

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****SEPTIEMBRE – 2012**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dadas la función $f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, se pide:

- a) Hallar el valor de A para que f(x) sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?
- b) Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.
- c) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de f(x) en el intervalo [4, 8].

a)

La función f(x) es continua en R, excepto para $x = 3$, cuya continuidad vamos a conseguir hallando el correspondiente valor de A.

Para que la función sea continua para $x = 3$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\text{Para } x = 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x + A) = f(3) = \underline{9 + A} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-4 + 10x - x^2) = -4 + 30 - 9 = \underline{17} \end{array} \right\} \Rightarrow 9 + A = 17 \;; \; \underline{\underline{A = 8}}.$$

Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sus derivadas laterales en ese punto sean iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 10 - 2x & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 10 - 2 \cdot 3 = 4 & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(3^-) \neq f'(3^+)}.$$

La función no es derivable para $x = 3$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 10 - 2x & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 2x = 0 \;; \; 5 - x = 0 \Rightarrow \underline{x = 5}.$$

Para $x = 5$ la derivada de la función es $f'(x) = 0$.

c)

$$f(5) = -4 + 10 \cdot 5 - 5^2 = -4 + 50 - 25 = 50 - 29 = 21.$$

Por ser la parábola $y = -4 + 10x - x^2$ cóncava ($\cap$) tiene un máximo relativo en el punto P(5, 21).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Teniendo en cuenta que:} \\ f(4) = -4 + 10 \cdot 4 - 4^2 = -4 + 40 - 16 = 40 - 20 = 20 \\ f(8) = -4 + 10 \cdot 8 - 8^2 = -4 + 80 - 64 = 80 - 68 = 12 \end{array} \right\}, \text{ los puntos}$$

máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[4, 8]$ son los siguientes:

Máximo absoluto P(5, 21) y mínimo absoluto Q(8, 12).

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 6 \\ x + (a+1)y + z = 3 \\ (a-1)x - ay - 3z = -3 \end{cases}$$
, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores de α .

b) Resolverlo para $\alpha = -1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 & 6 \\ 1 & a+1 & 1 & 3 \\ a-1 & -a & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{vmatrix} = -9(a+1) - 4a + a(a-1) - 4(a+1)(a-1) + 3a + 3a =$$

$$= -9a - 9 + 2a + a^2 - a - 4(a^2 - 1) = a^2 - 8a - 9 - 4a^2 + 4 = -3a^2 - 8a - 5 = 0 \quad ; \quad 3a^2 + 8a + 5 = 0 \quad ;$$

$$a = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6} = \frac{-4 \pm 1}{3} \Rightarrow \underline{a_1 = -1} \quad ; \quad \underline{a_2 = -\frac{5}{3}}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$$

$$\text{Para } \alpha = -1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2 - F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 2}.$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$$

$$\text{Para } \alpha = -\frac{5}{3} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & 4 & 6 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 3 \\ -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -3 & -3 \end{pmatrix}, \text{ equivalente a efectos de rango a la matriz}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 12 & 18 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ -8 & 5 & -15 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A'' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 9 & -5 & 18 \\ 3 & -2 & 9 \\ -8 & 5 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \\ -8 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (90 + 90 + 75 - 96 - 135 - 75) = 3 \cdot (255 - 306) \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 3}.$$

Para $a = -\frac{5}{3} \Rightarrow \text{Rango } A = 2$; $\text{Rango } A' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

b)

Resolvemos para $\alpha = -1$ en cuyo caso el sistema resulta $\begin{cases} 3x - y + 4z = 6 \\ x + z = 3 \\ -2x + y - 3z = -3 \end{cases}$, que es

compatible indeterminado. Para resolverlo se desprecia una de las ecuaciones (la tercera) y hacemos $\underline{z = \lambda}$, resultando el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \rightarrow \underline{x = 3 - \lambda} \Rightarrow 3x - y = 6 - 4\lambda \;; \; y = 3x - 6 + 4\lambda = 9 - 3\lambda - 6 + 4\lambda = \underline{3 + \lambda = y}.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 3 + \lambda, \; \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

3º) Se dan la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$. Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $P(4 + 2\lambda, 1 - \lambda, 2 + 3\lambda)$.

