PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a los ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido de una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

OPCIÓN A

1º) Comprueba que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{pmatrix}\ \ y\ \ B=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1+a & 1\\ 1 & 1-a\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1+b & 1\\ 1 & 1-b\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Restando la primera fila a todas las demás:

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ -a & -a & 0 & 0\\ -a & 0 & b & 0\\ -a & 0 & 0 & -b\end{vmatrix}$$

Restando a la primera columna la segunda: $|A|=\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 0 & -a & 0 & 0\\ -a & 0 & b & 0\\ -a & 0 & 0 & -b\end{vmatrix}$.

Desarrollando por los menores adjuntos de la segunda fila:

$$|A| = -a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & -b \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & -b \end{vmatrix} \Rightarrow$$ Sumando a las demás la primera fila:

$$|A| = a^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = -a^2 \cdot \left(1 - b^2 - 1\right) = \underline{a^2 b^2 = |A|} \qquad (*)$$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1 - a^2 - 1\right) \cdot \left(1 - b^2 - 1\right) - 0 \cdot 0 = \underline{a^2 b^2 = |B|} \qquad (*)$$

<u>La igualdad de las expresiones (*) prueba lo pedido.</u>

****

2º) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

a) Calcular A^{-1}.

b) Resolver el sistema: $A\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}21\\ 24\end{pmatrix}$.

----

a)

Sea la matriz inversa $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Por el concepto de matriz inversa:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}a+3c & b+3d\\ a+4c & b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a+3c=1\\ a+4c=0\end{array}\right\}\\ \\ \left.\begin{array}{l}b+3d=0\\ b+4d=1\end{array}\right\}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{c=-1}}\ ;;\ \underline{\underline{d=1}}\ ;;\ a+3c=1\ ;;\ a-3=1\ ;;\ \underline{\underline{a=4}}\ ;;\ b+3d=0\ ;;\ b+3=0\ ;;\ \underline{\underline{b=-3}}$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}}}$$

b)

$$A\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}21\\ 24\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5+x\\ -1+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 24\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}5+x-3+3y\\ 5+x-4+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\ 24\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+3y+2=21\\ x+4y+1=24\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x+3y=19\\ x+4y=23\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{\underline{y=4}}\ ;;\ x+3y=19\ ;;\ x+12=19\ ;;\ \underline{\underline{x=7}}$$

****

3º) Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abscisa a y Q de abscisa b, $a \neq b,\ a \neq 0,\ b \neq 0$.

a) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de las rectas u y v.

b) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.

c) Probar que en el caso del apartado b) el punto R está en la directriz de la parábola.

----

a)

Los puntos P y Q tienen por coordenadas $P\left(a,\ \frac{a^2}{4}\right)\ y\ Q\left(b,\ \frac{b^2}{4}\right)$.

La pendiente a una curva en un punto es la derivada de la función en ese punto.

La función es $y = \frac{1}{4}x^2$ y su derivada es $y' = \frac{1}{2}x$.

Las pendientes en los puntos de abscisas a y b son $y'(a) = \frac{1}{2}a\ \ e\ \ y'(b) = \frac{1}{2}b$.

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, por lo tanto, las rectas u y v pedidas son las siguientes:

$$u \equiv y - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}a(x-a)\ ;;\ 4y - a^2 = 2ax - 2a^2\ ;;\ \underline{u \equiv 2ax - 4y - a^2 = 0}$$

$$v \equiv y - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2}b(x-b)\ ;;\ 4y - b^2 = 2bx - 2b^2\ ;;\ \underline{v \equiv 2bx - 4y - b^2 = 0}$$

El punto R de corte de las rectas u y v el la solución del sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2ax - 4y - a^2 = 0 \\ 2bx - 4y - b^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 2x = \frac{4y + a^2}{a} \\ \to 2x = \frac{4y + b^2}{b} \end{array} \Rightarrow \frac{4y + a^2}{a} = \frac{4y + b^2}{b}\ ;;\ 4by + a^2b = 4ay + b^2a\ ;;$$

$$4ay - 4by = a^2b - b^2a\ ;;\ y(4a - 4b) = a^2b - b^2a\ ;;\ y = \frac{ab(a-b)}{4(a-b)} = \underline{\frac{ab}{4} = y}$$

$$2x = \frac{4y + a^2}{a} = \frac{ab + a^2}{a} = b + a\ ;;\ \underline{x = \frac{a+b}{2}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{R\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{ab}{4}\right)}}$$

b)

