

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****SEPTIEMBRE – 2013**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

c) Esbozar la gráfica de la función.

a)

$$f(x) = \frac{4(2x+2) + 27(x-4)}{(x-4)(2x+2)} = \frac{8x+8+27x-108}{2(x-4)(x+1)} = \frac{35x-100}{2(x^2-3x-4)} = \frac{5(7x-20)}{2(x^2-3x-4)}$$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(7x-20)}{2(x-4)(x+1)} = 0 \Rightarrow$$

La recta $y = 0$ (eje X) es asíntota horizontal de la función.

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$2(x-4)(x+1)=0 \Rightarrow$$

Son asíntotas horizontales las rectas $x = 4$ y $x = -1$.

Oblicuas: Para que una función tenga asíntotas oblicuas es condición necesaria que la función racional tenga un grado mayor el numerador que el denominador. Por otra parte, las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles en una función.

$f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{7(x^2 - 3x - 4) - (7x - 20)(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7x^2 - 21x - 28 - (14x^2 - 21x - 40x + 60)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{7x^2 - 21x - 28 - (14x^2 - 61x + 60)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{-7x^2 + 40x - 88}{(x^2 - 3x - 4)^2} = f'(x) \end{aligned}$$

El denominador es positivo para cualquier valor real perteneciente al dominio de la función, que es: $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-1, 4\}$, por lo tanto, para determinar el signo de la derivada tenemos que estudiar el numerador:

$$7x^2 - 40x + 88 = 0 \quad ; ; \quad x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 2464}}{14} \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \Rightarrow \underline{f'(x) < 0, \forall x \in D(f)}.$$

La función $f(x)$ es monótona decreciente en su dominio.

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{(-14x + 40)(x^2 - 3x - 4)^2 - (-7x^2 + 40x - 88) \cdot 2 \cdot (x^2 - 3x - 4)(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^4} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{(-14x + 40)(x^2 - 3x - 4) - 2(-7x^2 + 40x - 88)(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^3} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{-14x^3 + 42x^2 + 56x + 40x^2 - 120x - 160 - 2(-14x^3 + 21x^2 + 80x^2 - 120x - 176x + 264)}{(x^2 - 3x - 4)^3} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{-14x^3 + 82x^2 - 64x - 160 - 2(-14x^3 + 101x^2 - 296x + 264)}{(x^2 - 3x - 4)^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{-14x^3 + 82x^2 - 64x - 160 + 28x^3 - 202x^2 + 592x - 528}{(x^2 - 3x - 4)^3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{14x^3 - 120x^2 + 528x - 688}{(x^2 - 3x - 4)^3} =$$

$$= \underline{\underline{5 \cdot \frac{7x^3 - 60x^2 + 264x - 344}{(x^2 - 3x - 4)^3} = f''(x)}}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 5 \cdot \frac{7x^3 - 60x^2 + 264x - 344}{(x^2 - 3x - 4)^3} = 0 \quad ; \quad 7x^3 - 60x^2 + 264x - 344 = 0.$$

Resolviendo por Ruffini:

