PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$, se pide:

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

b) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de f(x).

c) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de f(x).

d) Hallar el área del recinto acotado que limitan las gráficas de f(x), el eje de abscisas y las rectas $y=x+2$, $x=1$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente, en los valores de su dominio, que es R.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2+1-x^2-2)}{(x^2+1)^2}=\underline{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ x<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow Creciente \Rightarrow (-\infty,\ 0)}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ x>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow Decreciente \Rightarrow (0,\ +\infty)}}$$

b)

Una función tiene un punto de inflexión para los valores de su dominio que anulan la segunda derivada, siendo distinta de cero la tercera derivada para los valores encontrados.

$$f''(x)=-\frac{2\cdot(x^2+1)^2-2x\cdot\left[2\cdot(x^2+1)\cdot 2x\right]}{(x^2+1)^4}=-\frac{2\cdot(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3}=-\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\underline{\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}}$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}=0\ \Rightarrow\ 3x^2-1=0\ ;;\ x^2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=+\frac{\sqrt{3}}{3}}\ ;;\ \underline{x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$f'''(x)=\frac{12x(x^2+1)^3-2(3x^2-1)\cdot\left[3\cdot(x^2+1)^2\cdot 2x\right]}{(x^2+1)^6}=\frac{12x(x^2+1)-12x(3x^2-1)}{(x^2+1)^4}=\frac{12x(-2x^2+2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\underline{\frac{-24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}}$$

$$f''\left(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{P.\ I.\ para\ \ x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ y\ \ para\ +\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$f\left(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\left(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2}{\left(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{3}+1}=\frac{7}{4}\ \Rightarrow\ P.\ I.\Rightarrow\ \underline{\underline{A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{7}{4}\right)}}\ \ y\ \ \underline{\underline{B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{7}{4}\right)}}.$$

c)

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Asíntota\ \ horizontal:\ y=1}}$$

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2+1=0\ ;;\ x\notin R\ \Rightarrow\ \underline{No\ \ tiene.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^3+x}=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{No\ \ tiene\ \ asíntotas\ \ oblicuas}}$$

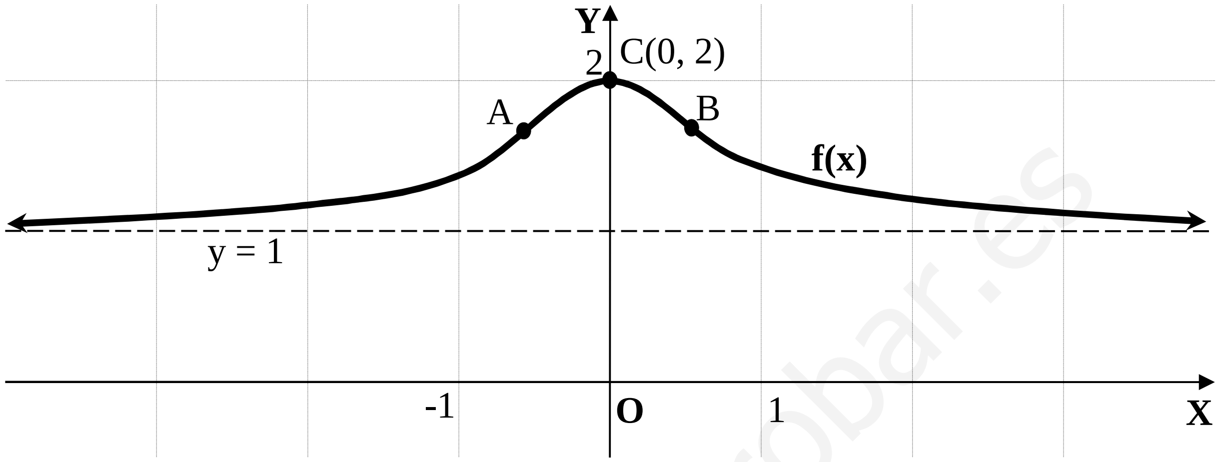
Teniendo en cuenta los datos obtenidos anteriormente y considerando que la función corta al eje Y en el punto C(0, 2).