Para que dos rectas sean perpendiculares sus pendientes tienen que ser inversas y de signo contrario:

$$y'(a)=\frac{1}{2}a \;\; e \;\; y'(b)=\frac{1}{2}b \;\;\Rightarrow\;\; \frac{a}{2}=-\frac{2}{b} \;\Rightarrow\; \underline{ab=-4}$$

<u>Para que las rectas sean perpendiculares tiene que cumplirse que a · b = -4.</u>

c)

Tenemos que probar que si las rectas u y v son perpendiculares, el punto R está en la directriz de la parábola.

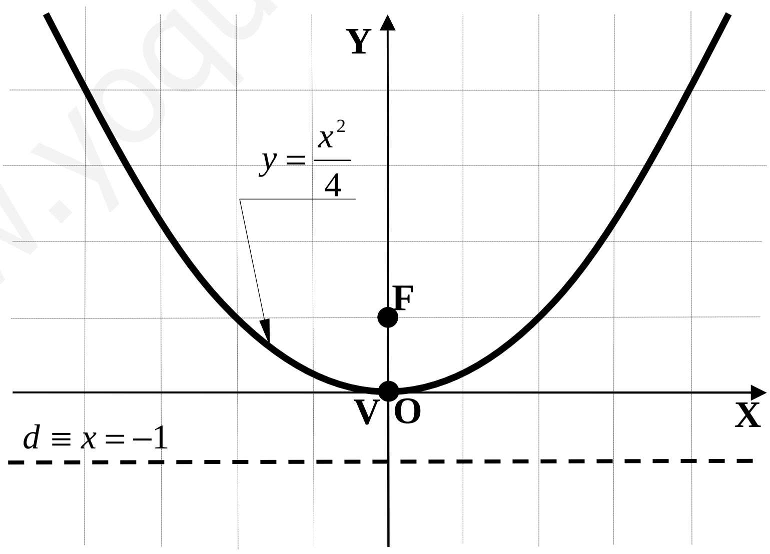
El vértice de la parábola es el origen O(0, 0); su eje es el eje de ordenadas y la curva es convexa $(\cup)$.

La ecuación de una parábola de las características de la que estudiamos es de la forma: $x^2=2py$, siendo p el parámetro, que es la distancia del foco a la directriz.

El valor del parámetro es: $x^2=4y=2\cdot 2y \;\Rightarrow\; \underline{p=2}$

La directriz de la parábola es una recta perpendicular a su eje, que dista del vértice la mitad del parámetro. En el caso que nos ocupa, la directriz es la recta: $\underline{d\equiv x=-1}$.

Para ilustrar el ejercicio, hacemos un gráfico de la situación.



Como tiene que ser que $ab=-4$;; $\underline{b=-\frac{4}{a}}$, la ecuación de la recta v es:

$$\left.\begin{array}{l} u\equiv 2ax-4y-a^2=0 \\ v\equiv 2bx-4y-b^2=0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; b=-\frac{4}{a} \;\Rightarrow\; v\equiv 2\cdot\left(-\frac{4}{a}\right)x-4y-\left(-\frac{4}{a}\right)^2=0 \;\;;;$$

$$-\frac{8}{a}x-4y-\frac{16}{a^2}=0\ \ ;;\ \ 8ax+4a^2y+16=0\ \ ;;\ \ \underline{v\equiv 2ax+a^2y+4=0}$$

El punto R de corte, sería ahora:

$$\left.\begin{array}{l} u\equiv 2ax-4y-a^2=0 \\ \\ v\equiv 2ax+a^2y+4=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2ax=4y+a^2 \\ \\ 2ax=-a^2y-4 \end{array}\right\}\Rightarrow 4y+a^2=-a^2y-4\ \ ;;\ \ 4y+a^2y=-4-a^2\ \ ;;$$

$$y\left(4+a^2\right)=-4-a^2=-\left(4+a^2\right)\ \ ;;\ \ \underline{y=-1}\ \Rightarrow;\ \ 2ax=4y+a^2=-4+a^2\ \ ;;\ \ \underline{x=\frac{a^2-4}{2a}}$$

$$\underline{\underline{R\left(\frac{a^2-4}{2a},\ -1\right)\ \Rightarrow\ R\in directriz,\ \ c.q.p.}}$$

