PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger *una* de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} y\ B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$a)$ Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

$b)$ Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase el ecuación $AX = B$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 4 - 2a - 4 = a(a-2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 2.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{0, 2\}}.$$

$b)$

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad |A| = 3 \cdot (3-2) = 3. \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}{3} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}.$$

$$AX = B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

a) Determínense en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

----

a)

$$f(x) = 2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 2).$$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de una recta horizontal es $m = 0$.

$$f'(x) = 6x^2 - 8.$$

$$f'(x) = m \Rightarrow 6x^2 - 8 = 0;\ \ 3x^2 - 4 = 0;\ \ x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

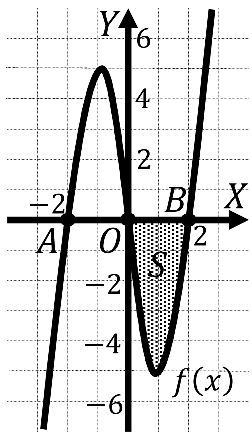
Los puntos de tangencia pedidos son los siguientes:

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{4}{3} - 2\right) = 2\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{9}\sqrt{3}\right)}.$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{4}{3} - 2\right) = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{8}{9}\sqrt{3}\right)}.$$

b)

La función $f(x) = 2x^3 - 8x$ es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$.



Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 4) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = -2 \to A(-2,0). \\ x_3 = 2 \to B(2,0) \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación, de forma aproximada, es la que figura en la gráfica adjunta.

Teniendo en cuenta el signo negativo de las ordenadas de la función en el intervalos $(0,2)$, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_2^0 f(x) \cdot dx = \int_2^0 (2x^3 - 8x) \cdot dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_2^0 = \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_2^0 =$$

$$= 0 - \left(\frac{2^4}{2} - 4 \cdot 2^2\right) = -8 + 16 = 8.$$

$$\underline{S = 8\,u^2}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{x^2-9} & si\ \ x<3 \\ x^2-4 & si\ \ x\geq 3 \end{cases}$:

a) Estúdiese la continuidad de f.

b) Determínense si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen, son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=3 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{x^2-9}=\frac{27}{0}=\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3}(x^2-4)=9-4=5=f(3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ en\ x=3\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito.}$$

b)

En el intervalo $(-\infty,3)$ la función tiene las siguientes asíntotas:

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$\left.\begin{array}{l} k=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2-9}=+\infty \\ k=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-9}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2-9=0;\ \ x^2=9 \Rightarrow x_1=-3, x_2=3.$$

$$\underline{Las\ rectas\ x=-3\ y\ x=3\ son\ asíntotas\ verticales.}$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 - 9x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2 - 9} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x}.$$

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función no tiene asíntotas por ser polinómica.

****

4º) Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicios regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio:

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

$$Datos: P(E) = \frac{2}{5};\ \ P(D) = \frac{2}{3};\ \ P(E/D) = \frac{9}{25}.$$

a)

$$P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} \Rightarrow P(E \cap D) = P(D) \cdot P(E/D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{6}{25}.$$

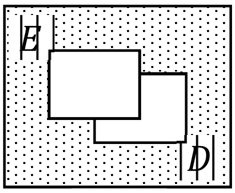
Dos sucesos E y D son independientes cuando $P(E \cap D) = P(E) \cdot P(D)$:

$$P(E) \cdot P(D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \neq \frac{6}{25}.$$

$$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ E\ y\ D\ no\ son\ independientes.}$$

b)

$$P = P(\overline{E} \cap \overline{D})$$



$\overline{E} \cap \overline{D}$

$$P = P(\overline{E} \cap \overline{D}) = 1 - P(E \cup D). \quad (*)$$

$$P(E \cup D) = P(E) + P(D) - P(E \cap D) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{6}{25} = \frac{30+50-18}{75} = \frac{62}{75}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido para $P(E \cup D)$, resulta:

$$P = 1 - P(E \cup D) = 1 - \frac{62}{75} = \frac{75-62}{75} = \underline{\frac{13}{75} = 0{,}1733}.$$

****

5º) Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 500 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=15;\ \overline{x}=500;\ \sigma=25;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(500-1{,}96\cdot\frac{25}{\sqrt{15}};\ 500+1{,}96\cdot\frac{25}{\sqrt{15}}\right);$

$(500-1{,}96\cdot 6{,}4550;\ 500+1{,}96\cdot 6{,}4550);\ \ (500-12{,}6517;\ 500+12{,}6517).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(487{,}3483;\ 512{,}6517)}.$$

b)

$Datos$: $\mu=560;\ n=50;\ \sigma=25.$

$X\rightarrow N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(560;\frac{25}{\sqrt{50}}\right)=N(560;\ 3{,}54).$

Tipificando la variable: $Z=\frac{X-560}{3{,}54}$.