2	7	-60	264	-344
		14	-92	344
	7	-46	172	0

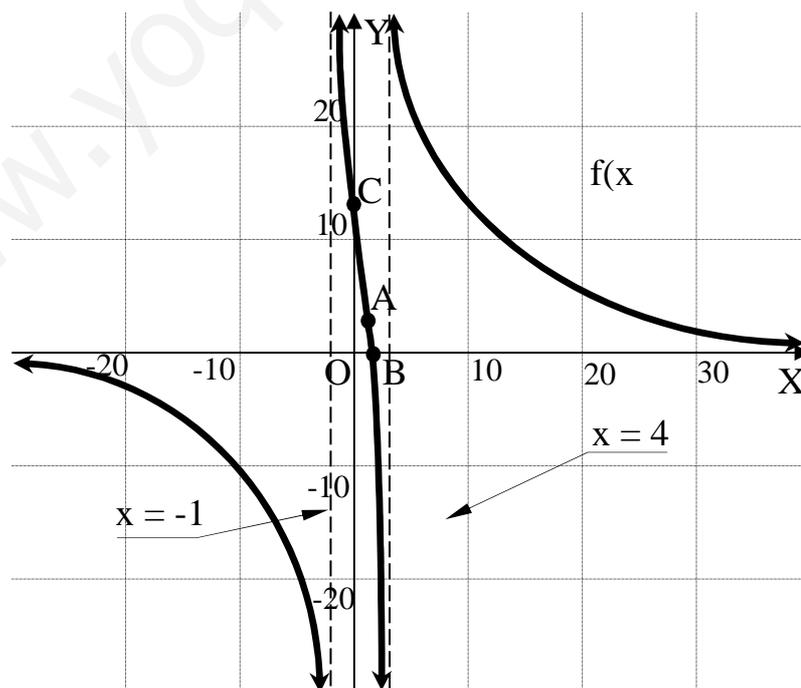
$$7x^2 - 46x + 172 = 0 \quad ; \quad x = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 4816}}{14} \Rightarrow \underline{\underline{x \notin R}}.$$

La única solución real es para $x = 2 \Rightarrow$ Punto de inflexión para $x = 2$.

$$f(2) = \frac{4}{2-4} + \frac{27}{4+2} = -2 + \frac{27}{6} = -2 + \frac{9}{2} = \frac{-4+9}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \Rightarrow A\left(2, \frac{5}{2}\right)}}.$$

c)

Para facilitar la representación gráfica se obtienen los puntos de corte con los ejes, que son los siguientes:



$$\text{Eje X: } f(x) = 0 \Rightarrow \frac{5(7x - 20)}{2(x^2 - 3x - 4)} = 0 \quad ; \quad 7x - 20 = 0 \quad ; \quad x = \frac{20}{7} \cong 2'86 \Rightarrow \underline{\underline{B\left(0, \frac{20}{7}\right)}}.$$

$$\text{Eje Y: } x=0 \Rightarrow f(x) = \frac{4}{0-4} + \frac{27}{0+2} = -1 + \frac{27}{2} = \frac{-2+27}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow \underline{C\left(\frac{25}{2}, 0\right)}.$$

Con los datos obtenidos puede hacerse una representación gráfica aproximada de la función, que es la que aparece en la figura.

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de α .

b) Resolverlo el sistema homogéneo $A \cdot X = O$ en el caso de $\alpha = 1$.

c) Resolver el sistema homogéneo $A \cdot X = O$ cuando $\alpha = -1$.

a)

Restando la primera columna a todas las demás y desarrollando después por los menores adjuntos de la segunda columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 & a-1 \\ a & 1-a & 1-a & 0 \\ a & 0 & 1-a & 1-a \\ a & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a-1 & a-1 \\ a & 1-a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \end{vmatrix}.$$

Cambiando de signo la primera fila y sacando factores comunes de las dos últimas columnas:

$$|A| = -(1-a) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1-a & 1-a \\ a & 1-a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \end{vmatrix} = -(1-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Desarrollando por Sarrus:}$$

$$|A| = -(1-a)^3 \cdot (-1+a-a-a) = -(1-a)^3 \cdot (-1-a) = (1+a)(1-a)^3.$$

$$\underline{\underline{|A| = (1+a)(1-a)^3}}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 4}}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } a=1 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A = 1.}}$$

$$\text{Para } a=-1 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = -F_1\} \Rightarrow \text{A efectos de rango, la matriz } A$$

es equivalente a la matriz: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= -1 - 1 - 1 - 1 + 1 - 1 = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 3}.$

Para $a = -1 \Rightarrow \text{Rango } A = 3$

b)

Para $\alpha = 1$ el sistema homogéneo $A \cdot X = O$ resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y su

solución es equivalente a las soluciones de la ecuación: $x + y + z + w = 0$.