www.yoquieroaprobar.es

Por cumplirse que $f(-x)=\frac{(-x)^2+2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2+2}{x^2+1}=f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

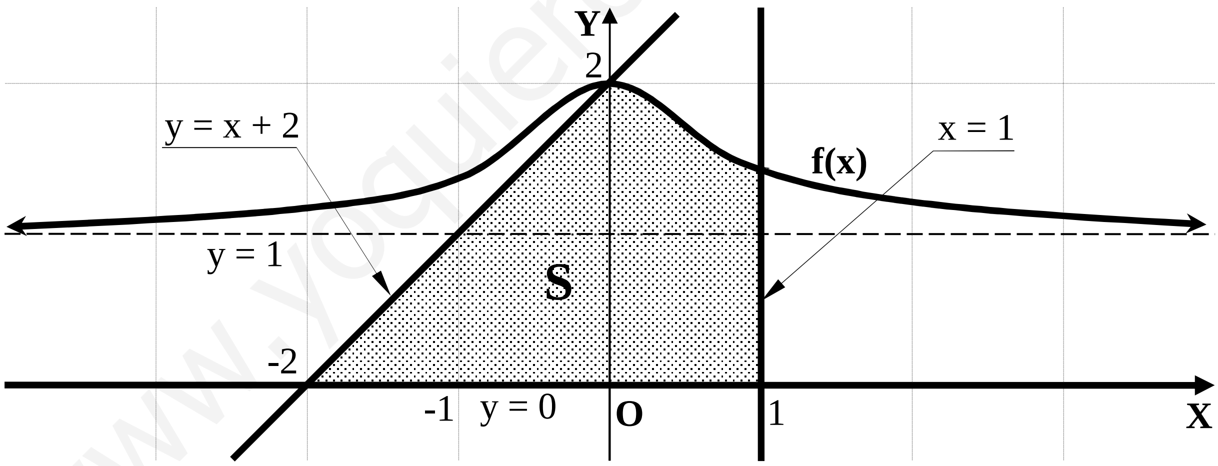
El recorrido de la función es $R(f) \Rightarrow (1,\ +\infty)$.

La representación gráfica, aproximada, es la siguiente:



d)

El área del recinto limitado por las gráficas de f(x), el eje de abscisas y las rectas $y=x+2$ y $x=1$ es la indicada en la figura.



$$S=\int_{-2}^{0}(x+2)\cdot dx+\int_{-2}^{0}\frac{x^2+2}{x^2+1}\cdot dx=\int_{-2}^{0}(x+2)\cdot dx+\int_{-2}^{0}\frac{x^2+1+1}{x^2+1}\cdot dx=\int_{-2}^{0}(x+2)\cdot dx+\int_{-2}^{0}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{0}+\left[x+arc\ tag\ x\right]_0^1=0-\left[\frac{(-2)^2}{2}+2\cdot(-2)\right]+(1+arc\ tag\ 1)-(0+arc\ tag\ 0)=$$

$$=-(2-4)+1+\frac{\pi}{4}-0-0=2+1+\frac{\pi}{4}=\underline{\underline{\frac{12+\pi}{4}\ u^2\cong 3'79\ u^2}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, se pide:

