PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

1º) Sea $a \in R$. Considera las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; e \; Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

a) Determina los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B) \cdot X = Y$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a + a = 0; \;\; 4a = 0; \;\; a = 0.$$

$$\underline{La \; matriz \; A \; es \; invertible \; \forall a \in R - \{0\}}.$$

b)

$(A - B) \cdot X = Y; \;\; (A - B)^{-1} \cdot (A - B) \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot Y;$

$I \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot Y \Rightarrow \underline{X = (A - B)^{-1} \cdot Y}.$

Para $a = 1 \Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Se obtiene la inversa de $(A - B)$ por el método de Gauss-Jordan:

$$(A-B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&0&1&0&0\\1&-2&1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}F_1\leftrightarrow F_2\\F_3\to -F_3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&0&1&0\\-2&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2+2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&0&1&0\\0&-4&2&1&2&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_2\to -\tfrac{1}{4}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&0&1&0\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}F_1\to F_1+2F_2\\F_2\to F_2+\frac{1}{2}F_3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\Rightarrow(A-B)^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&2\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

$$X=(A-B)^{-1}\cdot Y\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&2\\0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{4}\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{Solución\colon x=-\frac{1}{2},y=-\frac{5}{4},z=-2.}$$

****

2º) Sea S la región del plano definida por: $7y - 8x \leq 3.400$; $3x - 8y \leq 2.000$; $11x + 14y \geq 9.500$; $x \leq 1.200$; $y \leq 1.000$.

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

----

① $\Rightarrow 7y - 8x \leq 3.400 \Rightarrow y \leq \frac{3.400+8x}{7} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	100	450
y	600	1.000

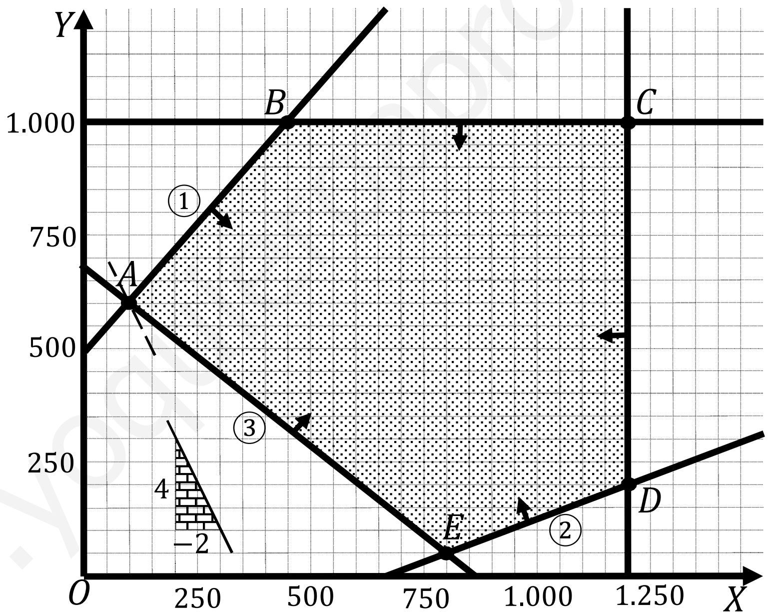
② $\Rightarrow 3x - 8y \leq 2.000 \Rightarrow y \geq \frac{3x-2.000}{8} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	800	1.200
y	50	200

③ $\Rightarrow 11x + 14y \geq 9.500 \Rightarrow y \geq \frac{9.500-11x}{14} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	100	800
y	600	50

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7y - 8x = 3.400 \\ 11x + 14y = 9.500 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -14y + 16x = -6.800 \\ 11x + 14y = 9.500 \end{array}\right\} \Rightarrow 27x = 2.700 \Rightarrow$$

$x = 100$; $7y - 800 = 3.400$; $y = \frac{4.200}{7} = 600 \Rightarrow \underline{A(100, 600)}$.

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1.000 \\ 7y - 8x = 3.400 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{7.000-3.400}{8} = \frac{3.600}{8} = 450 \Rightarrow \underline{B(450, 1.000)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1.200 \\ y = 1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(1.200, 1.000)}.$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1.200 \\ 3x - 8y = 2.000 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{3.600-2.000}{8} = \frac{1.600}{8} = 200 \Rightarrow \underline{D(1.200, 200)}.$$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 2x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(100, 600) = 2 \cdot 100 + 600 = 800.$$

$$B \Rightarrow f(450, 1.000) = 2 \cdot 450 + 1.000 = 1.900.$$

$$C \Rightarrow f(1.200, 1.000) = 2 \cdot 1.200 + 1.000 = 3.400.$$

$$D \Rightarrow f(1.200, 200) = 2 \cdot 1.200 + 200 = 2.600.$$

$$\underline{El\ valor\ mínimo\ de\ la\ función\ es\ 800\ y\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A(100, 600).}$$

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 2x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{1}x \Rightarrow m = -\frac{4}{2}.$$

****

3º) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera: $h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \leq 1 \\ g(x) & si\ x > 1 \end{cases}$. ¿Qué valor debe darle a la constante $a \in R$ para que la función h sea continua en R?