****

4º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$.

a) Indicar el dominio de definición de f(x) y hallar sus asíntotas

b) Hallar los extremos relativos de la función f(x) y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Dibujar la gráfica de f(x) y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1,\ 1]$.

----

a)

Por tratarse de una función racional, su dominio de definición es el conjunto de los números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R-\{2,\ -2\}}}$$

Las únicas asíntotas que tiene la función son verticales y son los valores que anulan el denominador, o sea:

$$\underline{\underline{\text{Asíntotas verticales: } x = 2 \text{ y } x = -2.}}$$

b)

$$f'(x)=\frac{-1\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{2x}{(4-x^2)^2}\ ;;\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{2x}{(4-x^2)^2}=0\ ;;\ \underline{x=0}$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot(4-x^2)^2-2x\cdot 2(4-x^2)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^4}=\frac{2\cdot(4-x^2)+8x^2}{(4-x^2)^3}=\frac{6x^2+8}{(4-x^2)^3}=\frac{2(3x^2+4)}{(4-x^2)^3}$$

$$f''(0)=\frac{2(0+4)}{(4-0)^3}=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=0}\ ;;\ f(0)=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mín. \Rightarrow P\left(0,\ \frac{1}{4}\right)}}$$

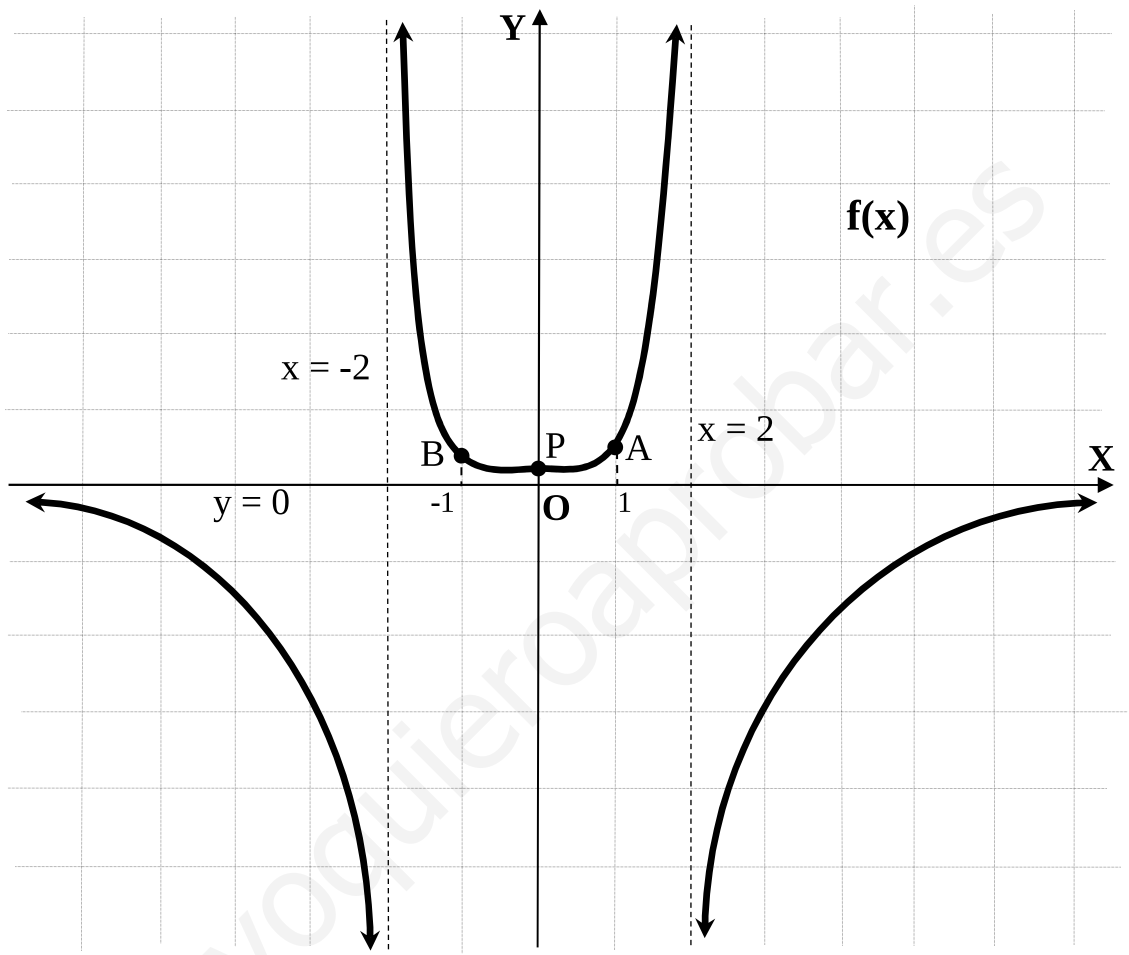
Para estudiar la concavidad y convexidad se estudia el signo de $f''(x)$; teniendo en cuenta que el numerador es positivo $\forall x\in R$, estudiaremos solamente el denominador.