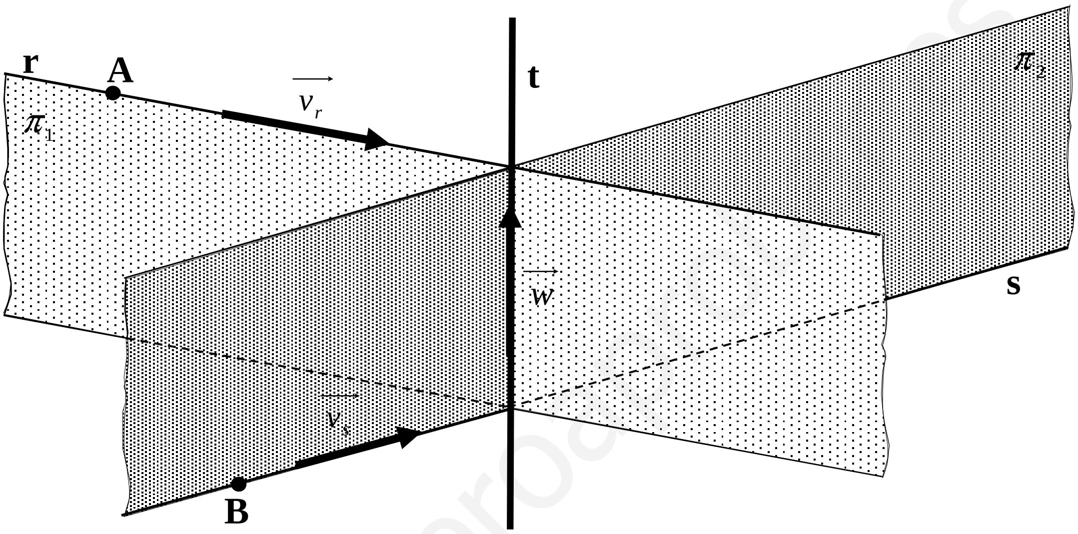
a) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

----

a)

Para determinar la recta t, perpendicular común vamos a seguir el siguiente procedimiento, que además se ilustra con el gráfico adjunto:



1.- Determinamos los puntos $A \in r \;\; y \;\; B \in s$: A(0, 1, -4) y B(0, 0, 0).

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 3,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ 1,\ 4)$.

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12i - j + 2k - 3k + i - 8j = 13i - 9j - k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (13,\ -9,\ -1)}$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 13 & -9 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -3x - 13(y-1) - 18(z+4) - 39(z+4) - 9x + 2(y-1) = 0 \;;;$$

$$-12x - 11(y-1) - 57(z+4) = 0 \;;;\; -12x - 11y + 11 - 57z - 228 = 0 \;;;\; \underline{\pi_1 \equiv 12x + 11y + 57z + 217 = 0}$$

$$\pi_2\left(O;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 4 \\ 13 & -9 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -x+52y-9z-13z+36x+y=0 \ ;;\ \underline{\pi_2 \equiv 35x+53y-22z=0}$$

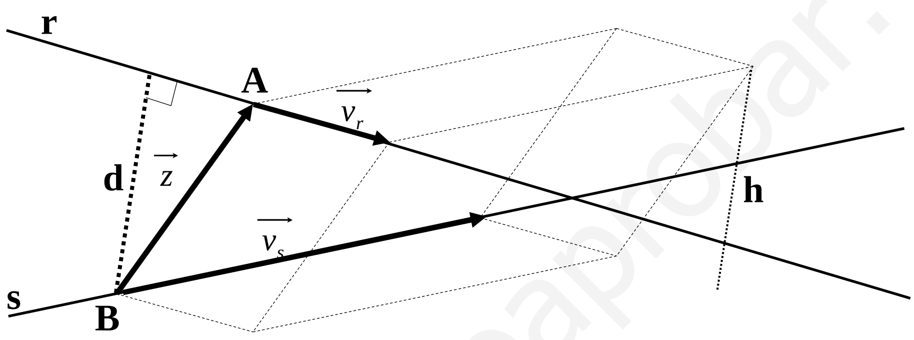
La recta pedida t, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} 12x+11y+57z+217=0 \\ 35x+53y-22z=0 \end{cases}}}$$

b)

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y el vector $\overrightarrow{z}$.

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{BA} = A - B = (0,\ 1,\ -4) - (0,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ -4).$$

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{z}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \ \Rightarrow\ d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{z}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{z}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\left|13,\ -9,\ -1\right|} = \frac{\left|-8-1-8+12\right|}{\sqrt{13^2+(-9)^2+(-1)^2}} = \frac{\left|-5\right|}{\sqrt{169+81+1}} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{251}} \cong 0'32\ unid. = d}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dado el sistema homogéneo de ecuaciones: $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x-4y+kz=0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$.

b) Resolverlo para el caso de k = 3.

