

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2011 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS IITiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$:

a) Calcular el rango de A en función de los valores de α .

b) En el caso de $\alpha = 2$, discutir el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) En el caso de $\alpha = 1$, resolver el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^3 - a^2 + 4 - 2a^3 + 2a - 2a = -a^2 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = -2} ; ; \underline{a_2 = 2}.$$

$$\underline{\underline{\text{Para } \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 3}}$$

$$\text{Para } \alpha = -2 \text{ es } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = -C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Para $\alpha = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Para $\begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 2$

b)

Para $\alpha = 2$, el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, equivalente al sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 2 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = b \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{pmatrix}$. Sabemos que $\text{Rango } A = 2$.

Veamos el rango de A' en función de b :

$|A'| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} = 8b - 2 - 4 - 8 - 4 - 2b = 6b - 18 = 0 \;; \; b - 3 = 0 \;; \; \underline{b = 3}$.

Para $b = 3 \rightarrow \text{Rango } A' = 2$. Para $b \neq 3 \rightarrow \text{Rango } A' = 3$.

Para $b \neq 3 \Rightarrow \text{Rango } A' = 3 \neq \text{Rango } A \Rightarrow \text{Incompatible}$

Para $b = 3 \Rightarrow \text{Rango } A' = 2 = \text{Rango } A < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

Resolvemos para $b = 3$, en cuyo caso el sistema es compatible indeterminado es el siguiente: $\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 2 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$. Despreciamos, por ejemplo, la primera ecuación, con lo

que el sistema resulta: $\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$. Parametrizando una incógnita, por ejemplo $\underline{z = \lambda}$:

$\begin{cases} -x + 2y = 1 + \lambda \\ 2x + y = 3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 2 + 2\lambda \\ 2x + y = 3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 5y = 5 \;; \; \underline{y = 1}$.

$$-x+2y=1+\lambda \;; \; -x+2=1+\lambda \;; \; \underline{x=1-\lambda}.$$

$$\text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array} \right\} \forall \lambda \in R$$

c)

Para $\alpha = 1$ el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, que equivale al

sistema: $\left. \begin{array}{l} 2x-2y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{array} \right\}$, que es compatible determinado. Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1^2+4} = \frac{-1+2+4-2-1+4}{-1+4} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}} = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4-2+2-4+4-1}{3} = \frac{3}{3} = \underline{\underline{1}} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4+1-8+2-4-4}{3} = \frac{-9}{3} = \underline{\underline{-3}} = z$$

2º) a) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas $r_1 \equiv x = y = z$, $r_2 \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $r_3 \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas $r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}$ y $r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

a)

Los puntos de intersección del plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$ con cada una de las rectas son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \equiv x = y = z \\ \pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3x + 7x = 24 \;; \; 12x = 24 \;; \; x = y = z = 2 \Rightarrow \underline{A(2, 2, 2)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} r_2 \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 0 + 0 = 24 \;; \; 2x = 24 \;; \; x = 12 \Rightarrow \underline{B(12, 0, 0)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} r_3 \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 3y + 0 = 24 \;; \; 3y = 24 \;; \; y = 8 \Rightarrow \underline{C(0, 8, 0)}$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{OA} = \underline{(2, 2, 2)} \;; \; \overrightarrow{OB} = \underline{(12, 0, 0)} \;; \; \overrightarrow{OC} = \underline{(0, 8, 0)}$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{array} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |12 \cdot 8 \cdot 2| = 2 \cdot 16 = \underline{\underline{32 \, u^3 = V_{OABC}}}$$

b)

Los vectores directores de r_4 y r_5 son $\overrightarrow{v_4} = (1, 2, -2)$ y $\overrightarrow{v_5} = (2, 3, -1)$.

La recta s pedida, por ser perpendicular a r_4 y r_5 , tiene como vector director a $\overrightarrow{w}$, que es el producto vectorial de los vectores directores de r_4 y r_5 :

$$\vec{w} = \vec{v}_4 \wedge \vec{v}_5 = (1, 2, -2) \wedge (2, 3, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2i - 4j + 3k - 4k + 6i + j) =$$

$$= (4i - 3j - k) = (4, -3, -1) = \vec{w}.$$

La recta s es la intersección de los planos π , que contiene a r_4 y tiene como vectores directores al vector director de r_4 y al vector $\vec{w}$, y el plano π' , que contiene a r_5 y tiene como vectores directores al vector director de r_5 y al vector $\vec{w}$.

