PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permitirá el uso de calculadoras gráficas.

OPCIÓN A

1º) Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide:

a) El punto P simétrico de O(0, 0, 0) respecto del plano π.

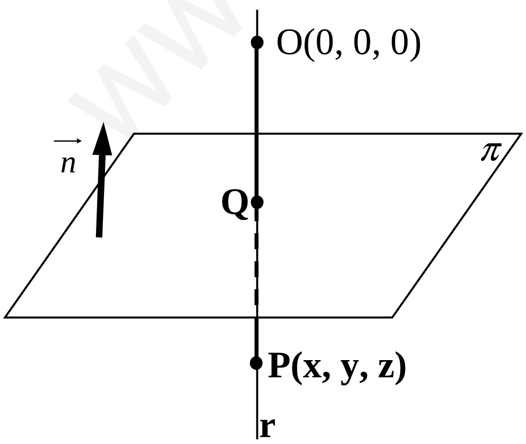
b) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano x = 0.

c) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

----

a)

Un vector normal al plano π es: $\overrightarrow{n} = (1,\ 3,\ 1)$.



La recta r es la que pasa por el punto O y es perpendicular al plano π, por lo tanto su vector director pude ser el vector $\overrightarrow{n} = (1,\ 3,\ 1)$, normal del plano π; su ecuación es:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+3y+z-4=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+3\lambda+\lambda-4=0 \;;;\; 4\lambda-4=0 \;;;\; \lambda-1=0 \;;;\; \lambda=1 \Rightarrow \underline{Q(1,\ 1,\ 1)}$$

Para que P sea el punto simétrico de O con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{OP}=2\cdot\overrightarrow{OQ} \Rightarrow (x,\ y,\ z)=2\cdot(1,\ 1,\ 1)=(2,\ 2,\ 2) \Rightarrow \underline{\underline{P(2,\ 2,\ 2)}}$$

b)

El vector normal al plano x = 0 es $\overrightarrow{u}=(1,\ 0,\ 0)$.

El ángulo α que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales, por lo tanto, el ángulo que forman los planos $\pi \equiv x+3y+z=4$ y x = 0 es el que forman los vectores $\overrightarrow{n}=(1,\ 3,\ 1)$ y $\overrightarrow{u}=(1,\ 0,\ 0)$.

Por el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{(1,\ 0,\ 0)\cdot(1,\ 3,\ 1)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=$$

$$=\frac{1+0+0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+9+1}}=\frac{1}{\sqrt{11}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{11}}{11}=\cos\alpha}}$$

c)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv x+3y+z=4$ con los ejes X, Y, Z, respectivamente, son los siguientes: $A(4,\ 0,\ 0),\ B\left(0,\ \frac{4}{3},\ 0\right)\ y\ C(0,\ 0,\ 4)$.

El tetraedro T lo definen los vectores $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(4,\ 0,\ 0) \\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}=\left(0,\ \frac{4}{3},\ 0\right) \\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ 4) \end{cases}$.

Sabiendo que el volumen de un paralelepípedo es, en valor absoluto, el producto mixto de los vectores que lo determinan y que el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo, el volumen pedido es el siguiente:

$$V_T=\frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right]=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|4\cdot\frac{4}{3}\cdot4\right|=\frac{64}{18}=\underline{\underline{\frac{32}{9}\ u^3=V_T}}$$

****

2º) Dado el sistema $\begin{cases} 4x+4\lambda y+2z=2\lambda \\ \lambda x+y-\lambda z=\lambda \\ 4\lambda x+4\lambda y+\lambda z=9 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resolver el sistema para λ = -1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\lambda\left(4+8\lambda-16\lambda^2-8+16\lambda-4\lambda^2\right)=\lambda\left(-20\lambda^2+24\lambda-4\right)=$$

$$=-4\lambda\left(5\lambda^2-6\lambda+1\right)=0 \;\Rightarrow\; \underline{\lambda_1=0} \;;;\; \lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{10}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{10}=\frac{6\pm 4}{10}=\frac{3\pm 2}{5} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{\lambda_2=\frac{1}{5}} \\ \underline{\lambda_3=1} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} \lambda\neq 0 \\ \lambda\neq\frac{1}{5} \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \Rightarrow Sistema\;\; Compatible\;\; Determinado$$