----

a)

Cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneo es siempre compatible por admitir la solución trivial x = y = z = 0.

Aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius, considerando que la matriz de coeficientes es la misma que la matriz ampliada, para que el sistema tenga otras soluciones, además de la trivial, es necesario que sea compatible indeterminado, o sea: el determinante de la matriz de coeficientes tiene que ser 0, (para que el rango sea menor que el número de incógnitas).

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; -k+8+2k-1+8-2k^2=0 \;\;;;\;\; 2k^2-k-15=0 .$$

$$k=\frac{1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{1\pm 11}{4} \Rightarrow \underline{k_1=3} \;\;;;\;\; \underline{k_2=-\frac{5}{2}} .$$

$$\underline{\underline{Para\;\; k=3 \;\; y \;\; k=-\frac{5}{2} \;\; el\;\; sistema\;\; tiene\;\; \inf initas\;\; soluciones.}}$$

b)

Para k = 3 el sistema resulta $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x-4y+3z=0 \end{cases}$.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la 3ª, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo z = λ, resulta:

$$\left.\begin{matrix} x+3y=\lambda \\ x-4y=-3\lambda \end{matrix}\right\} \;\; \left.\begin{matrix} x+3y=\lambda \\ -x+4y=3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7y=4\lambda \;\;;;\;\; \underline{y=\frac{4}{7}\lambda} \;\;;;\;\; x=\lambda-3y=\lambda-\frac{12}{7}\lambda=\underline{-\frac{5}{7}\lambda=y}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-\frac{5}{7}\lambda \\ y=\frac{4}{7}\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

4º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2=a\cdot A+b\cdot I$.

b) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

----

a)

$$A^2=a\cdot A+b\cdot I\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;;$$

$$\begin{pmatrix}1+1 & 1-2\\ 1-2 & 1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a\\ a & -2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & a\\ a & -2a+b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\underline{\underline{a=-1}}\\ a+b=2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{b=3}}\end{cases}$$

b)

$$A^5=A^2\cdot A^2\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & -2-5\\ -2-5 & 1+25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -7\\ -7 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-7 & 5+14\\ -7+26 & -7-52\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2 & 19\\ 19 & -59\end{pmatrix}=A^5}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}\,L\,x}{2^x}, & si\ \ x>0 \\ x+k, & si\ \ x\leq 0 \end{cases}$, donde Lx significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) Determinar el valor de k para que la función sea continua en R.

b) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 1.

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}L\,x}{2^x}=\underline{0}\ \ (*) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} (x+k)=\underline{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{k=0}$$

$$(*)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\ L\,x}{2^x}=\frac{0\cdot(-\infty)}{1} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2^x}\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{L\,x}}=1\cdot\frac{0}{\frac{1}{-\infty}}=-\frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-1\cdot\frac{1}{x}}{(L\,x)^2}}=-\frac{1}{2}\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{(L\,x)^2}{\frac{\sqrt{x}}{x}}=-\frac{1}{2}\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{(L\,x)^2}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=-\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{2L\,x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}=2\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{L\,x}{x^{-\frac{1}{2}}}=2\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{L\,x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=-\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow 2\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}=-4\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}=-4\cdot \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}=-4\cdot 0=\underline{0}$$

La función es continua en R para k = 0.

www.yoquieroaprobar.es

b)

La función resulta ser $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\,Lx}{2^x}, & si \;\; x>0 \\ x \;\;, & si \;\; x \le 0 \end{cases}$.

