3 - x}$

b. $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} \cdot \left[\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x^2}\right]$

1. Obtén el cociente y el resto de la división $(-8x^4 + 6x^2 + 8x) : (2x^2 - x)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-8x^4 & & 6x^2 & +8x & 2x^2 - x \\
\cline{5-5}
8x^4 & -4x^3 & & & \color{red}{-4x^2 - 2x + 2} \\
\cline{1-4}
 & -4x^3 & +6x^2 & +8x & \\
 & 4x^3 & -2x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 4x^2 & 8x & \\
 & & -4x^2 & 2x & \\
\cline{3-4}
 & & & \color{red}{10x} &
\end{array}
$$

2. De la división entre dos polinomios se sabe que el divisor es $(2x - 3)$, el cociente es $(2x + 3)$ y el resto vale 9. ¿Cuál es el dividendo?

$$\text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto} = (2x - 3)(2x + 3) + 9 = 4x^2 - 9 + 9 = \color{red}{4x^2}$$

3. Obtén las raíces y factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9$

Buscamos las raíces del polinomio resolviendo la ecuación $2x^3 - 7x^2 + 9 = 0$:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & 0 & 9 \\
-1 & & -2 & 9 & -9 \\
\hline
 & 2 & -9 & 9 & 0
\end{array}
$$

Luego $x_1 = -1$. Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado $2x^2 - 9x + 9 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4}$$

$$x_2 = \frac{9 + 3}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad ; \quad x_3 = \frac{9 - 3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Considerando las tres raíces obtenidas y anteponiendo el coeficiente principal:

$$2x^3 - 7x^2 + 9 = 2(x + 1)(x - 3)\left(x - \frac{3}{2}\right) = \color{red}{(x + 1)(x - 3)(2x - 3)}$$

4. Simplifica la fracción algebraica:

$$\frac{x^2-2x}{x^3-2x^2+2x-4}$$

- Se factoriza el polinomio del numerador sacando factor común $x^2-2x=x(x-2)$
- Buscamos las raíces resolviendo la ecuación de tercer grado $x^3-2x^2+2x-4=0$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Luego $x_1=2$. Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2+2=0$:

$$x^2+2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=-2 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{-2}=\nexists$$

El polinomio sólo tiene una raíz real $x=2$. Su expresión factorizada es $(x-2)(x^2+2)$

- Simplificamos la fracción algebraica:

$$\frac{x^2-2x}{2x^3-7x^2+9}=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x^2+2)}=\frac{x}{x^2+2}$$

5. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\frac{x^2+1}{x^2-x}:\frac{x^3+x}{x^3-x}$

b. $\frac{x^2}{x^2-4}\cdot\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^2}\right]$

a. Se factorizan los polinomios del numerador y denominador:

- $x^2+1 \quad \rightarrow$ No se puede factorizar pues no tiene raíces reales
- $x^2-x=x(x-1)$
- $x^3+x=x(x^2+1) \quad \rightarrow \quad$ No se puede factorizar el polinomio de segundo grado
- $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

Sustituyendo y simplificando:

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)}:\frac{x(x^2+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(x^2+1)x(x-1)(x+1)}{x(x-1)x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x}$$

b. $$\frac{x^2}{x^2-4}\cdot\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^2}\right] = \frac{x^2}{x^2-4}\cdot\left[\frac{x}{2x^2}-\frac{2}{2x^2}\right] = \frac{x^2}{x^2-4}\cdot\frac{x-2}{2x^2}=\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x+2)2x^2}=\frac{1}{2(x+2)}$$