$$f''(x)>0\ \Rightarrow\ (4-x^2)^3>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Convexidad\ \ (\cup)\ \Rightarrow\ (-2,\ 2)}}$$

$$f''(x)<0\ \Rightarrow\ (4-x^2)^3<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Concavidad\ \ (\cap)\ \Rightarrow\ (-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)}}$$

c)

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que se trata de una función par, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas y que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, lo cual significa que el eje de abscisas es una asíntota, podemos representar gráficamente la función, que es la que sigue.



En el intervalo $[-1,\ 1]$ el mínimo absoluto es el mínimo relativo hallado anteriormente, o sea, el punto $P\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$.

Como la función es simétrica con respecto al eje Y, los máximos absolutos del intervalo son los valores (iguales) de la función para x = 1:

$$f(1) = \frac{1}{4-1^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximos absolutos} \Rightarrow A\left(1,\ \frac{1}{3}\right)\ y\ B\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Los vértices de un triángulo son los puntos A(-2, -1), B(7, 5) y C(x, y).

a) Calcular el área del triángulo en función de x e y.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

----

a)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (7,\ 5) - (-2,\ -1) = (9,\ 6) \Rightarrow m = \frac{6}{9} = \underline{\frac{2}{3}}$$

La recta r que pasa por los puntos A y B es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = \frac{2}{3}(x + 2) \ ;;\ 3y + 3 = 2x + 4 \ ;;\ \underline{r \equiv 2x - 3y + 1 = 0}$$

Suponiendo como base del triángulo al segmento $\overline{AB}$, la altura del triángulo será la distancia del punto C(x, y) a la recta r.

Sabiendo que la distancia de un punto a una recta es $d(P,\ r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, en el caso del punto C(x, y) y la recta r es:

$$h = d(C,\ r) = \frac{|2x - 3y + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x - 3y + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \underline{\frac{|2x - 3y + 1|}{\sqrt{13}} = h}$$

La base del triángulo es la siguiente:

$$\overline{AB} = \sqrt{(7 + 2)^2 + (5 + 1)^2} = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = \underline{3\sqrt{13} = \overline{AB}}$$

El área del triángulo pedida es:

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{3\sqrt{13} \cdot \frac{|2x - 3y + 1|}{\sqrt{13}}}{2} = \underline{\underline{\frac{3 \cdot |2x - 3y + 1|}{2} = S}}$$

b)

Si el área del triángulo tiene que ser 36, basta igualar el valor obtenido a 36:

$$\frac{3 \cdot |2x - 3y + 1|}{2} = 36 \ ;;\ |2x - 3y + 1| = 24 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-3y+1=24 \\ \\ 2x-3y+1=-24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \underline{\underline{2x-3y-23=0}} \\ \\ \underline{\underline{2x3y+25=0}} \end{array}\right\}$$

<u>El lugar geométrico pedido son dos rectas paralelas a la recta que pasa por A y B.</u>

****

2º) Sean A(1, 1) y B(-1, 1) dos puntos del plano.

a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando donde están situados sus centros.

b) De entre todas las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta y = x.