Teniendo en cuenta que para x = 0 es f(x) = 0, y que L1 = 0:

<u>La función pasa por el origen de coordenadas y por el punto A(1, 0).</u>

c)

Para x = 1 la función es $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,Lx}{2^x}$ y f(1) = 0, por lo que el punto de tangencia es A(1, 0). La pendiente es el valor de la derivada en ese punto:

$$y=f(x)=\frac{\sqrt{x}\,Lx}{2^x} \Rightarrow Ly=\frac{1}{2}Lx+L(Lx)-xL2 \;;;\; \frac{y'}{y}=\frac{1}{2x}+\frac{\frac{1}{x}}{Lx}-L2=\frac{1}{2x}+\frac{1}{xLx}-L2 \;;;$$

$$y'=f'(x)=y\cdot\frac{Lx+2-2xL2Lx}{2xLx}=\frac{\sqrt{x}\,Lx}{2^x}\cdot\frac{Lx+2-2xL2Lx}{2xLx}=\underline{\frac{\sqrt{x}}{2^x}\cdot\frac{Lx+2-2xL2Lx}{2x}=f'(x)}$$

$$m=f'(1)=\frac{\sqrt{1}}{2^1}\cdot\frac{L1+2-2\cdot 1\cdot L2\cdot L1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0+2-2\cdot 1\cdot L2\cdot 0}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}=\underline{\frac{1}{2}=m}$$

La ecuación de una recta que pasa por un punto y conocida la pendiente es la siguiente: $y-y_0=m(x-x_0)$.

$$y-0=\frac{1}{2}\cdot(x-1) \;;;\; 2y=x-1.$$

$$\underline{\underline{La \;\; recta \;\; \tan gente \;\; para \;\; x=1 \;\; es \;\; t \equiv x-2y-1=0}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+ay-z=a \\ ax+2z=-2 \\ x+z=-2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro α.

b) Resolverlo en el caso de α = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2a-a^2=a(2-a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=0} \\ \underline{a_2=2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M'=3=n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}}$$

Ahora vamos a estudiar el rango de M’ para los valores que anulan el determinante de M:

$$Para \;\; a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; equivalente \; a \; efectos \; del \; rango \; a \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|M'|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4+2+2=0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=0 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M'=2<n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}}$$

$$Para \;\; a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4+8 = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 2 \Rightarrow Rango\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para el caso de α = 0. El sistema resulta ser $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$, cuyas soluciones son $x = 1,\ z = -1$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \quad \forall \lambda \in R \\ z = -1 \end{cases}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dadas las rectas: $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π determinado por las rectas r y s.

b) Hallar la distancia desde el punto A(0, 1, -1) a la recta s.

----

a)

Para que las rectas r y s determinen al plano π es necesario que se corten o que sean paralelas; para determinarlo obtenemos los vectores directores de las rectas.

Un vector director de r puede ser $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ -1)$.

Para encontrar un vector director de s consideramos que puede serlo el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ -1,\ 0)$:

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2j - k + i = i + 2j - k = \underline{(1,\ 2,\ -1) = \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r}}.$$

Las rectas r y s son paralelas.

Para determinar el plano π tenemos en cuenta que sus vectores directores pueden ser los siguientes: uno de ellos el vector director de las rectas y el otro cualquier vector $\overrightarrow{w}$ que tenga su origen en un punto de una de las rectas y su extremo en un punto de la otra recta. Un punto de r es A(0, 1, -1) y un punto de s es B(0, -2, 3).

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ -2,\ 3) - (0,\ 1,\ -1) = (0,\ -3,\ 4).$$

Considerando uno de los puntos de las rectas, por ejemplo, A(0, 1, -1):

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 8x - 3(z+1) - 3x - 4(y-1) = 0 \ ;;\ 5x - 4y + 4 - 3z - 3 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 5x - 4y - 3z + 1 = 0}}$$

b)

La distancia de un punto P a una recta r viene dada por la siguiente fórmula: $d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo Q un punto de la recta r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de la recta r.

www.yoquieroaprobar.es

Aplicando la fórmula a la recta s y al punto A(0, 1, -1) y conociendo el vector director de s, que es $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 2,\ -1)$ y un punto de s, que es B(0, -2, 3).