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de $f\ y\ g$.

----

a)

La función resulta ser $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + ax + 3 & si\ x > 1 \end{cases}$, que es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4x + 3) = 0 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + ax + 3) = a + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 0 = a + 2 \Rightarrow a = -2.$$

$$\underline{La\ función\ h(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ a = -2.}$$

b)

Para $a = 2$ la función es $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \\ -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$.

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3;\ \ 2x^2 - 6x = 0;\ \ x^2 - 3x = 0;\ \ x(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$ Los puntos de corte son: $A(0, 3)\ y\ B(3, 0)$.

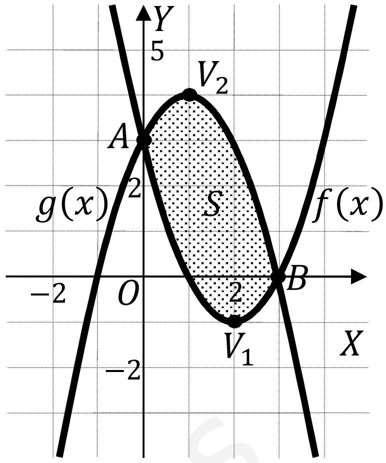
La parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0;\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V_1(2, -1).$$

La parábola $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0;\ -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V_2(1, 4).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 4x + 3)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3 - x^2 + 4x - 3) \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3 = \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2\right) - 0 =$$

$$= -18 + 27 \Rightarrow \underline{S = 9\ u^2}.$$

****

4º) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatoria es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E=A\cup B$. Además, suponga que $P(A\cap B)=0{,}2$ y $P(B)=0{,}7$.

$a)$ Calcule $P(A^c)$ $\qquad\qquad$ $b)$ Calcule $P(A^c\cup B^c)$.

Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Siendo $E=A\cup B \Rightarrow P(A\cup B)=1$.

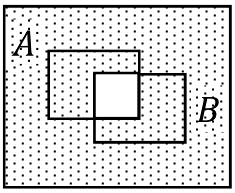
$a)$

$Datos$: $P(A\cap B)=0{,}2$; $P(B)=0{,}7$; $P(A\cup B)=1$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cap B)=1-0{,}7+0{,}2 \Rightarrow P(A)=0{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A^c)=1-P(A)=1-0{,}5 \Rightarrow \underline{P(A^c)=0{,}5}$.



$P(A^c\cup B^c)=1-P(A\cap B)$

$b)$

$P(A^c\cup B^c)=1-P(A\cap B)=1-0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P(A^c\cup B^c)=0{,}8}$.

****

5º) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

----

a)

La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza:

$p = \frac{0,2+0,3}{2} = 0,25.$

$\underline{El\ 25\ \%\ de\ los\ tornillos\ de\ la\ muestra\ son\ defectuosos}.$

El error máximo cometido es la mitad del valor del intervalo de confianza:

$E = \frac{0,3-0,2}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05.$

$\underline{El\ error\ máximo\ cometido\ es\ del\ 5\ \%}.$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \ \rightarrow z = 1,96).$

$Datos$: $n = 700$; $p = 0,25$; $q = 1 - 0,25 = 0,75$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{700}} = 1,96 \cdot 0,0164 = 0,0321.$

$\underline{El\ error\ máximo\ sería\ del\ 3,21\ \%}$

****

6º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=2 \\ x-az=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$ dependiente del parámetro real a:

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-a^2+a-a=0;\ \ 1-a^2=0 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+2=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+z=2 \\ x=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$, cuyas soluciones son:

$$\underline{Solución: x=0,\ y=0,\ z=2.}$$

****

7º) a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in R$ para que la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

----

a)

$$f(2) = 4 \Rightarrow a \cdot 2 + \frac{b}{2} = 4;\ \ 4a + b = 8. \quad (1)$$

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \ \Rightarrow\ \ f'(2) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2^2} = 0;\ \ 4a - b = 0. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 8 \\ 4a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8a = 8;\ \ \underline{a = 1}. \qquad 4 + b = 8 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

b)

$$g(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \ \text{ y } \ n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx], \text{ con } m \text{ finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x.}$$

****

8º) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función $I(x) = x \cdot \frac{170-0{,}85x}{5}$, en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $\frac{C(x)}{x}$, no supere los diez mil euros.
Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