La ecuación $x + y + z + w = 0$, además de admitir la solución trivial $x = y = z = w = 0$, admite infinitas soluciones dependiendo de tres parámetros por ser 4 el número de incógnitas y uno el rango de la matriz.

Solución: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \rho \\ w = -\lambda - \mu - \rho \end{cases}, \forall \lambda, \mu, \rho \in R$

c)

Para $\alpha = -1$ el sistema homogéneo $A \cdot X = O$ resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Como sabemos por el apartado a): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3.

El sistema $\begin{cases} x + y - z - w = 0 \\ -x + y + z - w = 0 \\ -x - y - z + w = 0 \end{cases}$, además de admitir la solución trivial $x = y = z = w = 0$,

admite infinitas soluciones dependiendo de un parámetro por ser 4 el número de incógnitas y tres el rango de la matriz

Haciendo, por ejemplo, $w = \lambda$ y resolviendo por el método de Gauss sumando la primera fila a las demás:

$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ -x + y + z = \lambda \\ -x - y - z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = \lambda \\ 2y = 2\lambda \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = 0} \;; \; \underline{y = \lambda} \;; \; \underline{x = 0}.$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = z = 0 \\ y = w = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dados los puntos A(2, -2, 1), B(0, 1, -2), C(-2, 0, -4), D(2, -6, 2), se pide:

a) Probar que el cuadrilátero ABCD es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) Hallar el área del triángulo ABC.

a)

Considerando los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, -2) - (2, -2, 1) = (-2, 3, -3).$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-2, 0, -4) - (0, 1, -2) = (-2, -1, -2).$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (2, -6, 2) - (-2, 0, -4) = (4, -6, 6).$$

$$\overrightarrow{DA} = A - D = (2, -2, 1) - (2, -6, -2) = (0, 4, 3).$$

Los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son linealmente dependientes (por ser $\overrightarrow{CD} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$) y linealmente independientes de los vectores \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{DA} , que justifica lo que se nos preguntaba:

El cuadrilátero ABCD es un trapecio por ser paralelos los lados AB y CD.

La recta r que contiene a los puntos A y B expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$.

La distancia entre los lados paralelos es equivalente a la distancia de la recta r a cualquiera de los puntos de la recta que pasa por C y D. Considerando al punto C y sabiendo que la distancia del punto C a la recta r viene dada por la fórmula

$d(C, r) = \frac{|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_r}|}$, siendo A un punto de r y $\overrightarrow{v_r}$ un vector director de la recta r.

Siendo $\overrightarrow{CA} = A - C = (2, -2, 1) - (-2, 0, -4) = (4, -2, 5)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-2, 3, -3)$:

$$d = d(C, r) = \frac{|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{array} \right\|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{|6i - 10j + 12k - 4k - 15i + 12j|}{\sqrt{4 + 9 + 9}} =$$

$$= \frac{|-9i+2j+8k|}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{(-9)^2+2^2+8^2}}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{81+4+64}}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{22}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{149}{22}}}} \quad u = 2'60 \quad u = d .$$

b)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 3, -3) \text{ y } \vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 0, -4) - (2, -2, 1) = \underline{(-4, 2, -5)} .$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Debe saberse que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-15i + 12j - 4k + 12k + 6i - 10j| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |-9i + 2j + 8k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{81 + 4 + 64} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{149} \quad u^2 \cong 6'10 \quad u^2 = \underline{\underline{S_{ABC}}} .$$

4º) Dados el punto P(1, 2, -1) y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) Hallar el punto de tangencia P'.

b) Hallar la ecuación de S.

a)

El vector normal del plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$ es $\vec{n} = (1, 2, -2)$.