$P=P(X\geq 565)=P\left(Z\geq\frac{565-560}{3{,}54}\right)=P\left(Z\geq\frac{5}{3{,}54}\right)=P(Z\geq 1{,}41)=$

$=1-P(Z<1{,}41)=1-0{,}9207=\underline{0{,}0793}.$

****

OPCIÓN B

1º) Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1.000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9.000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.

b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínese el largo del estanque y su coste.

----

a)

Sean x e y el número de metros de ancho y largo que tiene el estanque, respectivamente.

Las restricciones son: $$\left.\begin{array}{r} x \geq 2;\ \ y \leq 5 \\ y \geq 2x \\ y \leq 3x \\ 1.000x + 500y \leq 9.000 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x \geq 2;\ \ y \leq 5 \\ y \geq 2x \\ y \leq 3x \\ 2x + y \leq 18 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow y \geq 2x \Rightarrow P(1,0) \rightarrow No.$

x	0	5
y	0	10

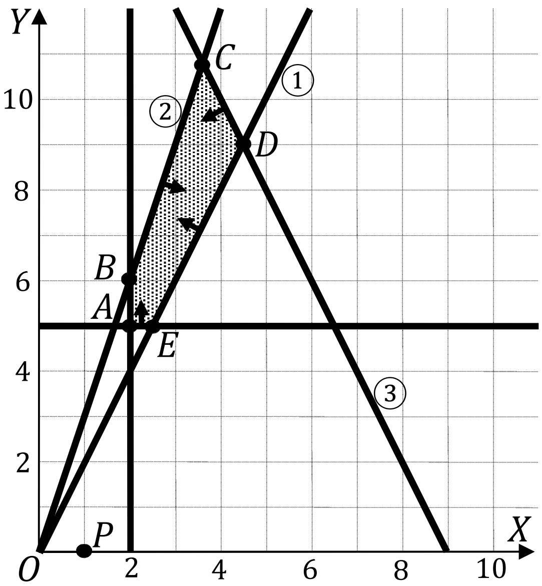
② $\Rightarrow y \leq 3x \Rightarrow P(1,0) \rightarrow Si.$

x	0	3
y	0	9

③ $\Rightarrow 2x + y \leq 18 \Rightarrow y \leq 18 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	9	6
y	0	6

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2,5).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow B(2,4).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 3x \\ 2x + y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 3x = 18;$

$5x = 18;\ \ x = \frac{18}{5};\ \ y = \frac{54}{5} \Rightarrow C\left(\frac{18}{5}, \frac{54}{5}\right).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 2x \\ 2x + y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 2x = 18;\ \ 4x = 18;\ \ x = \frac{9}{2};\ \ y = 9 \Rightarrow D\left(\frac{9}{2}, 9\right).$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 5 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, 5\right).$$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 1.000x + 500y$.

Por la figura se deduce que el mayor ancho del estanque se produce en el punto $D\left(\frac{9}{2}, 9\right) \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

$$\underline{El\ mayor\ largo\ del\ estanque\ es\ de\ 4{,}5\ metros.}$$

El valor de la función de objetivos en el punto D es el siguiente:

$$C \Rightarrow f\left(\frac{9}{2}, 9\right) = 1.000 \cdot \frac{9}{2} + 500 \cdot 9 = 4.500 + 4.500 = 9.000.$$

$$\underline{El\ coste\ es, exactamente, los\ 9.000\ euros\ de\ que\ se\ dispone.}$$

****

2º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}$ y B tal que $(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}$.

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese B^{-1}.