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto P y al plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = 1 \Rightarrow \frac{|2 \cdot (4 + 2\lambda) + (1 - \lambda) - 2 \cdot (2 + 3\lambda) - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|8 + 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - 6\lambda - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} =$$

$$= \frac{|-2 - 3\lambda|}{\sqrt{9}} = \frac{|-2 - 3\lambda|}{3} = 1 \;; \; |-2 - 3\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} -2 - 3\lambda_1 = 3 \rightarrow 3\lambda_1 = -5 \;; \; \lambda_1 = -\frac{5}{3} \\ 2 + 3\lambda_2 = 3 \rightarrow 3\lambda_2 = 1 \;; \; \lambda_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\lambda = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ y = 1 - \lambda = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ z = 2 + 3\lambda = 2 - \frac{15}{3} = -3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -3\right)}}.$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\lambda = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\ y = 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = 2 + 3\lambda = 2 + \frac{3}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)}}.$$

4º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 3, 4) y es paralelo a las rectas r y s.

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto B(4, -1, 2) y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

a)

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \;; \; \underline{y=4-\lambda} \;; \; \underline{z=4-2\lambda} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=4-2\lambda \end{cases}.$$

Un vector de cada una de las rectas r y s son $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ y $\vec{v}_s = (1, -1, -2)$.

La ecuación general del plano π y es paralelo a las rectas r y s es la siguiente:

$$\pi(A; \vec{v}_r, \vec{v}_s) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$-2(x-2)-(y-3)-(z-4)-(z-4)-(x-2)+2(y-3)=0 \;; \; -3(x-2)+(y-3)-2(z-4)=0 \;;$$

$$-3x+6+y-3-2z+8=0 \;; \; -3x+y-2z+11=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x - y + 2z - 11 = 0}}$$

b)

El vector normal del plano $\pi \equiv 3x - y + 2z - 11 = 0$ es $\vec{n} = (3, -1, 2)$.

La recta t que pasa por B(4, -1, 2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv 3x - y + 2z - 11 = 0$ tiene como vector director a $\vec{n} = (3, -1, 2)$.

La expresión de t expresada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}}}$$

OPCIÓN B

1º) Dado el punto $P(2, 1, -1)$, se pide:

a) Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3, 0, 2)$.

b) Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1=y-1=z$.

c) Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

a)

El punto P' simétrico con respecto del punto $Q(3, 0, 2)$ cumple que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q - P = P' - Q \;; \; (3, 0, 2) - (2, 1, -1) = (x, y, z) - (3, 0, 2) \;; \; (1, -1, 3) = (x-3, y, z-2) \Rightarrow$$

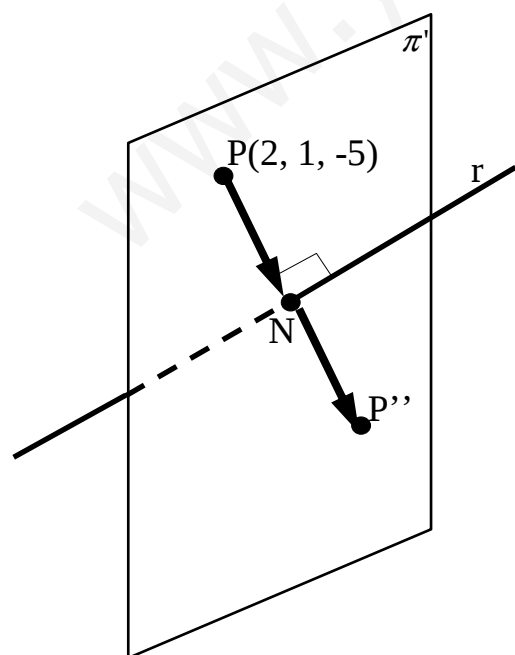
$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=1 \rightarrow x=4 \\ y=-1 \\ z-2=3 \Rightarrow z=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P'(4, -1, 5)}}.$$

b)

Un vector director de r es $\underline{\underline{\vec{v}_r = (1, 1, 1)}}$.