Para λ = 0 $\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$Rango\;\; M' \Rightarrow \{C_1=2C_3\} \Rightarrow \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=-18\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=3}$$

$$Para\;\; \lambda=\frac{1}{5} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 4 & \frac{4}{5} & 2 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 9 \end{pmatrix}$$

$$Rango\;\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & 9 \end{vmatrix}=\frac{1}{5^3}\cdot\begin{vmatrix} 20 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}=\frac{1}{125}\cdot(900+8+16-40-80-36)=$$

$$=\frac{1}{125}\cdot(924-1566)\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$Para\ \ \lambda=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_1=C_2\} \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}=-36+2+8+8-4-18=$$

$$=18-58=-40\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} \lambda=0 \\ \lambda=\frac{1}{5} \\ \lambda=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M=2\ ;;\ Rango\ \ M'=3 \Rightarrow Sistema\ \ Incompatible$$

b)

Para $\lambda=-1$ el sistema es $\begin{cases} 4x-4y+2z=-2 \\ -x+y+z=-1 \\ -4x-4y-z=9 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolvemos mediante la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{2+8-36-18-8+4}{-4+8+16+8+16+4}=\frac{6-54}{48}=-\frac{48}{48}=\underline{\underline{-1=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 9 & -1 \end{vmatrix}}{48}=\frac{4-18+8-8-36+2}{48}=\frac{6-54}{48}=-\frac{48}{48}=\underline{\underline{-1=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 9 \end{vmatrix}}{48}=\frac{36-8-16-8-16-36}{48}=\frac{-48}{48}=\underline{\underline{-1=z}}$$

****

3º) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}$, según los valores del parámetro α.

El límite $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}$ es de la forma $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$, que se resuelve de la forma siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(\alpha x^2+4x+8) \cdot \frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(\alpha x^2+4x+8)}\right]^{\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}} = \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(\alpha x^2+4x+8)}\right]^{\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}} =$$

$$= e^{\underset{x\to+\infty}{lín} \frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}} = e^0 = \underline{\underline{1 \quad \forall \alpha \in R}}$$

****

4º) Calcular la integral $F(x)=\int_0^x t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt$.

$$F(x)=\int_0^x t^2 \cdot e^{-t} \cdot dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=t^2 \rightarrow du=2t\,dt \\ e^{-t}\,dt=dv \rightarrow v=-e^{-t} \quad (*) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(*)\ \int e^{-t} \cdot dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -t=h \\ dt=-dh \end{array}\right\} \Rightarrow \int e^h \cdot (-dh) = -e^h \Rightarrow \underline{\int e^{-t} \cdot dt = -e^t}$$

$$\Rightarrow F(x)=\left[t^2 \cdot \left(-e^{-t}\right) - \int -e^{-t} \cdot 2t\,dt\right]_0^x = \left[-t^2\,e^{-t} + 2\int t \cdot e^{-t}\,dt\right]_0^x = \left[-t^2\,e^{-t} + 2I\right]_0^x = F(x) \quad (**)$$

$$I=\int t \cdot e^{-t}\,dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=t \rightarrow du=dt \\ e^{-t}\,dt=dv \rightarrow v=-e^{-t} \end{array}\right\} \Rightarrow I=t \cdot \left(-e^t\right) - \int -e^{-t} \cdot dt = -t \cdot e^{-t} + \int e^{-t} \cdot dt =$$

$$= -t \cdot e^{-t} - e^{-t} = \underline{-e^{-t}(t+1) = I} \Rightarrow \textit{Sustituyendo el valor de } I \textit{ en } (**):$$

$$F(x)=\left[-t^2\,e^{-t} - 2e^{-t}(t+1)\right]_0^x = \left[-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\right]_0^x = -e^{-x}\left(x^2+2x+2\right) - \left[-e^{-0}\left(0^2+2\cdot 0+2\right)\right] =$$

$$= -e^{-x}\left(x^2+2x+2\right) + e^0 \cdot (2) = \underline{\underline{2-\frac{x^2+2x+2}{e^x} = F(x)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralela a s.

b) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

c) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por O corta a la recta s.

