PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$.

$a)$ Estúdiese para qué valores del parámetro k la matriz A tiene inversa.

$b)$ Determínese, para $k = 1$, la matriz X tal que $X \cdot A = I$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^3 + k + k^2 - 7k = k^3 + k^2 - 6k =$$

$$= k(k^2 + k - 6) = 0 \Rightarrow k_1 = 0;\ \ k^2 + k - 6 = 0;\ \ k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow k_2 = -3, k_3 = 2.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{-3, 0, 2\}.}$$

$b)$

Para $k = 1$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} = A^{-1};\ \ X \cdot I = A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}$.

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 7 = -4. \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Sea S la región del plano definida por: $2x - y \geq 1;\ 2x - 3y \leq 6;\ x + 2y \geq 3;$ $x + y \leq 8;\ \ y \leq 3.$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

----

a)

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x - y \geq 1 \\ 2x - 3y \leq 6 \\ x + 2y \geq 3 \\ x + y \leq 8 \\ y \leq 3 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 2x - y \geq 1 \Rightarrow y \leq 2x - 1 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	2	4
y	3	7

② $\Rightarrow 2x - 3y \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{2x-6}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

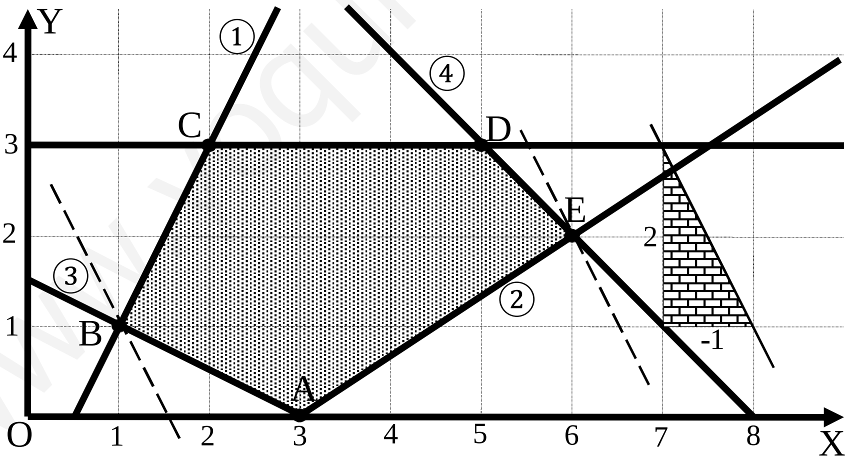
x	3	6
y	0	2

③ $\Rightarrow x + 2y \geq 3 \Rightarrow y \leq \frac{3-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	3	1
y	0	1

④ $\Rightarrow x + y \leq 8 \Rightarrow y \leq 8 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	4	8
y	4	0



Los vértices de la sección factible, además de O(0, 0), son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} -2x + 3y = -6 \\ 2x + 4y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow A(3, 0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow B(1, 1).$ $\quad C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(2, 3).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 8 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow D(5, 3).$ $\quad E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ x + y = 8 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} -2x + 3y = -6 \\ 2x + 2y = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow E(6, 2).$

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.

$b)$

La función de rendimiento es $f(x, y) = 2x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(3, 0) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6 + 1 = 6.$

$B \Rightarrow f(1, 1) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3.$

$C \Rightarrow f(2, 3) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4 + 3 = 7.$

$D \Rightarrow f(5, 3) = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 10 + 3 = 13.$

$E \Rightarrow f(6, 2) = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 12 + 2 = 14.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ E\ y\ el\ mínimo\ en\ el\ punto\ B}.$

También se hubieran obtenido los punto E y B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{-1}}.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ es\ 14\ y\ el\ mínimo, 3}.$

****

3º) Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ \ si \ \ x<1 \\ \frac{ax+b}{x} \ \ si \ 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x^3+1} \ \ si \ \ x>2 \end{cases}$.