El plano π' , perpendicular a r por $P(2, 1, -1)$, es el que tiene como vector normal a $\underline{\underline{\vec{v}_r}}$ y contiene al punto P :

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x + y + z + D = 0 \\ P(2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 1 - 1 + D = 0 \;; \; \underline{\underline{D = -2}} \Rightarrow \underline{\underline{\pi' \equiv x + y + z - 2 = 0}}.$$



La expresión de r por unas ecuaciones para-

$$\text{métricas es } r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x + y + z - 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 1 + \lambda + \lambda - 2 = 0 \;;$$

$$3\lambda = 0 \;; \; \underline{\underline{\lambda = 0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1+0=1 \\ y=1+0=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{N(1, 1, 0)}.$$

Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura anterior de forma aproximada.

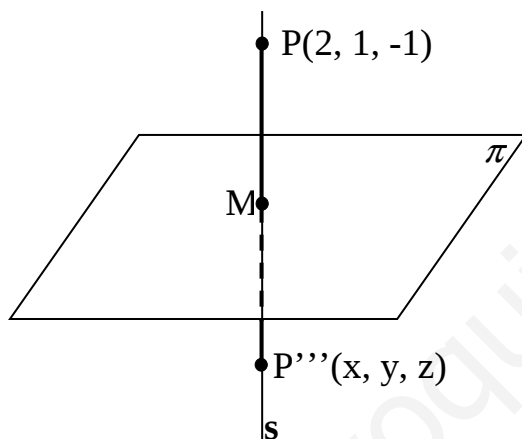
Para que P'' sea el punto simétrico de P con respecto a r , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N \;; \; (1, 1, 0) - (2, 1, -1) = (x, y, z) - (1, 1, 0) \;;$$

$$(-1, 0, 1) = (x-1, y-1, z) \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \rightarrow \underline{x=0} \\ y-1=0 \rightarrow \underline{y=1} \\ \underline{z=1} \end{cases} \Rightarrow \underline{P''(0, 1, 1)}.$$

c)

Un vector normal al plano $\pi \equiv x + y + z = 3$ es $\vec{n} = (1, 1, 1)$.



La recta s es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector $\vec{n} = (1, 1, 1)$; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}.$$

El punto M , intersección del plano π con la recta s , tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z - 3 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda - 3 = 0 \;; \; 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{3}}.$$

$$M \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ z = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)}.$$

Para que P''' sea el punto simétrico de P con respecto a π , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'''} \Rightarrow M - P = P''' - M ;; \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (2, 1, -1) = (x, y, z) - \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) ;;$$

$$\left(\frac{7}{3} - 2, \frac{4}{3} - 1, -\frac{2}{3} + 1\right) = \left(x - \frac{7}{3}, y - \frac{4}{3}, z + \frac{2}{3}\right) ;; \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3x-7}{3}, \frac{3y-4}{3}, \frac{3z+2}{3}\right) ;;$$

$$(1, 1, 1) = (3x-7, 3y-4, 3z+2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x-7=1 \rightarrow x=\frac{8}{3} \\ 3y-4=1 \rightarrow y=\frac{5}{3} \\ 3z+2=1 \rightarrow z=-\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P''' \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dada la función $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$, se pide:

a) Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

b) Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $A[\pi, f(\pi)]$.
Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en el punto.

a)

La función $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito considerado.