----

a)

Las circunferencias pedidas tienen sus centros sobre los puntos de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

El punto medio M del segmento $\overline{AB}$ es $\left\{\begin{array}{l} x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \\ y_m = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M(0,\ 1)}$.

El vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,\ 1) - (1,\ 1) = (-2,\ 0)$, como puede apreciarse es vertical, lo cual significa que los puntos A y B determinan un segmento horizontal.

La mediatriz es una recta vertical que pasa por el punto M(0, 1), que es, precisamente, el eje de ordenadas (x = 0).

Las circunferencias pedidas tienen como centros los puntos de la forma O’(0, n).

Sabiendo que la ecuación de una circunferencia de centro O’(a, b) y radio r es:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\text{, siendo: } \left\{\begin{array}{l} A = -2a \rightarrow A = 0 \\ \\ B = -2b \\ \\ C = a^2 + b^2 - r^2 \end{array}\right. .$$

Aplicando lo anterior al caso teórico que estudiamos sería:

$$\underline{\underline{c \equiv x^2 + y^2 + By + C = 0}}$$

b)

La circunferencia pedida es la que tiene el centro en un punto O’(0, n) tal que su distancia a la recta y = x sea la misma que al punto B(-1, 1). (Tomamos el punto B porque no se puede tomar el punto A por pertenecer a la recta y = x).

La expresión general de la recta es: $s \equiv x - y = 0$.

La distancia $d(B,\ s)$ es:

$$\left.\begin{array}{l} B(-1,\ 1) \\ s \equiv x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ r = d(B,\ s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow r = \frac{|\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 0\,|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-1-1|}{\sqrt{1+1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2} = r}$$

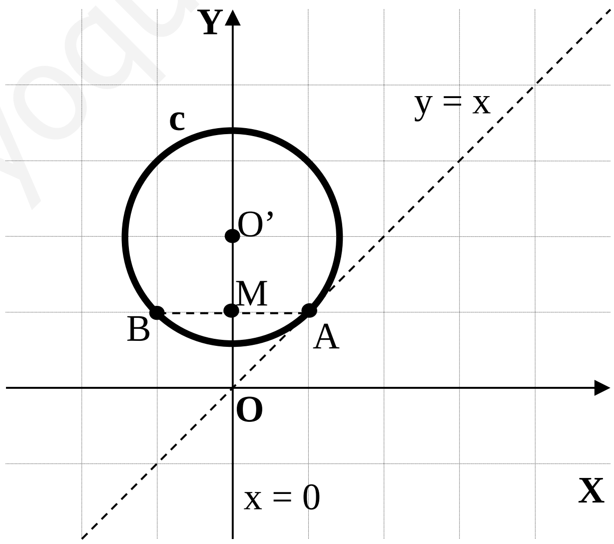
$$\left.\begin{array}{l} O'(0,\ n) \\ B(-1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ r = \overline{O'B} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-n)^2} = \sqrt{2}\ \ ;;\ 1 + 1 - 2n + n^2 = 2\ \ ;;\ n^2 - 2n = 0\ \ ;;$$

$$n(n-2) = 0\ \Rightarrow\ n_1 = 0\ \ ;;\ n_2 = 2\ \ (La\ \ soluci\acute{o}n\ \ n = 0\ \ carece\ \ de\ \ sentido).\ Soluci\acute{o}n:\ \underline{n = 2}$$

El centro de la circunferencia pedida es O’(0, 2) y el radio es $r = \sqrt{2}$.

$$\left\{\begin{array}{l} a = 0 \rightarrow A = -2a = \underline{0 = A} \\ b = 2 \rightarrow B = -2b = \underline{-4 = B} \\ C = a^2 + b^2 - r^2 = 0 + 2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 2 = \underline{2 = C} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{\underline{c \equiv x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0}}$$

Para ilustrar el ejercicios hacemos un gráfico de la situación.