La recta s que contiene al diámetro de la esfera PP' tiene como vector director a $\vec{n} = (1, 2, -2)$ y contiene al punto P(1, 2, -1); su expresión dada por unas ecuaciones pa-

$$\text{ramétricas es } s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases} .$$

El punto P' pedido es la intersección del plano π y la recta s:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x+2y-2z+2=0 \\ s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (1+\lambda)+2(2+2\lambda)-2(-1-2\lambda)+2=0 ;;$$

$$1+\lambda+4+4\lambda+2+4\lambda+2=0 ;; 9\lambda+9=0 ;; \lambda+1=0 ;; \underline{\lambda=-1} \Rightarrow \underline{P'(0, 0, 1)}.$$

b)

El centro O' de la circunferencia es el punto medio de P(1, 2, -1) y P'(0, 0, 1), que es el punto de coordenadas la media aritmética de las coordenadas de los puntos P y P': O'(1/2, 1, 0).

El radio de la esfera es la distancia O'P:

$$r = \overline{O'P} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

La ecuación de la esfera es:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 ;; x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 + z^2 = \frac{9}{4} ;;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 1 = 0}}.$$

OPCIÓN B

1º) Sea r_A la recta con vector dirección $\overrightarrow{v_A} = (1, \lambda, 2)$ que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$, r_B la recta con vector dirección $\overrightarrow{v_B} = (1, 1, 1)$ que pasa por $B(1, -2, 3)$, y r_C la recta con vector dirección $\overrightarrow{v_C} = (1, 1, -2)$ que pasa por $C(4, 1, -3)$. Se pide:

a) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C .

c) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C .

a)

La expresión de las rectas r_A y r_B dadas por ecuaciones continuas son las siguientes:

$$r_A \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{\lambda} = \frac{z-1}{2} \quad ; ; \quad r_A \equiv \begin{cases} \lambda x - \lambda = y - 2 \\ 2x - 2 = z - 1 \end{cases} \quad ; ; \quad r_A \equiv \begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 2 \\ 2x - z = 1 \end{cases}.$$

$$r_B \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1} \quad ; ; \quad r_B \equiv \begin{cases} x-1 = y+2 \\ x-1 = z-3 \end{cases} \quad ; ; \quad r_B \equiv \begin{cases} x-y = 3 \\ x-z = -2 \end{cases}.$$

Para que las rectas r_A y r_B se corten tiene que ser compatible determinado el sistema que forman, que es:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x - y = \lambda - 2 \\ 2x - z = 1 \\ x - y = 3 \\ x - z = -2 \end{array} \right\}.$$

Despreciando la ecuación del parámetro y resolviendo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - z = 1 \\ x - y = 3 \\ x - z = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow z = 2x - 1 \\ \Rightarrow 2x - 1 = x + 2 \quad ; ; \quad \underline{x = 3} \quad ; ; \quad \underline{y = 0} \quad ; ; \quad \underline{z = 5} \Rightarrow \underline{P(3, 0, 5)}. \\ \rightarrow z = x + 2 \end{array}$$

$$\lambda x - y = \lambda - 2 \Rightarrow 3\lambda - 0 = \lambda - 2 \quad ; ; \quad 2\lambda = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}}.$$

b)

Las rectas r_B y r_C determinan el plano π , cuya ecuación general es la siguiente:

$$\pi(B; \overrightarrow{v_B}, \overrightarrow{v_C}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ;$$

$$-2(x-1)+(y+2)+(z-3)-(z-3)-(x-1)+2(y+2)=0 \quad ; ; \quad -3(x-1)+3(y+2)=0 \quad ; ;$$

$$-3x+3+3y+6=0 \quad ; ; \quad -3x+3y+9=0 \quad ; ; \quad -x+y+3=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x-y-3=0}.$$

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

Para que el plano π sea paralelo a la recta r_A es necesario que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares, es decir: que su producto escalar sea cero:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, \lambda, 2) \cdot (1, -1, 0) = 0 \quad ; ; \quad 1 - \lambda + 0 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 1}.$$

Para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C tiene que ser $\lambda = 1$.

c)

El ángulo que forman r_B y r_C es el menor ángulo que forman sus vectores directores. Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C &= |\vec{v}_B| \cdot |\vec{v}_C| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{v}_B \cdot \vec{v}_C}{|\vec{v}_B| \cdot |\vec{v}_C|} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, -2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{1+1-2}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{0}{\sqrt{18}} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 90^\circ}. \end{aligned}$$

Las rectas r_B y r_C son perpendiculares.

