

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE MADRID****SEPTIEMBRE – 2007**

(Resueltos por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El examen presenta dos opciones, A y B. Se deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

**OPCIÓN A**

1º) Halla los puntos de la recta  $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$  cuya distancia es 1 al plano de ecuación  $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ .

-----

La expresión de la recta r por paramétricas es  $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ .

Los puntos de la recta r tienen por expresión general:  $P(3 + \lambda, 5 + \lambda, -1 - \lambda)$ .

La distancia de un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  a un plano  $Ax + By + Cz + D = 0$  viene dada por la fórmula  $d(\pi, P_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

Aplicando la fórmula anterior al caso que nos ocupa, resulta:

$$d(\pi, P) = \frac{|2(3 + \lambda) - (5 + \lambda) + 2(-1 - \lambda) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1 \quad ; \quad \frac{|6 + 2\lambda - 5 - \lambda - 2 - 2\lambda + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 1 \quad ;$$

$$\frac{|-\lambda|}{\sqrt{9}} = 1 \quad ; \quad |-\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(6, 8, -4)}} \\ \lambda_2 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0, 2, 2)}} \end{cases}$$

\*\*\*\*\*

2º) Se consideran las rectas  $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ . Halla la ecuación continua de la recta  $t$  que contiene al punto  $P(2, -1, 2)$  y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

-----

Las expresiones de las rectas  $r$  y  $s$  mediante ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2x = 3 + \lambda \quad ; \quad x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda$$

$$x + y = \lambda \quad ; \quad y = -x + \lambda = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda + \lambda = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \underline{x = 4 + \lambda} \quad ; \quad y = 2x - 7 = 8 + 2\lambda - 7 = 1 + 2\lambda = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dos vectores directores de  $r$  y  $s$  pueden ser  $\vec{u} = (1, 1, 2)$  y  $\vec{v} = (1, 2, 1)$ , respectivamente.

Teniendo en cuenta que el producto vectorial de dos vectores es perpendicular al plano que contiene a los dos vectores, un vector director de la recta  $t$  pedida es:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j + 2k - k - 4i - j = -3i + j + k = \underline{(-3, 1, 1)} = \vec{w}$$

La expresión de la recta  $r$  por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Dado el sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$ , se pide:

a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de k es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4k + (k+1)(k-1) - 2(k-1) + 2 + k(k+1) =$$

$$= -1 - 4k + k^2 - 1 - 2k + 2 + 2 + k^2 + k = 2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \underline{k_1 = 2} \text{ ; } \underline{k_2 = \frac{1}{2}}$$

$$\text{Para } \begin{cases} k \neq 2 \\ k \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } k = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ cuyo rango es 2 por ser } F_2 = F_1 + F_3.$$

$$\text{Para } k = 2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Para } k = \frac{1}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \text{ Para determinar su rango con mayor fa-}$$

cilidad consideramos la matriz  $2M'$ , cuyo rango es el mismo que el de  $M'$ :

$$2M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 + 8 - 3 - 4 + 8 - 9 = 28 - 16 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } k = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \;; \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}}}}$$

b)

Resolvemos en el caso de compatible indeterminado para  $k = 2$ .

$$\text{El sistema resulta } \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases} \text{ ; despreciando una ecuación, por ejemplo la}$$

segunda, y parametrizando la variable  $z$ :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -1 - 2\lambda \\ x - 2y = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = -1 - 2\lambda \\ -x + 2y = -3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 5y = -4 - 3\lambda \;;$$

$$\underline{y = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda} \;; \quad \begin{cases} 2x + 6y = -2 - 4\lambda \\ 3x - 6y = 9 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 5x = 7 - \lambda \;; \quad \underline{x = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda}$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R}}}$$

\*\*\*\*\*

4º) a ) Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}.$$

b ) Determina una función F(x) tal que su derivada sea f(x) y además F(0) = 4.