Un punto de r_4 es $A(-1, 5, -1)$.

$$\pi(A; \vec{v}_4, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-5 & z+1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 ;;$$

$$-2(x+1) - 3(z+1) - 8(y-5) - 8(z+1) - 6(x+1) + (y-5) = 0 ;; -8(x+1) - 7(y-5) - 11(z+1) = 0 ;;$$

$$8x + 8 + 7y - 35 + 11z + 11 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 8x + 7y + 11z - 16 = 0}.$$

Un punto de r_5 es $B(0, -1, 1)$.

$$\pi'(B; \vec{v}_5, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 ;; -3x - 6(z-1) - 4(y+1) - 12(z-1) - 3x + 2(y+1) = 0 ;;$$

$$-6x - 2(y+1) - 18(z-1) = 0 ;; 3x + y + 1 + 9z - 9 = 0 \Rightarrow \underline{\pi' \equiv 3x + y + 9z - 8 = 0}.$$

La expresión por dos ecuaciones implícitas de s es:

$$s \equiv \begin{cases} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{cases}$$

3º) a) Calcular la integral: $I = \int_1^3 x \sqrt{4+5x^2} \cdot dx$.

b) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

a)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 x \sqrt{4+5x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4+5x^2 = t \\ 10x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{10} \cdot dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x=3 \rightarrow t=49 \\ x=1 \rightarrow t=9 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_9^{49} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} \int_9^{49} t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_9^{49} = \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_9^{49} = \frac{2}{10 \cdot 3} \cdot [t\sqrt{t}]_9^{49} = \frac{1}{15} \cdot (49\sqrt{49} - 9\sqrt{9}) = \frac{1}{15} \cdot (49 \cdot 7 - 9 \cdot 3) = \\
 &= \frac{1}{15} \cdot (343 - 27) = \frac{1}{15} \cdot 316 = \frac{316}{15} u^2 = I
 \end{aligned}$$

b)

La función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$ está definida en el intervalo $[-2, 2]$ y es continua en su dominio.

Por ser $f(x) = f(-x)$ la función es simétrica con respecto al eje Y.

Una función tiene un máximo o mínimo relativo para los valores que anulan su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}} = -\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} = 0 \Rightarrow \underline{x=0}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos hay que recurrir a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo relativo y si es positiva, de un máximo relativo.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -\frac{3 \cdot \sqrt{12-3x^2} - 3x \cdot \frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}}}{(\sqrt{12-3x^2})^2} = -3 \cdot \frac{\sqrt{12-3x^2} + \frac{3x^2}{\sqrt{12-3x^2}}}{12-3x^2} = \\
 &= -3 \cdot \frac{12-3x^2+3x^2}{(12-3x^2)\sqrt{12-3x^2}} = \frac{-12}{(4-x^2)\sqrt{12-3x^2}} = f''(x).
 \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{-12}{(4-0)\sqrt{12-0}} = \frac{-12}{4\sqrt{12}} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = 0}.$$

Por ser una función continua y tener un solo máximo relativo, éste es un máximo absoluto.

$$f(0) = \sqrt{12-0} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\text{Máximo absoluto: } A(0, 2\sqrt{3})}.$$

Por tratarse de una función continua y simétrica con respecto a Y, la función tiene dos puntos mínimos absolutos en sus extremos, que son los siguientes:

$$f(-2) = f(2) = \sqrt{12-3 \cdot 2^2} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimos absolutos: } B(-2, 0) \text{ y } C(2, 0)}.$$

4º) a) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

b) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Considerando la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$, su derivada es $f'(x) = 20x^4 + 3$, que es mayor de cero para cualquier valor real de x, lo cual significa que la función f(x) es monótona creciente en su dominio.

La función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$, por ser polinómica, es continua y derivable en su dominio, que es R.

De lo anterior se deduce que, necesariamente, corta al eje de abscisas en un solo punto lo que justifica que

La ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea m, c.q.d.