----

a)

El plano π tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas, que son $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 3,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,\ 1,\ 1)$. Considerando, por ejemplo, el punto P(1, 2, 0) perteneciente a la recta r, la ecuación general de π es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 3(x-1)+2(y-2)+2z-6z-(x-1)-2(y-2)=0\ ;;$$

$$2(x-1)-4z=0\ ;;\ x-1-2z=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-2z-1=0}}$$

b)

La distancia entre las rectas r y s es la misma que existe entre la recta s y el plano π, o sea, la distancia que existe entre cualquier punto de s y π.

Un punto de s es $Q(-2,\ 0,\ 2)$.

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico $\alpha \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la formula al plano $\pi \equiv x-2z-1=0$ y al punto $Q(-2,\ 0,\ 2)$:

$$d(s,\ \pi) = d(Q,\ \pi) = \frac{|1\cdot(-2)+0\cdot 0-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}} = \frac{|-2+0-4-1|}{\sqrt{1+0+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{5}}{5}\ unidades = d(s,\ \pi)}}$$

c)

La ecuación de la recta t, paralela a r y que pasa por O, tiene por ecuaciones continuas, por ejemplo, las siguientes: $t \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

Para comprobar si las rectas s y t se cortan, en primer lugar, las expresamos por unas ecuaciones implícitas:

$$s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} x+2=2y \\ x+2=2z-4 \end{cases} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x-2z+6=0 \end{cases}}$$

$$t \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ x=2z \end{cases} \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} 3x-2y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}}$$

Las rectas se cortan si el sistema formados par las ecuaciones que determinan ambas rectas es compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de M es igual o mayor de 2 por ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Veamos si su rango es 3, teniendo en cuenta que $L_2 = L_4$:

$$\{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (3-1) = 8 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 3}$$

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible determinado es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tengan el mismo rango; es decir, que el rango de M' tiene que ser tres, para lo cual es necesario que se anule su determinante:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2 - F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (4+12) =$$

$$6 \cdot 16 = 96 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 4}$$

<u>Las rectas s y t no se cortan (como no son paralelas, se cruzan).</u>

****

2º) Si la derivada de f(x) es $f'(x)=(x-1)^3\,(x-5)$, obtener:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

c) La función f sabiendo que f(0) = 0.

----

a)

Una función es creciente o decreciente según que su derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=(x-1)^3\,(x-5)=0\ \Rightarrow\ x_1=1\ ;;\ x_2=5.$$

Por ser f(x) una función polinómica su dominio es R.

Las raíces que anulan la primera derivada dividen el dominio de f en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento, por lo cual, basta con estudiar uno cualquiera de ellos, por ejemplo el intervalo $(-\infty,\ 1)$. Considerando el valor más sencillo, x = 0:

$$x=0\ \Rightarrow\ f'(0)=(0-1)^3\,(0-5)=-1\cdot(-5)=5>0\ \Rightarrow\ \underline{\mathit{Creciente}}.$$

$$\underline{\underline{\mathit{Crecimiento}:\ (-\infty,\ 1)\cup(5,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{\mathit{Decrecimiento}:\ (1,\ 5)}}$$

b)

Sabiendo que las condiciones de máximo relativo, mínimo relativo, respectivamente, son:

$$\mathit{Máximo\ \ relativo}\ \Rightarrow\ \begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)<0 \end{cases}\ ;;\ \ \mathit{Mínimo\ \ relativo}\ \Rightarrow\ \begin{cases} f'(x)=0 \\ f''(x)>0 \end{cases}\ ;;\ \ P.\ I.\ \Rightarrow\ \begin{cases} f''(x)=0 \\ f'''(x)\neq 0 \end{cases}.$$

No obstante lo anterior, en algunos casos sucede que para x = a se anulan las derivadas segunda, tercera y así sucesivamente.