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros $a \ y \ b$ para que $f(x)$ sea continua en $x=1 \ y \ x=2$.

b) Calcúlese, para $a=4 \ y \ b=-2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1 \ y \ x=2$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en $R \forall a,b \in R$. Se trata de determinar los valores de $a \ y \ b$ para que sea derivable en los puntos críticos $x=1$ y $x=2$.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$\left. \begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=1+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax+b}{x}=\frac{a+b}{2}=f(1)=a+b \end{array} \right\} \Rightarrow a+b=2. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{ax+b}{x}=\frac{2a+b}{2}=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^3+1}=\sqrt{9}=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2a+b}{2}=3; \ \ 2a+b=6. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{r} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{r} -a-b=-2 \\ 2a+b=6 \end{array} \right\} \Rightarrow a=4, \ \ b=-2.$$

$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ x=1 \ y \ x=2 \ para \ a=4 \ y \ b=-2}$.

b)

Para $a=4 \ y \ b=-2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1 \ y \ x=2$, la función tiene la expresión $f(x)=\frac{4x-2}{x}$ y sus ordenadas correspondientes al intervalo $(1,2)$ son todas positivas.

Teniendo en cuanta lo anterior, la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_1^2 \frac{4x-2}{x}\cdot dx=\int_1^2\left(4-\frac{2}{x}\right)\cdot dx=[4x-2Lx]_1^2=[4x-Lx^2]_1^2=$$

$$=(4\cdot 2-L4)-(4\cdot 1-L1)=8-L4-4+0=\underline{4-L4\cong 2{,}614 \ u^2}.$$

****

4º) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(A/B)=\frac{3}{4}$ y $P(B/A)=\frac{1}{4}$.

a) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) Calcúlese $P(\overline{A}/\overline{B})$.

----

a)

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $A\cap B=\emptyset$, o $P(A\cap B)=0$.

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\ \Rightarrow\ P(B\cap A)=P(B/A)\cdot P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}\neq 0.$$

$\underline{\textit{Queda probado que los sucesos A y B no son incompatibles.}}$

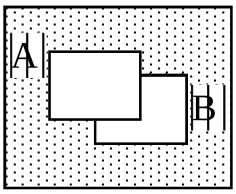
$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ \Rightarrow\ P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A/B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(A/B)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}=P(A\cap B).$$

$\underline{\textit{Queda probado que los sucesos A y B son independientes.}}$

b)

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}.\quad (1)$$



$$P=P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\right)=1-\frac{12+4-3}{16}=1-\frac{13}{16}=$$

$$=\frac{16-13}{16}=\frac{3}{16}.$$

Sustituyendo en (1):

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{1-P(B)}=\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{16}=\underline{\frac{1}{4}}.$$

****

5º) El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{x} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 unidades.

----

a)

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = \mathbf{1{,}96}$.

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96)$.

Datos: $\overline{x} = 30; \ \ n = 64; \ \ \sigma = 5; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(30 - 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}}; \ 30 + 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}}\right); \ (30 - 1'96 \cdot 0{,}625; \ 30 + 1'96 \cdot 0{,}625);$

$(30 - 1'225; \ 30 + 1'225)$

$\underline{I.C._{95\ \%} \ \ (28'775, \ \ 31'225).}$

b)

$1 - \alpha = 0{,}99 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = \mathbf{2{,}575}$.

$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \ \rightarrow z = 2{,}575)$.

Datos: $\sigma = 5; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575; \ \ E = \frac{10}{2} = 5$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}575 \cdot \frac{5}{5}\right)^2 =$

$= (2{,}575 \cdot 1)^2 = 2{,}575^2 = 6{,}63.$

$\underline{El \ tamaño \ mínimo \ de \ la \ muestra \ tiene \ que \ ser \ de \ 7 \ empleados.}$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r}(a-1)x+y+z=1\\ x+(a-1)y+(a-1)z=1\\ x+az=1\end{array}\right\}$ dependientes del parámetro real a:

a) Discútase el sistema según los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a=3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & a-1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & a-1 & 1\\ 1 & 0 & a & 1\end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}a-1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & a-1\\ 1 & 0 & a\end{vmatrix}=a(a-1)^2+(a-1)-(a-1)-a=$$

$$=a(a^2-2a+1)-a=a^3-2a^2+a-a=a^3-2a^2=a^2(a-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1=a_2=0;\ a_3=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases}a\neq 0\\ a\neq 2\end{cases} \Rightarrow Ran\ M=Ran\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+1+1-1=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Ran\ M=2;\ Ran\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Ran\ M=Ran\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = 3$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6+2-2-3}{12+2-2-3} = \frac{8-5}{14-5} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{6+1+2-1-4-3}{9} = \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{4+1-2-1}{9} = \frac{5-3}{9} = \frac{2}{9}.$$

$\underline{Solución: x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{9}, z = \frac{2}{9}}.$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x \ \ si \ \ x < 0 \\ -x^2 + 3x \ si \ x \geq 0 \end{cases}$.

a) Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Determínense los valores de $a \in R$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $m = -2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x^2 + 3x) = 0 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0}.$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 \ \ si \ \ x < 0 \\ -2x + 3 \ si \ x \geq 0 \end{cases}.$$

$$f'(0^-) = 0 + 2 = 2. \qquad f'(0^+) = -0 + 3 = 3 \ \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = 0}.$$

b)

Para $x = a$ los puntos de tangencia son $M(a, a^2 + 2a)$ y $N(a, -a^2 + 3a)$, según que el valor de a sea menor o mayor que 0, respectivamente.