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$, se pide:

a) Determinar el valor de α para que la función posea un mínimo relativo en $x = 1$.

b) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $\alpha = 1$.

c) Esbozar la gráfica de la función para $\alpha = 1$.

a)

Una función tiene un mínimo relativo en un punto para los valores de x que anulan la primera derivada y hacen positiva a la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{4ax^3 \cdot x^3 - (ax^4 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{4ax^6 - 3x^2(ax^4 + 1)}{x^6} = \frac{4ax^4 - 3(ax^4 + 1)}{x^4} = \frac{4ax^4 - 3ax^4 - 3}{x^4} =$$
$$= \frac{ax^4 - 3}{x^4} = f'(x).$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{a \cdot 1^4 - 3}{1^4} = 0 \quad ; \quad a - 3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 3}}.$$

b)

Para $\alpha = 1$ la función es $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$. Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty \Rightarrow \underline{\underline{No tiene.}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^3 = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{x = 0}} \quad (\text{El eje de ordenadas es asíntota vertical}).$$

Oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 + 1}{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = \underline{\underline{1 = m}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0 = n$$

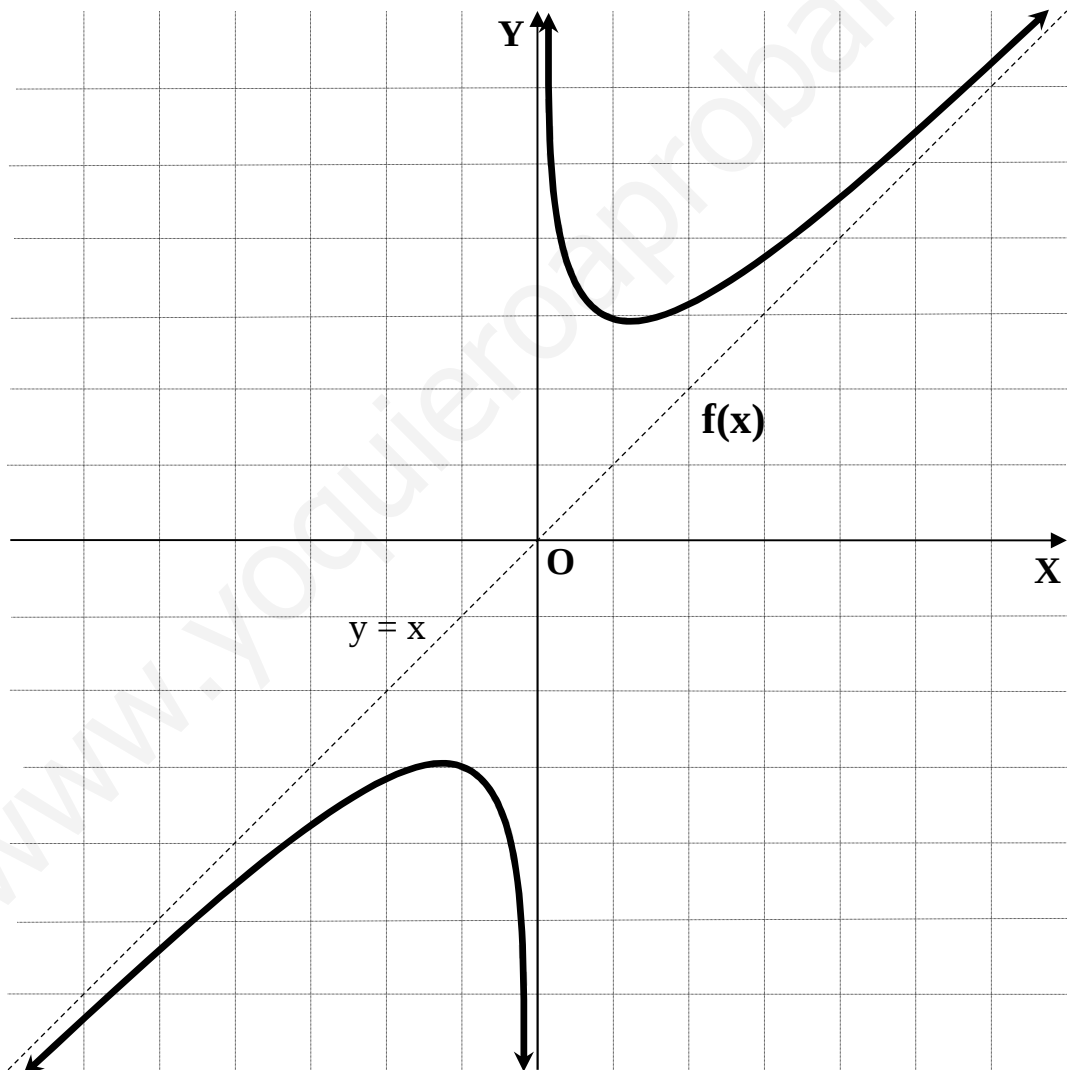
Asíntota oblicua: $y = x$

c)

La función para $\alpha = 1$ es $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$.