-----

a )

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)(x^2+1) - (3x^2+x+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^3+6x+x^2+1-6x^3-2x^2-6x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad ; \quad 1-x^2 = 0 \quad ; \quad \underline{x_1 = 1} \quad ; \quad \underline{x_2 = -1}$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y si es negativa, de un máximo:

$$f''(1) = \frac{2 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x=1}$$

$$f(1) = \frac{3+1+3}{1^2+1} = \frac{7}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo: } P\left(1, \frac{7}{2}\right)}}$$

$$f''(-1) = \frac{-2 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x=-1}$$

$$f(-1) = \frac{3-1+3}{(-1)^2+1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo: } Q\left(-1, \frac{5}{2}\right)}}$$

b )

$F(x)$  representa a las infinitas funciones primitivas de  $f(x)$ , o sea:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} \cdot dx = \int \frac{(3x^2 + 3) + x}{x^2 + 1} \cdot dx = \int \left( 3 + \frac{x}{x^2 + 1} \right) \cdot dx = 3 \int dx + \int \frac{x}{x^2 + 1} \cdot dx = \\ &= \underline{3x + I = F(x)} \quad (*) \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{x}{x^2 + 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} \parallel x dx = \frac{1}{2} dt \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} L t + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} L (x^2 + 1) + C = I}}$$

Sustituyendo el valor de I en la expresión (\*):  $F(x) = 3x + \frac{1}{2} L (x^2 + 1) + C$

Teniendo en cuenta que tiene que ser  $F(0) = 4$ :

$$F(0) = 3 \cdot 0 + \frac{1}{2} L (0^2 + 1) + C = 4 \quad ;; \quad \frac{1}{2} L 1 + C = 4 \quad ;; \quad \frac{1}{2} \cdot 0 + C = 4 \Rightarrow \underline{\underline{C = 4}}$$

$$\underline{\underline{F(x) = 3x + 4 + \frac{1}{2} L (x^2 + 1)}}$$

\*\*\*\*\*

### OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , calcula una matriz cuadrada X sabiendo que se verifica  $X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$ .

-----

Una forma de resolver el problema es la siguiente:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{I = A^2}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{2I = B \cdot A}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en la ecuación dada resulta:

$$X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2 \Rightarrow X \cdot I + 2I = I \;; \; \underline{\underline{X = -I}}$$

Otra forma de resolver el problema es la siguiente:

$X \cdot A^2 + B \cdot A = A^2$ . Multiplicando por la derecha por  $A^{-1}$ , queda:

$$X \cdot A^2 \cdot A^{-1} + B \cdot A \cdot A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} \;; \; X \cdot A + B \cdot I = A \;; \; X \cdot A + B = A.$$

Multiplicando, de nuevo por la derecha por  $A^{-1}$ , resulta:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} + B \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \;; \; X \cdot I + B \cdot A^{-1} = I \;; \; X + B \cdot A^{-1} = I \;;$$

$$\underline{X = I - B \cdot A^{-1}} \quad (*)$$

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;; \; |A| = 1 \;; \; Adj. \; A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;; \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Sustituyendo en (\*) y operando:

$$X = I - B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I - 2I = \underline{\underline{-I = X}}$$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es



2º) Dado el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$ , se pide:

a ) Calcula a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma  $ax + y + bz = 1$  el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b ) Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

a )

El rango de las matrices de coeficientes y ampliada del sistema dado, que es de dos ecuaciones con tres incógnitas es 2, por lo cual resulta compatible indeterminado.

Para que el sistema resultante de añadir la ecuación  $ax + y + bz = 1$  siga siendo compatible indeterminado es necesario que el rango de las nuevas matrices de coeficientes y ampliada siga siendo dos.

$$\text{Las nuevas matrices son } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 1 & b \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ a & 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rango de } M = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 3b - 6 + 2a + 9a - 1 - 4b = 0 \quad ;$$

$$\underline{11a - b - 7 = 0} \quad (1)$$

Para que el rango de  $M'$  sea dos es necesario que todos los determinantes de orden tres que se puedan formar sean nulos:

Por ejemplo:

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 3 + 6 - 10a - 9a - 5 - 4 = 0 \quad ; \quad -19a = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{a = 0}}$$

Sustituyendo en (1) resulta que  $b = -7$ .

b )

Parametrizando una incógnita y resolviendo por Cramer el sistema dado:

$$\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3+3\lambda \\ 2x+3y=5-\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3+3\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9+9\lambda-10+2\lambda}{3-4} = \frac{11\lambda-1}{-1} = \underline{1-11\lambda} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+3\lambda \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{-1} = \frac{5-\lambda-6-6\lambda}{-1} = \frac{-1-7\lambda}{-1} = \underline{1+7\lambda} = y$$

