

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

OPCIÓN A

1º) Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}$.

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1} ?

Nota: C^t denota la matriz traspuesta de C.

a)

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual que el producto de los determinantes de las matrices; que el determinante de la traspuesta de una matriz es igual que el determinante de la matriz y que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^t| \cdot \frac{1}{|A|} = |C| \cdot |C^t| = 2 \cdot |C| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\underline{|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}| = 4.}$$

b)

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}}}.$$

La matriz M no puede tener inversa por no ser cuadrada.

2º) Sea S la región del plano definida por: $y + x \leq 5$; $y - x \leq 3$; $\frac{1}{2}x - y \leq -2$.

a) Representétese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

a)

$$\left. \begin{array}{l} y + x \leq 5 \\ y - x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x - y \leq -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ -x + y \leq 3 \\ x - 2y \leq -4 \end{array} \right\}.$$

① $\Rightarrow x + y \leq 5 \Rightarrow y \leq 5 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	5
y	5	0

② $\Rightarrow -x + y \leq 3 \Rightarrow y \leq x + 3 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	3
y	3	6

③ $\Rightarrow x - 2y \leq -4 \Rightarrow y \leq \frac{x+4}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

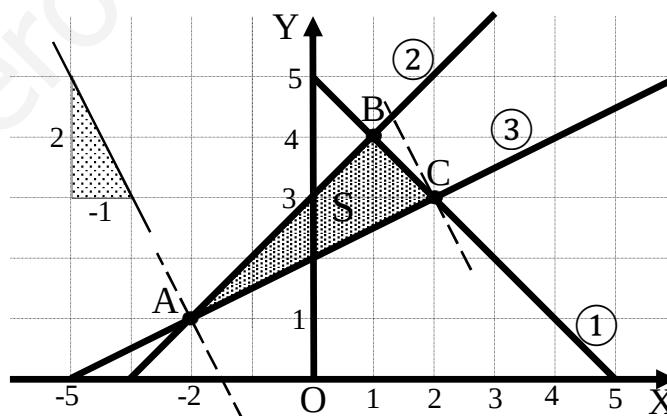
x	0	4
y	2	4

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A(-2, 1)}.$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ -x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{B(1, 4)}.$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 2y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{C(2, 3)}.$



b)

Los valores de la función de objetivos, $f(x, y) = 2x + y$, en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(-2, 1) = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -4 + 1 = -3.$

$B \Rightarrow f(1, 4) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 2 + 4 = 6.$

$C \Rightarrow f(2, 3) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4 + 3 = 7.$

El máximo es 7 y se produce en el punto C.

El mínimo es -3 y se produce en el punto A.

También se hubieran obtenido el punto A como mínimo y C como máximo por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \mathbf{m} = -2.$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 + 8$.

a) Determinése el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

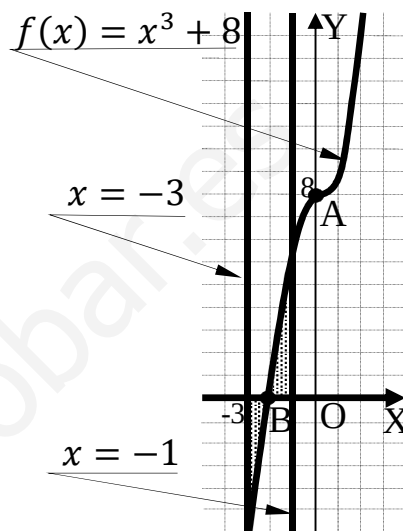
a)

El punto de corte de la función con el eje de ordenadas es $A(0, 8)$.

El punto de corte de la función con el eje de abscisas es $B(-2, 0)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$\begin{aligned}
 S &= - \int_{-3}^{-2} f(x) \cdot dx + \int_{-2}^{-1} f(x) \cdot dx = \\
 &= \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8) \cdot dx + \int_{-2}^{-1} (x^3 + 8) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-2}^{-1} = \\
 &= \frac{(-3)^4}{4} + 8 \cdot (-3) - \left[\frac{(-2)^4}{4} + 8 \cdot (-2) \right] + \frac{(-1)^4}{4} + 8 \cdot (-1) - \left[\frac{(-2)^4}{4} + 8 \cdot (-2) \right] = \\
 &= \frac{81}{4} - 24 - \frac{16}{4} + 16 + \frac{1}{4} - 8 - \frac{16}{4} + 16 = \frac{50}{4} = \underline{\underline{\frac{25}{2} u^2 = 12,5 u^2}}.
 \end{aligned}$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$\text{El punto de tangencia es el siguiente: } f(1) = 1^3 + 8 = 9 \Rightarrow \mathbf{P(1, 9)}.$$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 9 = 3 \cdot (x - 1) = 3x - 3 \Rightarrow \underline{\underline{Tangente: t \equiv 3x - y + 6 = 0.}}$$