****

3º) a) Se considera el sistema $S \equiv \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x-y+kz=9 \\ x-y-6z=5 \end{cases}$, discutir en función de los valores del parámetro k y resolver cuando tenga mas de una solución.

b) Si el rango de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{F_2}\ \ y\ \ \overrightarrow{F_3}$ así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1},\ \overrightarrow{C_2},\ \overrightarrow{C_3}\ \ y\ \ \overrightarrow{C_4}$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}\ ;;\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix}=6-4+k+2+k+12=2k+16=2(k+8)=0\ \Rightarrow\ \underline{k=-8}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k\neq -8 \Rightarrow Rango\, M\ = Rango\ M'=3=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

Veamos el rango de M' para el valor que anula el determinante de M:

$$Para\ \ k=-8\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ \ M'\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-5-6+9+3+9-10=0 \\ \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 9 \\ 1 & -6 & 5 \end{vmatrix}=-40-36+18+24+54-20=0 \\ \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 9 \\ -1 & -6 & 5 \end{vmatrix}=-40+18-18-24+54+10=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$Para\ \ k=-8 \Rightarrow Rango\, M = Rango\ \ M' = 2 < n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado$

Resolvemos en el caso de Compatible Indeterminado.

El sistema resulta: $S \equiv \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x-y-8z=9 \\ x-y-6z=5 \end{cases}$

Despreciando una de las ecuaciones y parametrizando una de las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ 2x-y-8z=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=3-2\lambda \\ 2x-y=9+8\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=12+6\lambda\ ;;\ \underline{x=4+2\lambda}\ ;;$$

$$x+y=3-2\lambda\ ;;\ 4+2\lambda+y=3-2\lambda\ ;;\ \underline{y=-1-4\lambda} \Rightarrow Solución: \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=-1-4\lambda,\ \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}$$

b)

$$\overrightarrow{F_1}=(1,\ 1,\ 2,\ 3);\ \overrightarrow{F_2}=(2,\ -1,\ k,\ 9)\ \ y\ \ \overrightarrow{F_3}=(1,\ -1,\ -6,\ 5)$$

$$\alpha\ \cdot\overrightarrow{F_1}+\beta\ \cdot\overrightarrow{F_2}+\gamma\ \cdot\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{0}\ ;;\ \alpha\ \cdot(1,\ 1,\ 2,\ 3)+\beta\cdot(2,\ -1,\ k,\ 9)+\gamma\cdot(1,\ -1,\ -6,\ 5)=\overrightarrow{0}$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha+k\beta-6\gamma=0 \\ 3\alpha+9\beta+5\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha+2\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\beta-\gamma=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} \alpha+2\beta=-\gamma \\ \alpha-\beta=\gamma \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} \alpha+2\beta=-\gamma \\ -\alpha+\beta=-\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow 3\beta=-2\gamma\ ;;$$

$$\underline{\beta=-\frac{2}{3}\gamma}\ \ ;;\ \ \alpha-\beta=\gamma\ ;;\ \alpha+\frac{2}{3}\gamma=\gamma\ ;;\ \underline{\alpha=\frac{1}{3}\gamma}$$

Sabiendo que el rango de los vectores es 2, tienen que satisfacerse todas las ecuaciones para los valores encontrados de α y β en función de γ.

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{F_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{0}\ ;;\ \underline{\underline{\overrightarrow{F_1}-2\overrightarrow{F_2}+3\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{0}}}$$

$$\overrightarrow{C_1}=(1,\ 2,\ 1),\ \overrightarrow{C_2}=(1,\ -1,\ -1),\ \overrightarrow{C_3}=(2,\ k,\ -6)\ \ y\ \ \overrightarrow{C_4}=(3,\ 9,\ 5).$$

$$\alpha\ \cdot\overrightarrow{C_1}+\beta\ \cdot\overrightarrow{C_2}+\gamma\ \cdot\overrightarrow{C_3}+\delta\cdot\overrightarrow{C_4}=\overrightarrow{0}\ \ ;;$$