Como la suma de las soluciones tiene que ser 4:

$$x+y+z=4 \Rightarrow (1-11\lambda)+(1+7\lambda)+\lambda=4 \;; \; 2-3\lambda=4 \;; \; 3\lambda=-2 \;; \; \underline{\underline{\lambda=-\frac{2}{3}}}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=1-11\lambda=1+\frac{22}{3}=\underline{\underline{\frac{25}{3}}}=x \\ y=1+7\lambda=1-\frac{14}{3}=\underline{\underline{-\frac{11}{3}}}=y \\ z=\lambda=\underline{\underline{-\frac{2}{3}}}=z \end{cases}$$

\*\*\*\*\*

3º) Sean las rectas  $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$  y  $s \equiv \begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$ .

a) Halla la ecuación del plano  $\pi$  que contiene a r y es paralelo a s.

b) Calcula la distancia entre el plano  $\pi$  y la recta s.

-----

a)

Un punto y un vector director de r son  $P(0, 1, 2)$  y  $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$ .

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=8+3\lambda} \;; \; x-2y-5=0 \;; \; y = \frac{x-5}{2} = \frac{8+3\lambda-5}{2} =$$

$$= \frac{3+3\lambda}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda = y}} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=8+3\lambda \\ y=\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un vector director de s puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del vector  $\vec{w} = \left(3, \frac{3}{2}, 1\right)$ , por ejemplo:  $\vec{v}_s = (6, 3, 2)$ .

El plano  $\pi$  pedido tiene como vectores directores a los de las rectas y, por contener a r, contiene a todos sus puntos y por consiguiente a P.

La ecuación general del plano  $\pi$  es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{v}_r, \vec{v}_s) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$-2x + 3(z-2) + 12(y-1) + 6(z-2) - 6x - 2(y-1) = 0 \;;$$

$$-8x + 10(y-1) + 9(z-2) = 0 \;; \; -8x + 10y - 10 + 9z - 18 = 0 \;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 8x - 10y - 9z + 28 = 0}}$$

b)

La distancia de un plano a una recta (lógicamente paralela a él; en caso contrario

la distancia sería 0) es la misma que la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

Un punto de la recta  $s$  es, por ejemplo para  $\lambda = 1$ ,  $Q(11, 3, 1)$ .

La distancia de un punto  $Q_0(x_0, y_0, z_0)$  a un plano  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  viene dada por la fórmula  $d(\pi, Q_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

Aplicando la fórmula al plano  $\pi \equiv 8x - 10y - 9z + 28 = 0$  y al punto  $Q(11, 3, 1)$ :

$$d(\pi, Q) = \frac{|8 \cdot 11 - 10 \cdot 3 - 9 \cdot 1 + 28|}{\sqrt{8^2 + (-10)^2 + (-9)^2}} = \frac{|88 - 30 - 9 + 28|}{\sqrt{64 + 100 + 81}} = \frac{|77|}{\sqrt{245}} = \frac{77\sqrt{245}}{245} = \frac{11\sqrt{245}}{35}$$

$$\underline{\underline{d(\pi, s) = \frac{11\sqrt{245}}{35} \text{ unidades}}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Sea  $g(x)$  una función continua y derivable para todo el valor real de  $x$ , de la que se conoce la siguiente información:

i )  $g'(x) > 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ , mientras que  $g'(x) < 0 \quad \forall \quad x \in (0, 2)$ .

ii )  $g''(x) > 0 \quad \forall \quad x \in (1, 3)$  y  $g''(x) < 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

iii )  $g(-1) = 0$ ,  $g(0) = 2$ ,  $g(2) = 1$ .

iv )  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$ .

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a ) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b ) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función  $g(x)$ .

c ) Si  $G(x) = \int_0^x g(t) \cdot dt$ , encontrar un valor  $x_0$  tal que  $G'(x_0) = 0$ .

a )

La función  $g(x)$  no puede tener asíntotas verticales por el propio enunciado de la misma: “continua y derivable en  $\mathbb{R}$ ”.

La recta  $y = 3$  es una asíntota horizontal por ser  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$ .