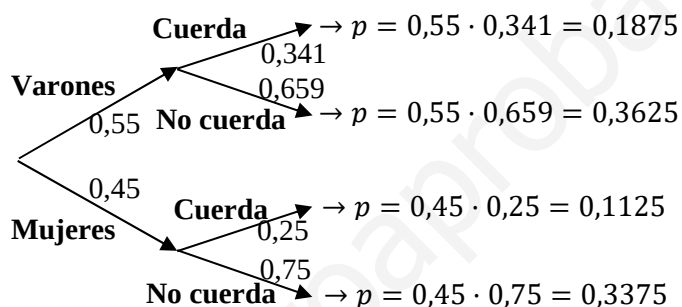
4º) Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Siendo x el % de hombres que tocan instrumentos de cuerda, tiene que ser:

$$0,55 \cdot x + 0,45 \cdot 0,25 = 0,30 \Rightarrow x = \frac{0,30 - 0,45 \cdot 0,25}{0,55} = \frac{0,1875}{0,55} = \mathbf{0,341}.$$



a)

$$P(M|C) = \frac{P(C|M) \cdot P(M)}{P(C)} = \frac{0,25 \cdot 0,45}{0,3} = \frac{0,1125}{0,3} = \underline{0,3750}.$$

b)

$$P(V \cap C) = 0,55 \cdot 0,341 = \underline{0,1875}.$$

5º) La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) Determinése el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\bar{X}$, sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

a)

Se conoce: $\sigma = 50$, $E = \frac{10}{2} = 5$.

Para un nivel de confianza del 95 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 50}{5} \right)^2 = (1,96 \cdot 10)^2 = 19,6^2 = 384,16.$$

El mínimo tamaño de la muestra debe ser, como mínimo, de 385 días.

b)

Se conoce: $\sigma = 50$, $n = 25$, $\bar{X} = 950$.

Normalizando los datos: $\bar{X} \rightarrow \left(N, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow \bar{X} \rightarrow \left(950, \frac{50}{\sqrt{25}} \right) = (950, 10)$.

$$P(\bar{X} \leq 940) = P\left(\frac{\bar{X} - 950}{10} \leq \frac{940 - 950}{10} \right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

La probabilidad de que $\bar{X} \leq 940$ es del 15,87 %.

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0. \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4 + a + 6 - 2 - 3a - 4 = 0; \quad 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\text{Para } a \neq 2 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = 2 \text{ es } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A' = 3.$$

$$\underline{\text{Para } a = 2 \Rightarrow \text{Rang } A = 2; \text{Rang } A' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}}$$

b)

Para $a = 0$ el sistema resulta
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$
 que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1. \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}. \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Para $a = 0$ las soluciones del sistema son: $x = 1, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{2}$.

www.yoquieroaprobar.es

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+b}{x-2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

a) Determinése para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x=-1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+b}{x-2} = \frac{1+b}{-3} = f(-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 2 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{1+b}{-3} = 2; 1+b = -6 \Rightarrow \mathbf{b = -7}.$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \frac{1-6+5}{1-4+3} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+6}{2x+4} = \frac{-2+6}{-2+4} = 2.$$

La función $f(x)$ es continua en $x = -1$ para $x = b = -7$.

b)

$$\text{La función resulta: } f(x) = \begin{cases} \frac{-x-7}{x-2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, siendo k el valor de la función cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-7}{x-2} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1.$$

La rectas $y = -1$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales de la función.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que anulan el denominador de las expresiones racionales.

Nótese que la recta $x = 2$ no es asíntota vertical de la función por ser $2 > -1$.

$$x^2 + 4x + 3 = 0; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1 \Rightarrow \mathbf{x_1 = -3, x_2 = -1}.$$

Nótese que ninguna de las rectas $x = -3$ y $x = -1$ son asíntotas verticales de la función por no ser ninguno de los valores mayores que -1 .

Otra forma: no puede tener asíntotas verticales por ser $D(f) = \mathbb{R}$.

Asíntotas oblicuas: *No tiene*.

Las asíntotas oblicuas son incompatibles con las asíntotas horizontales.

También porque para tener asíntotas oblicuas una función racional tiene que ser el grado del numerador una unidad mayor que el grado del denominador, cosa que no ocurre con ninguna de las partes de la función.

3º) Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es $f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$:

a) Determinése la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

b) Determinése los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (6x^2 + 4x - 2) \cdot dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 2x + C = \\ = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C.$$

$$f(0) = 5 \Rightarrow C = 5.$$

$$\underline{f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 4x - 2 = 0; \quad 3x^2 + 2x - 1 = 0; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 3} = \\ = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}.$$

Por ser la función polinómica, las raíces de la primera derivada dividen el dominio de la función (que es $\mathbb{R}$) en los tres siguientes intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{3}, +\infty)$, que son, alternativamente, crecientes y decrecientes.