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ -2,\ 3)-(0,\ 1,\ -1)=(0,\ -3,\ 4)$$

$$d(A,\ s)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|3i+4j+3k-8i|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|-5i+4j+3k|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{(-5)^2+4^2+3^2}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{25+16+9}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{50}{6}}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{25}{3}}\ unidades=d(A,\ s)}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Sea π el plano que contiene a los puntos P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0) y R(0, 0, 3), se pide:

a) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

b) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

El volumen del tetraedro es, en valor absoluto, un sexto del volumen del paralelepípedo cuyas dimensiones determinan los tres vectores

Los vectores que determinan los cuatro puntos son los siguientes:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OP}=(1,\ 0,\ 0)\ ;;\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{OQ}=(0,\ 2,\ 0)\ ;;\ \overrightarrow{w}=\overrightarrow{OR}=(0,\ 0,\ 3)$$

El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que determinan sus dimensiones:

$$V_{OPQR}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot|6|=\underline{\underline{1\,u^3=V_{OPQR}}}$$

b)

El plano π que contiene a los puntos P, Q y R puede determinarse por cualquiera de los puntos y dos de los vectores que determinan.

$$\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0,\ 2,\ 0)-(1,\ 0,\ 0)=(-1,\ 2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{\beta}=\overrightarrow{PR}=R-P=(0,\ 0,\ 3)-(1,\ 0,\ 0)=(-1,\ 0,\ 3).$$

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{\alpha},\ \overrightarrow{\beta}\right)\equiv\begin{vmatrix}x-1&y&z\\-1&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=0\ ;;\ 6(x-1)+2z+3y=0\Rightarrow\ \underline{\pi\equiv 6x+3y+2z-6=0}.$$

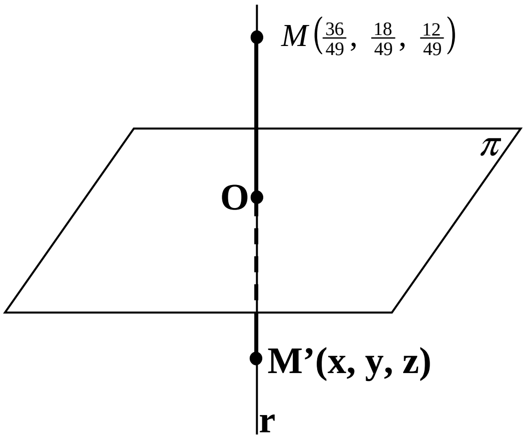
Un vector normal al plano π es: $\overrightarrow{n}=(6,\ 3,\ 2)$.

La recta r que pasa por el punto O y es perpendicular al plano π es: $r\equiv\begin{cases}x=6\lambda\\y=3\lambda\\z=2\lambda\end{cases}$

El punto M, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

www.yoquieroaprobar.es

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 6x+3y+2z-6=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=6\lambda \\ y=3\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 36\lambda+9\lambda+4\lambda-6=0 \;;\; 49\lambda=6 \;;\; \underline{\lambda=\frac{6}{49}}$$



$$\left.\begin{array}{l} x=6\cdot\frac{6}{49}=\frac{36}{49} \\ y=3\cdot\frac{6}{49}=\frac{18}{49} \\ z=2\cdot\frac{6}{49}=\frac{12}{49} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{36}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{12}{49}\right)}$$

Para que M' sea el punto simétrico de M con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{OM'} \Rightarrow O-M=M'-O \;;\; (0,\ 0,\ 0)-\left(\tfrac{36}{49},\ \tfrac{18}{49},\ \tfrac{12}{49}\right)=(x,\ y,\ z)-(0,\ 0,\ 0)\;;$$

$$\left(-\tfrac{36}{49},\ -\tfrac{18}{49},\ -\tfrac{12}{49}\right)=(x,\ y,\ z) \Rightarrow \underline{\underline{M'\left(-\tfrac{36}{49},\ -\tfrac{18}{49},\ -\tfrac{12}{49}\right)}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es