No existen asíntotas oblicuas por ser excluyente la existencia de asíntotas horizontales y oblicuas, es decir: si existe asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua y viceversa.

b )

De los datos del ejercicio se deducen algunas consecuencias, como son:

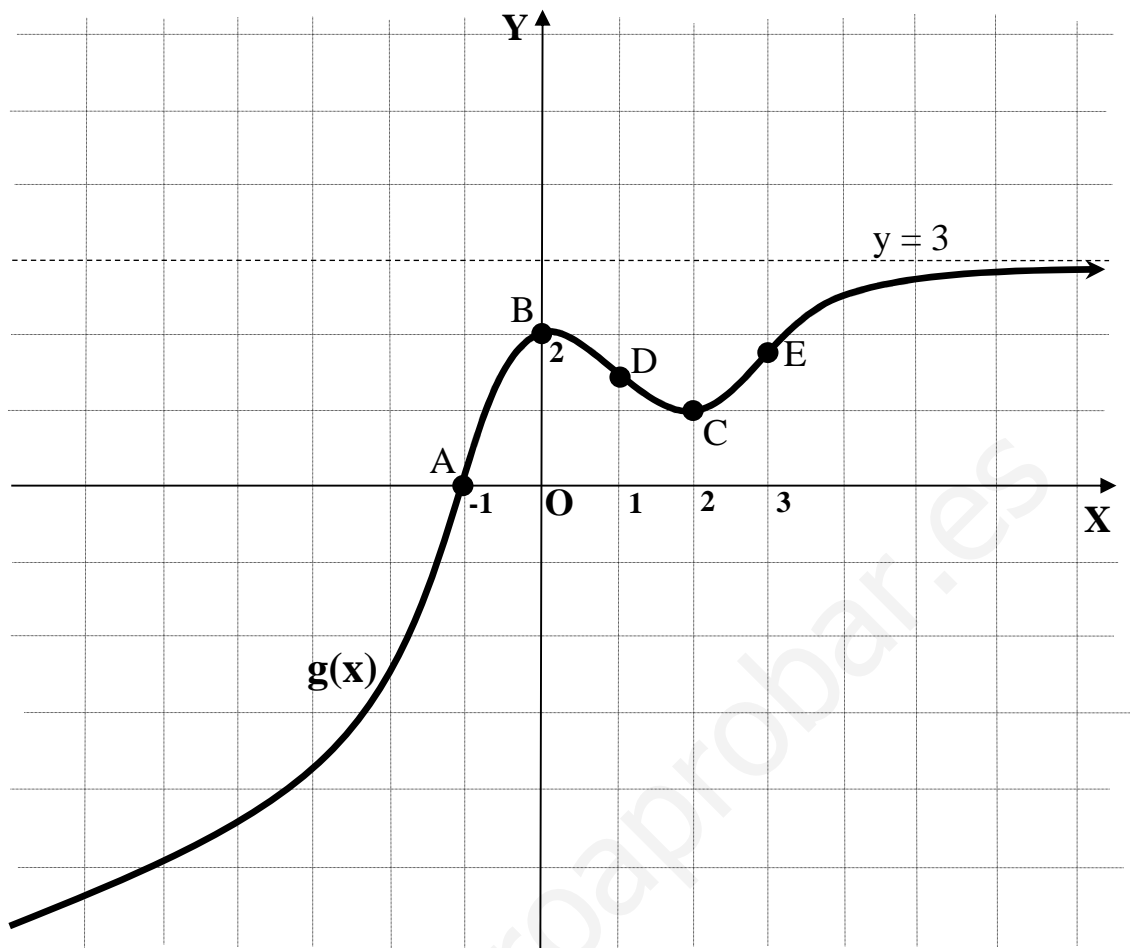
1.- Los puntos de corte con los ejes son  $A(-1, 0)$  y  $B(0, 2)$ .

2.- La función es creciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  y decreciente en  $(0, 2)$ , lo cual implica, por ser continua la función, que existe un máximo relativo en  $B(0, 2)$  y un mínimo relativo en  $C(2, 1)$ .

3.- Del apartado ii ) se deduce que la función tiene puntos de inflexión en D y E que son los puntos que tienen como abscisas los valores  $x = 1$  y  $x = 3$ .

Teniendo en cuenta lo anterior se puede hacer un esbozo de la función, que es el

siguiente:



c )

$$G(x) = \int_0^x g(t) \cdot dt = [g(t)]_0^t = G(x) - G(0) \Rightarrow \underline{G(0) = 0}$$

Teniendo en cuenta que  $G'(x) = g(x)$ , tiene que ser  $g(x_0) = 0$  y, de la observación de la gráfica anterior se deduce que  $x_0 = -1$ .

\*\*\*\*\*