En estos casos se debe seguir derivando la función hasta hallar una derivada que no se anule en ese punto. Si el orden de esa derivada es par y además f’(a) = 0, la función tiene un extremo relativo; si es impar, la función tiene un punto de inflexión para el valor x = a.

$$f''(x)=3(x-1)^2\,(x-5)+(x-1)^3=(x-1)^2\,[3(x-5)+(x-1)]=(x-1)^2\,(3x-15+x-1)=$$

$$= (x-1)^2(4x-16) = \underline{4(x-1)^2(x-4) = f''(x)}$$

$f''(1) = 4(1-1)^2(1-4) = 0 \;\Rightarrow$ En principio no hay máximo ni mínimo relativo para x = 1.

$$f''(5) = 4(5-1)^2(5-4) = 4\cdot 16\cdot 1 = 64 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo para } x = 5}}$$

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 4(x-1)^2(x-4) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = 1} \;\;;;\;\; \underline{x_2 = 4}$$

$$f'''(x) = 8(x-1)(x-4) + 4(x-1)^2 = 4(x-1)[2(x-4)+(x-1)] = 4(x-1)(2x-8+x-1) =$$

$$= 4(x-1)(3x-9) = \underline{12(x-1)(x-3) = f'''(x)}$$

$$f^{IV}(x) = 12[(x-3)+(x-1)] = 12(2x-4) = 24(x-2) = \underline{24(x-2) = f^{IV}(x)}$$

$$f'''(1) = 12(1-1)(1-4) = 0$$

$$f^{IV}(1) = 12(1-2) = -12 \neq 0 \;\Rightarrow\; \textit{Por ser } f^{IV}(x) \textit{ de orden par} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máximo relativo para } x = 1}}$$

Se entiende que es un máximo relativo por varias razones: una es que una función polinómica que tiene dos extremos relativos no puede tener dos máximos o dos mínimos; otra razón para asegurar que es un máximo se deduce de los periodos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'''(4) = 24(4-2) = 48 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Punto de inflexión para } x = 4}}$$

c)

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5) = (x^3-3x^2+3x-1)(x-1) = x^4-3x^3+3x^2-x-5x^3+15x^2-15x+5 =$$

$$= \underline{x^4-8x^3+18x^2-16x+5 = f'(x)}$$

$$f(x) = \int f'(x)\cdot dx = \int (x^4-8x^3+18x^2-16x+5)\cdot dx = \frac{x^5}{5} - \frac{8x^4}{4} + \frac{18x^3}{3} - \frac{16x^2}{2} + 5x + C =$$

$$= \underline{\frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C = f(x)}$$

Teniendo en cuenta que f(0) = 0, la función es $\underline{\underline{f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x}}$.

****

3º) Dado el sistema $\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resolver el sistema cuando sea posible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \lambda & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

El rango de M es dos, $\forall \lambda \in R$, por ser $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

El rango de M’ en función de λ es el siguiente:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - \lambda^2 - 12 + 6\lambda + 8 + 2\lambda = -\lambda^2 + 8\lambda - 12 = 0 \;\; ;; \;\; \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 .$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \;\Rightarrow\; \underline{\lambda_1 = 2} \;\; ;; \;\; \underline{\lambda_2 = 6} .$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \begin{Bmatrix} \lambda \neq 2 \\ \lambda \neq 6 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = 2 \;\; ;; \;\; Rango \;\; M' = 3 \;\Rightarrow\; Sistema \;\; Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \begin{Bmatrix} \lambda = 2 \\ \lambda = 6 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 \;\Rightarrow\; Sistema \;\; Compatible \;\; Deter\min ado}}$$

b)

Para λ = 2 el sistema es $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$.

De las ecuaciones primera y tercera se deduce la solución: $\underline{\underline{x = 0,\ y = -2.}}$

Para λ = 6 el sistema es $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$, cuya solución es la siguiente:

$$\begin{cases} -2x + y = -6 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = -4}} \;;;\; y = 3x - 2 = -12 - 2 = \underline{\underline{-14 = y}}$$

****

4º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) Obtener la matriz inversa de A para a = -1.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^2+1+1-a-1-a=a^2-2a+1=(a-1)^2=0 \;\Rightarrow\; \underline{a=1}$$

<u>Para a = 1 el rango de A es 2 y para a distinto de uno el rango es 3.</u>

b)

Para a = -1 la matriz es $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuya matriz inversa es la siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1-1)^2=\underline{4=|A|} \;\;;;\;\; A^T=A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj\,(A^T)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}=A^{-1}}}$$

****