----

a)

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{vmatrix}=18+60+64-40-18-96=142-154=-12.$$

$$A^t=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 8 & 1 & 3\\ 10 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}8 & 3\\ 10 & 6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 1\\ 10 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 4\\ 10 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 10 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 8 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 2\\ 8 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -18 & 6\\ -4 & -22 & 14\\ 2 & 23 & -13\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -18 & 6\\ -4 & -22 & 14\\ 2 & 23 & -13\end{pmatrix}}{-12}\Rightarrow \underline{A^{-1}=-\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}0 & -18 & 6\\ -4 & -22 & 14\\ 2 & 23 & -13\end{pmatrix}}.$$

b)

Es muy importante tener en cuenta que $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

$$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}\cdot A;\ \ B^{-1}\cdot I=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}\cdot A\Rightarrow$$

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}\cdot A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

----

a)

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow \underline{A(0, 3)}$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$. Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -5 & 3 \\
1 & & 1 & 2 & -3 \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Los puntos de corte con el eje X son $\underline{B(-3, 0)\ y\ C(1, 0)}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = +\infty.$$

$$\underline{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\ y\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

b)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

$m = f'(0) = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 3;\ \ 3x^2 + 2x - 8 = 0;\ \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2 \cdot 3} =$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \frac{-1 \pm 5}{3} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = \frac{4}{3}$.

$\underline{La\ pendiente\ de\ la\ tangente\ a\ f(x)\ es\ 3\ para\ x_1 = -2\ y\ x_2 = \frac{4}{3}}$.

****

4º) Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0{,}3; P(B/A) = 0{,}4;\ P(B/\overline{A}) = 0{,}6$. Calcúlese: $a)\ P(A/B)$. $\quad b)\ P(\overline{A}/\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

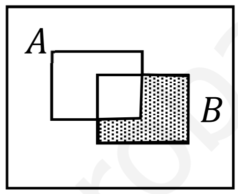
$a)$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \quad (*)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0{,}4 \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot 0{,}4 = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B\cap\overline{A})}{1-P(A)} = \frac{P(B\cap\overline{A})}{1-0{,}3} = \frac{P(B\cap\overline{A})}{0{,}7} = 0{,}6 \Rightarrow P(B\cap\overline{A}) = 0{,}42.$$

$$P(B\cap\overline{A}) = P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow$$



$B\cap\overline{A} = B - (A\cap B)$

$$\Rightarrow P(B) = P(B\cap\overline{A}) + P(A\cap B) =$$

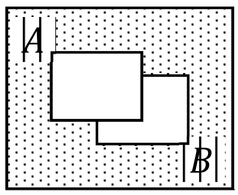
$$= 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}12}{0{,}54} = \underline{0{,}2222}.$$

$b)$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{1-P(B)}. \quad (**)$$



$\overline{A}\cap\overline{B} = 1 - (A\cup B)$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) =$$

$$0{,}30 + 0{,}54 - 0{,}12 = 0{,}72.$$

$$P = P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28.$$

Sustituyendo el valor hallado en la expresión (**):

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{1-P(B)} = \frac{0{,}28}{1-0{,}54} = \frac{0{,}28}{0{,}46} = \underline{0{,}6087}.$$

****

5º) Para estudiar el abastecimiento laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0{,}22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1.000 trabajadores, se encontró que 250 habían faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguno justificación.

----

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha = 0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}99 = 0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$
$(1-0{,}005 = 0{,}9950 \;\rightarrow z = 2{,}575).$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575;\;\; E = 0{,}04;\;\; p = 0{,}22;\;\; q = 0{,}78.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \;\Rightarrow\; n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot p \cdot q}{E^2} = \frac{2{,}575^2 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}78}{0{,}04^2} = \frac{6{,}6306 \cdot 0{,}1716}{0{,}0016} =$

$= \frac{1{,}1378}{0{,}0016} = 711{,}13.$

$\underline{\text{En la muestra deben seleccionarse al menos } 712 \text{ trabajadores}.}$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 1.000;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\;\; E = 0{,}04;\;\; p = \frac{250}{1.000} = 0{,}25;\;\; q = 0{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$\left(0{,}25 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{1.000}};\; 0{,}25 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{1.000}}\right);$

$$(0{,}25 - 1{,}96 \cdot 0{,}0137;\ 0{,}25 + 1{,}96 \cdot 0{,}0137);\ \ (0{,}25 - 0{,}0268;\ 0{,}25 + 0{,}0268).$$

$$\underline{I.C._{95\ \%} = (0{,}2232;\ 0{,}2768)}.$$

****