----

a)

$$B(x) = I(x) - C(x) = x \cdot \frac{170-0{,}85x}{5} - (10 + 2x + x^2) =$$

$$= \frac{170x - 0{,}85x^2 - 50 - 10x - 5x^2}{5} = \frac{-5{,}85x^2 + 160x - 50}{5} \Rightarrow \underline{B(x) = -1{,}17x^2 + 32x - 10}.$$

La función beneficios es una parábola cóncava ($\cap$) por tener negativo el coeficiente de x^2, por lo cual, su vértice es su valor máximo.

$$B'(x) = -2{,}34x + 32 = 0;\ 234x = 3.200;\ 117x = 1.600 \Rightarrow x = \frac{1.600}{117} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cong 13{,}675.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 13.675\ litros\ de\ fertilizante.}$$

$$B(13{,}675) = -1{,}17 \cdot 13{,}675^2 + 32 \cdot 13{,}675 - 10 =$$

$$= -218{,}803 + 437{,}6 - 10 = 208{,}797.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 208.797\ euros.}$$

b)

$$C(m) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10 + 2x + x^2}{x} = x + 2 + \frac{10}{x}.$$

$$C(m) \leq 10 \Rightarrow x + 2 + \frac{10}{x} \leq 10;\ \ x^2 + 2x + 10 \leq 10x;\ \ x^2 - 8x + 10 \leq 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 - 8x + 10 = 0$:

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-40}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{6}}{2}=4\pm\sqrt{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4-\sqrt{6}\cong 1{,}55\\x_2=4+\sqrt{6}\cong 6{,}45\end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que la parábola $g(x)=x^2-8x+10$ en convexa $(\cup)$ por tener positivo el coeficiente se x^2, los valores que hacen que el coste medio no supere los 10.000 euros son los comprendidos entre las raíces: $x\in(1{,}55;\ 6{,}45)$.

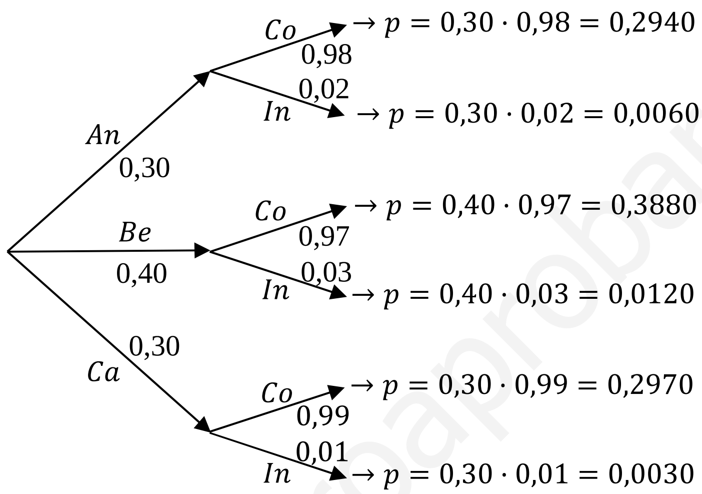
$$\underline{C(m)<10.000\ euros\ fabricando\ entre\ 1.550\ y\ 6.450\ litros\ del\ producto}.$$

****

9º) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?



a)

$$P = P(In) = P(An \cap In) + P(Be \cap In) + P(Ca \cap In) =$$

$$= P(An) \cdot P(In/An) + P(Be) \cdot P(In/Be) + P(Ca) \cdot P(In/Ca) =$$

$$= 0{,}30 \cdot 0{,}02 + 0{,}40 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}01 = 0{,}006 + 0{,}012 + 0{,}003 = \underline{0{,}021}.$$

b)

$$P = P(In/An) = \frac{P(An \cap In)}{P(In)} = \frac{P(An) \cdot P(In/An)}{P(In)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}021} = \frac{0{,}006}{0{,}021} = \underline{0{,}2857}.$$

****

10º) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

a) Calcule el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál será el nivel de confianza para este intervalo?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{182{,}875+157{,}125}{2} = \frac{340}{2} \Rightarrow \underline{\overline{x} = 170}.$$

b)

$$E = \frac{182{,}875-157{,}125}{2} = \frac{27{,}75}{2} = 12{,}875.$$

Datos: $\sigma = 15$; $n = 9$; $E = 12{,}875$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\; \Rightarrow \;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{12{,}875 \cdot \sqrt{9}}{15} = \frac{12{,}875}{5} = 2{,}575.$

Mirando en la tabla $N(0, 1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2{,}57 \rightarrow 0{,}9949 \\ 2{,}58 \rightarrow 0{,}9951 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2{,}575 \rightarrow 0{,}9950.$

$\frac{\alpha}{2} - 1 = 0{,}9950$; $\alpha - 2 = 1{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$.

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 99\ \%}.$$

****