El valor de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(a) = \begin{cases} 2a + 2 \ \ si \ \ x < 0 \\ -2a + 3 \ si \ x \geq 0 \end{cases}.$$

Para $a < 0$:

$f'(a) = -2 \Rightarrow 2a + 2 = -2; \ \ a + 1 = -1 \Rightarrow \underline{a = -2}.$

El punto de tangencia es $M(-2, 0)$.

Recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -2(x + 2) = -2x - 4.$

$$\underline{t_1 \equiv 2x + y + 4 = 0}.$$

Para $a > 0$:

$f'(a) = -2 \Rightarrow -2a + 3 = -2; \ \ 2a = 5 \Rightarrow \underline{a = \frac{5}{2}}.$

El punto de tangencia es $N(a, -a^2 + 3a)$:

$-\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{25}{4} + \frac{15}{2} = \frac{30-25}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right).$

Recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{5}{4} = -2\left(x - \frac{5}{2}\right) = -2x + 5;$

$4y - 5 = -8x + 20.$

$$\underline{t_2 \equiv 8x + 4y - 30 = 0}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-9}$.

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2-9}=1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y=1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2-9=0 \Rightarrow x_1=-3, x_2=3.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x=-3, x=3}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow R-\{-3,3\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-9)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-9-x^2+3)}{(x^2-9)^2}=\frac{-12x}{(x^2-9)^2}.$$

$$Para\ x<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty,-3)\cup(-3,0)}.$$

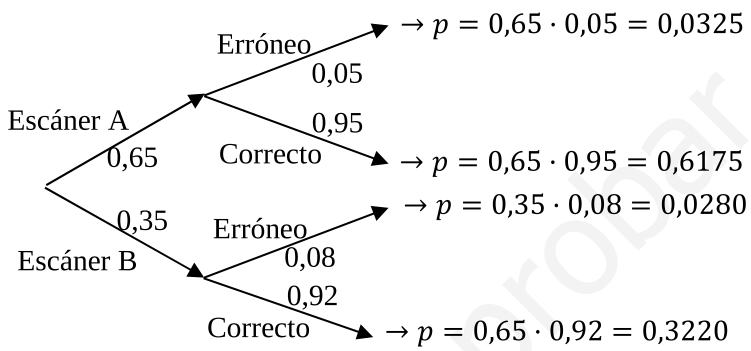
$$Para\ x>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (0,3)\cup(3,+\infty)}.$$

****

4º) Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnostico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.



a)

$$P = P(E/A) + P(E/B) = 0{,}65 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}08 = 0{,}0325 + 0{,}0280 =$$

$$= \underline{0{,}0605}.$$

b)

$$P = P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E/A)}{P(E/A)+P(E/B)} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}05}{0{,}65 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}08} = \frac{0{,}0325}{0{,}0605} = \underline{0{,}5372}.$$

****

5º) El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\overline{x} = 8{,}1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(7'766;\ 10'233)$ para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

----

a)

$1 - \alpha = 0{,}90 \ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = \mathbf{1{,}645}$.

$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645)$.

Datos: $\overline{x} = 8{,}1;\ \ n = 100;\ \ \sigma = 9;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(8{,}1 - 1'645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}};\ 8{,}1 + 1'645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}\right)$;

$(8{,}1 - 1'645 \cdot 0{,}9;\ 8{,}1 + 1'645 \cdot 0{,}9)$; $\ (8{,}1 - 1'4805;\ 8{,}1 + 1'4805)$

$$\underline{I.C._{90\ \%}\ (6'6195;\ 9'5805).}$$

b)

$E = \frac{10'233 - 7'766}{2} = \frac{2{,}467}{2} = 1'2335$.

Datos: $\sigma = 9;\ \ n = 144;\ \ E = 1'2335$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1{,}2335 \cdot \sqrt{144}}{9} = \frac{1{,}2335 \cdot 12}{9} = 1{,}645$.

Por lo visto en el apartado anterior:

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 90\ \%.}$$

****