$$\alpha\ \cdot(1,\ 2,\ 1)+\beta\ \cdot(1,\ -1,\ -1)+\gamma\cdot(2,\ k,\ -6)+\delta\cdot(3,\ 9,\ 5)=\overrightarrow{0}\ \ ;;$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+2\gamma+3\delta=0\\ 2\alpha-\beta+k\gamma+9\delta=0\\ \alpha-\beta-6\gamma+5\delta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-2\gamma-3\delta\\ 2\alpha-\beta=-k\gamma-9\delta\\ \alpha-\beta=6\gamma-5\delta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-2\gamma-3\delta\\ \alpha-\beta=6\gamma-5\delta\end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha=4\gamma-8\delta \;;;$$

$$\underline{\alpha=2\gamma-4\delta} \;;;\; \alpha+\beta=-2\gamma-3\delta \;;;\; 2\gamma-4\delta+\beta=-2\gamma-3\delta \;;;\; \underline{\beta=-4\gamma+\delta}$$

La expresión general sería, en función de los parámetros γ y δ:

$$\underline{(2\gamma-4\delta)\cdot\overrightarrow{C_1}+(-4\gamma+\delta)\cdot\overrightarrow{C_2}+\gamma\cdot\overrightarrow{C_3}+\delta\cdot\overrightarrow{C_4}=\overrightarrow{0}}$$

Como nos piden una combinación lineal nula, hacemos, por ejemplo, $\gamma=\delta=1$, con lo que resulta:

$$-2\,\overrightarrow{C_1}-3\,\overrightarrow{C_2}+\overrightarrow{C_3}+\overrightarrow{C_4}=\overrightarrow{0} \;;;\; \underline{\underline{2\overrightarrow{C_1}+3\overrightarrow{C_2}-\overrightarrow{C_3}-\overrightarrow{C_4}=\overrightarrow{0}}}$$

****

4º) a) Hallar los valores de la integral definida $I=\int_{-10}^{-1}\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^x}}$.

b) Calcular la integral indefinida de la función $f(x)=\frac{1}{1-e^x}$ mediante un cambio de variable.

----

a)

$$I=\int_{-10}^{-1}\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^x}}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}1-e^x=t\\ e^x\,dx=-dt\end{array}\middle\|\begin{array}{c}x=-1\rightarrow t=1-e^{-1}\\ x=-10\rightarrow t=1-e^{-10}\end{array}\right\}\Rightarrow I=-\int_{1-e^{-10}}^{1-e^{-1}}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int_{1-e^{-1}}^{1-e^{-10}}t^{-\frac{1}{2}}\cdot dt=$$

$$=\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{1-e^{-1}}^{1-e^{-10}}=\left[2\sqrt{t}\right]_{1-e^{-1}}^{1-e^{-10}}=2\sqrt{1-e^{-10}}-2\sqrt{1-e^{-1}}=2\sqrt{1-\frac{1}{e^{10}}}-2\sqrt{1-\frac{1}{e}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{e^{10}-1}{e^{10}}}-2\sqrt{\frac{e-1}{e}}=2\frac{\sqrt{e^{10}-1}}{e^5}-2\frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{e}}=2\frac{\sqrt{e^{10}-1}}{e^5}-2\frac{\sqrt{e(e-1)}}{e}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{e^5}\left[\sqrt{e^{10}-1}-e^4\sqrt{e(e-1)}\right]=I}}$$

b)

$$I=\int f(x)\cdot dx=\int\frac{1}{1-e^x}\cdot dx=\int\frac{1-e^x+e^x}{1-e^x}\cdot dx=\int\frac{1-e^x}{1-e^x}\cdot dx+\int\frac{e^x}{1-e^x}\cdot dx=$$

$$=\int dx+\int\frac{e^x}{1-e^x}\cdot dx=\underline{x+I_1=I}$$

$$I_1=\int\frac{e^x}{1-e^x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}1-e^x=t\\ -e^x\,dx=-dt\end{array}\right\}\Rightarrow I_1=-\int\frac{1}{t}\cdot dt=-L\,t+C=\underline{-L\left(1-e^x\right)+C=I_1}$$

Sustituyendo en la expresión de I el valor de I_1 queda:

$$\underline{\underline{I=x-L\left(1-e^x\right)+C}}$$

****