Considerando el punto sencillo $x = 0 \in (-1, \frac{1}{3})$, se observa que es negativo.

De lo anterior se deducen los intervalos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty).}$$

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1, \frac{1}{3}).}$$

d)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es

suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 12x + 4.$$

$$f''(-1) = -12 + 4 = -8 < 0 \Rightarrow \textbf{Máximo relativo para } x = -1.$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5 = -2 + 2 + 2 + 5 = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Máximo: } A(-1, 7)}.$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 12 \cdot \frac{1}{3} + 4 = 4 + 4 = 8 > 0 \Rightarrow \textbf{Mínimo relativo para } x = \frac{1}{3}.$$

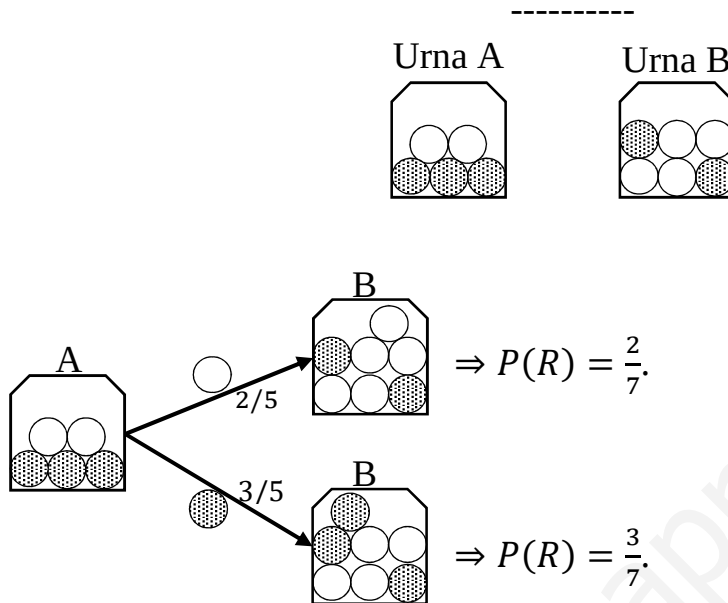
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{2}{27} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 5 = \frac{2+6-18+135}{27} =$$
$$= \frac{143-18}{27} = \frac{125}{27} \Rightarrow \underline{\text{Mínimo: } B\left(\frac{1}{3}, \frac{125}{27}\right)}.$$

4º) Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

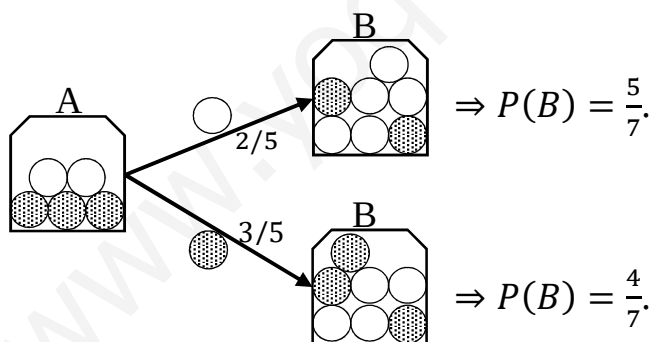
b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

a)



$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{35} + \frac{9}{35} = \underline{\underline{\frac{13}{35}}}$$

b)



$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \underline{\underline{\frac{6}{35}}}$$

5º) El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\bar{x} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ .

b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y si se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

a)

Conocemos: $\sigma = 5$ gramos; $n = 25$; $\bar{x} = 70$ gramos.

Para un nivel de confianza del 95 % es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

$$I_{95\%} = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(70 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}; 70 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \right) = \\ = (70 - 1,96; 70 + 1,96) = (68'04; 71'96)$$

$$\underline{I_{95\%} = (68'04; 71'96)}.$$

b)

El peso de una gamba sería $\bar{X} = \frac{855}{12} = 71,25$.

Se conoce: $\sigma = 5$, $n = 12$, $\bar{X} = 71,25$.

Normalizando los datos: $\bar{X} \rightarrow \left(N, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow \bar{X} \rightarrow \left(70, \frac{5}{\sqrt{12}} \right) = (70, 1,44)$.

$$P(\bar{X} \geq 71,25) = P\left(\frac{\bar{X} - 70}{1,44} \geq \frac{71,25 - 70}{1,44} \right) = P(Z \geq 0,87) = 1 - P(Z < 0,87) = \\ = 1 - 0,8079 = 0,1922.$$

La probabilidad de que $\bar{X} > 71,25$ es del 19,22 %.