El dominio de la función es: $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^3} = \frac{x^4 + 1}{-x^3} = -\frac{x^4 + 1}{x^3} = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.



La función no tiene puntos de corte con el eje X por ser: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 + 1}{x^3} = 0$;;

$$x^4 + 1 = 0 \quad ; \quad x^4 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}.$$

Por ser $f''(x) = \frac{12}{x^5}$, la concavidad y convexidad de la función es la siguiente:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Convexidad } (\cup)} \Rightarrow (-\infty, 0) \\ \text{Para } x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \underline{\text{Concavidad } (\cap)} \Rightarrow (0, +\infty) \end{cases}.$$

Con los datos anteriores, la representación aproximada de la función es la que aparece en la figura adjunta.

www.yoquieroaprobar.es

2º) a) Discutir el sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}, \text{ según los valores de } m.$$

b) Resolver el sistema en los casos de $m = 0$ y $m = 1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (m-2) - (m-2)(m-1)^2 = (m-2)[1 - (m-1)^2] =$$

$$= (m-2)[1 - (m^2 - 2m + 1)] = (m-2)(1 - m^2 + 2m - 1) = (m-2)(-m^2 + 2m) = -m(m-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } m = 0 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{ ambas tienen rango 2 por tener las primeras y segundas filas iguales y de signo contrario.}$$

ner las primeras y segundas filas iguales y de signo contrario.

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Para } m = 2 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango } A = 1 \\ \text{Rango } A' \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Para } m = 2 \Rightarrow \text{Rango } A = 1 ;; \text{ Rango } A' \geq 2 \Rightarrow \text{Incompatible}$$

b)

Para $m = 0$ el sistema $A \cdot X = B$ resulta: $\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2x = 2 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} y - z = 0 \\ x = -1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $m = 1$ el sistema $A \cdot X = B$ resulta: $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ -x = 3 \end{cases}$, que es compatible determinado.

$$\text{Solución: } x = -3 \;; \; y = 1 \;; \; z = 1$$

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$, se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) En el caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

a)

Vamos a hacer el estudio por los vectores normales a los planos.

Un vector normal al plano π_1 es $\vec{n}_1 = (2, 1, -2)$.

Un vector normal al plano π_2 es $\vec{n}_2 = (1, -1, 2)$.

Los planos π_1 y π_2 no son paralelos por ser:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2}.$$

Los planos π_1 y π_2 no son perpendiculares por ser:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, 1, -2) \cdot (1, -1, 2) = 2 - 1 - 4 = -3 \neq 0.$$

De lo anterior se deduce que los planos π_1 y π_2 son oblicuos, se cortan en una recta.

b)

La recta que determinan los planos es $r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

Para hallar un punto y un vector director de r la expresamos en forma vectorial:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 + 2\lambda \\ x - y = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = 2 \;; \; x = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \;; \; x - y = 1 - 2\lambda \;;$$

$$y = x - 1 + 2\lambda = \underline{\underline{\frac{2}{3} - 1 + 2\lambda = -\frac{1}{3} + 2\lambda}} = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector de r son: $P(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ y $\vec{v} = (0, 2, 1)$

4º) a) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 1).

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto P(1, 2, 3) y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2, 1, 1)$.

c) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

a)

Los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 1) determinan los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1).$$

La expresión del plano π_1 dada por su ecuación general, considerando los vectores anteriores y, por ejemplo, el punto A, es la siguiente:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 2(x-1) + 2z + y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_1 \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0.}}$$

b)

La ecuación del haz de planos cuyo vector normal es $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ tiene la siguiente expresión general: $\pi \equiv -2x + y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz π , el plano π_2 que pasa por P(1, 2, 3) es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -2x + y + z + D = 0 \\ P(1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 1 + 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow \underline{\underline{D = -3}} \Rightarrow \underline{\underline{\pi_2 \equiv 2x - y - z + 3 = 0.}}$$

c)

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\vec{u} = (-1, 2, 0), \quad \vec{v} = (-1, 0, 1) \quad \text{y} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1, 2, 3) - (1, 0, 0) = (0, 2, 3).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |2 + 6| = \frac{8}{6} = \underline{\underline{\frac{4}{3} u^3 = V_{ABCP}}}$$