El teorema de Bolzano dice que “si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

Si se aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, perteneciente al intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ se observa que:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} > 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi^2}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{9\pi^2\sqrt{2}}{8} < 0$$

Lo anterior significa que:

La ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, c.q.j.

b)

En primer lugar resolvemos la integral indefinida.

$$A = \int x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ \operatorname{sen} x \cdot dx = dv \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2x \cdot dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \cdot dx = \underline{-x^2 \cdot \cos x + 2A_1 = A} \quad (*)$$

$$A_1 = \int x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos x \cdot dx = dv \rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = \underline{x \cdot \sin x + \cos x + C = A_1}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A_1 en el valor de A , queda:

$$A = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot (x \cdot \sin x + \cos x) + C = \underline{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C = A}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \cdot dx &= \int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x \cdot dx = \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} = \\ &= (-\pi^2 \cos \pi + 2\pi \sin \pi + 2 \cos \pi) - (-0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 2 \cos 0) = \\ &= -\pi^2 \cdot (-1) + 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - (-0 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 1) = \pi^2 + 0 - 2 + 0 - 2 = \underline{\pi^2 - 4}. \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x \cdot dx = \pi^2 - 4}}$$

c)

La pendiente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x \Rightarrow m = f'(\pi) = \pi(2 \sin \pi + \pi \cos \pi) = \pi[2 \cdot 0 + \pi \cdot (-1)] = \underline{-\pi^2}.$$

Las pendientes de rectas normales son inversas y de signo contrario, por lo cual la pendiente de la recta normal es $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-\pi^2} = \underline{\frac{1}{\pi^2}}$.

$$f(\pi) = \pi^2 \cdot \sin \pi = \pi^2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{Punto de tangencia: } \underline{A(\pi, 0)}.$$

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m'(x - x_0)$.

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$$y - 0 = \frac{1}{\pi^2} \cdot (x - \pi) ; ; \pi^2 y - x - \pi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Normal : n \equiv x - \pi^2 y + \pi = 0}}.$$

3º) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{d} \in R^3$, vectores columna. Si $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -1$, $\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 3$ y $\det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -2$, calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$.

b) $\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$.

c) $\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d})$.

Para la resolución de el presente ejercicio es conveniente recordar las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de una matriz, su determinante queda multiplicado por dicho número.

2ª.- Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de una matriz, su determinante cambia de signo.

4ª.- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es nulo.

5ª.- Si una de las líneas de una matriz es combinación de otras líneas paralelas a ella, su determinante es nulo.

a)

$$\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b}) = -\det(\vec{a}, \vec{b}, 3\vec{d}) = -3 \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -3 \cdot (-1) = 3.$$

$$\underline{\underline{\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b}) = 3}}$$

b)

$$\begin{aligned} \det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) &= \det(\vec{a}, \vec{c}, -\vec{d}) + \det(-\vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) = \\ &= -\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = -3 + (-2) = -5. \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\det(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}, -\vec{d}) = -5}}$$

c)

$$\begin{aligned} \det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) &= \det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) + \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) = \\ &= A + B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) = \\
 &= \det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{d}, 2\vec{a}, -3\vec{a}) + \det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{d}) = \det(\vec{d}, 2\vec{a}, \vec{b}) + 0 + 0 = \\
 &= 2 \cdot \det(\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = 2 \cdot (-1) = \underline{\underline{-2 = A}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) = \\
 &= \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b}) + \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, -3\vec{a}) + \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{d}) = 0 + 0 + \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{d}) = \\
 &= \det(3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{d}) = 3 \cdot 2 \cdot \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}) = -6 \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = -6 \cdot (-1) = \underline{\underline{6 = B}}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de A y B obtenidos:

$$\underline{\underline{\det(\vec{d} + 3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}) = -2 + 6 = 4}}$$

4º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - 2z = 2 \\ ax - y + z = -8, \\ 2x + az = 4 \end{cases}$ se pide:

a) Discutir el sistema según los valores de α .

b) Resolverlo para $\alpha = -5$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -a - 4 = 0 \Rightarrow \underline{a = -4}.$$

Para $a \neq -4 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$

$$\text{Para } a = -4 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = 2F_1\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

Para $a = -4 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$.

b)

Resolvemos para $\alpha = -5$ que resulta el sistema $\begin{cases} x - 2z = 2 \\ -5x - y + z = -8, \\ 2x - 5z = 4 \end{cases}$ que es compatible

determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 8}{5 - 4} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2 = x}}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -5 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{1} = \frac{40 + 4 + 40 - 32 - 4 - 50}{1} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-4 + 4}{1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}} = z.$$

www.yoquieroaprobar.es