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro λ .

b) Resolverlo en el caso de $\lambda = 1$.

c) Resolverlo en el caso de $\lambda = -1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1 - \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & -2\lambda \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + \lambda + \lambda(\lambda - 1)^2 - \lambda(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) - \lambda = 2 + (\lambda - 1)[\lambda(\lambda - 1) - \lambda - 2] =$$

$$= 2 + (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - \lambda - 2) = 2 + (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 2 + \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda + 2 =$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0. \text{ Resolviendo por Ruffini:}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -21 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces diferentes son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.

Para $\begin{cases} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$

$$\text{Para } \lambda = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = -F_1\} \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 2}.$$

$$\text{Para } \lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2 = C_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 2}$$

$$\text{Para } \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$$

b)

$$\text{Para } \lambda = 1 \text{ el sistema es } \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y = -2 \\ y + z = 0 \end{cases}, \text{ que es compatible determinado.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ x + y = -2 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = -y - 2 \Rightarrow 2(-y - 2) + y - y = 0 \;; \; -y - 2 = 0 \;; \; \underline{y = -2} \;; \; \underline{x = 0} \;; \; \underline{z = 2}. \\ \rightarrow z = -y \end{array}$$

c)

$$\text{Para } \lambda = -1 \text{ el sistema es } \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 2 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}, \text{ equivalente al sistema } \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases},$$

que es compatible indeterminado. Haciendo $\underline{z = \lambda}$:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 2 + \lambda \\ x + y = 2 + 2\lambda \end{array} \right\} 3x = 4 + 3\lambda \Rightarrow \underline{x = \frac{4}{3} + \lambda} \;; \; y = 2 + 2\lambda - x = 2 + 2\lambda - \frac{4}{3} - \lambda = \underline{\frac{2}{3} + \lambda} = y.$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \lambda \\ y = \frac{2}{3} + \lambda, \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

3º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

b) Calcular $I = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx$.

a)

El punto de tangencia es: $f(0) = \frac{0}{0+1} = 0 \Rightarrow \underline{O(0, 0)}$.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$m = f'(0) = \frac{1 - 0}{(0 + 1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Sabiendo que la ecuación de una recta conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\text{Tangente: } t \equiv y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv y = x}}$$

b)

El valor de la integral indefinida $A = \int x \cdot f(x) \cdot dx = \int x \cdot \frac{x}{x^2 + 1} \cdot dx = \int \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot dx$ es el siguiente:

$$A = \int \frac{x^2}{x^2 + 1} \cdot dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) \cdot dx = \underline{\underline{x - \text{arc tag } x + C}}$$

Considerando el valor de A, el valor de la integral definida pedida es:

$$I = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = [x - \text{arc tag } x]_0^1 = (1 - \text{arc tag } 1) - (0 - \text{arc tag } 0) = 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\underline{\frac{4 - \pi}{4}}}$$

$$\underline{\underline{I = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \frac{4 - \pi}{4}}}$$

4º) Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Esbozar la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{-0} = 1.$$

Para que una función tenga límite en un punto es condición necesaria que existan sus límites laterales en ese punto y que, además, sean iguales.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{\infty} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{\underline{\underline{\text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}}}}$$

b)

La función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ está definida para cualquier valor real de x , excepto para el valor $x = 0$.

Teniendo en cuenta que: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} < 0, \forall x \in D(f)$:

La función $f(x)$ es decreciente en su dominio.

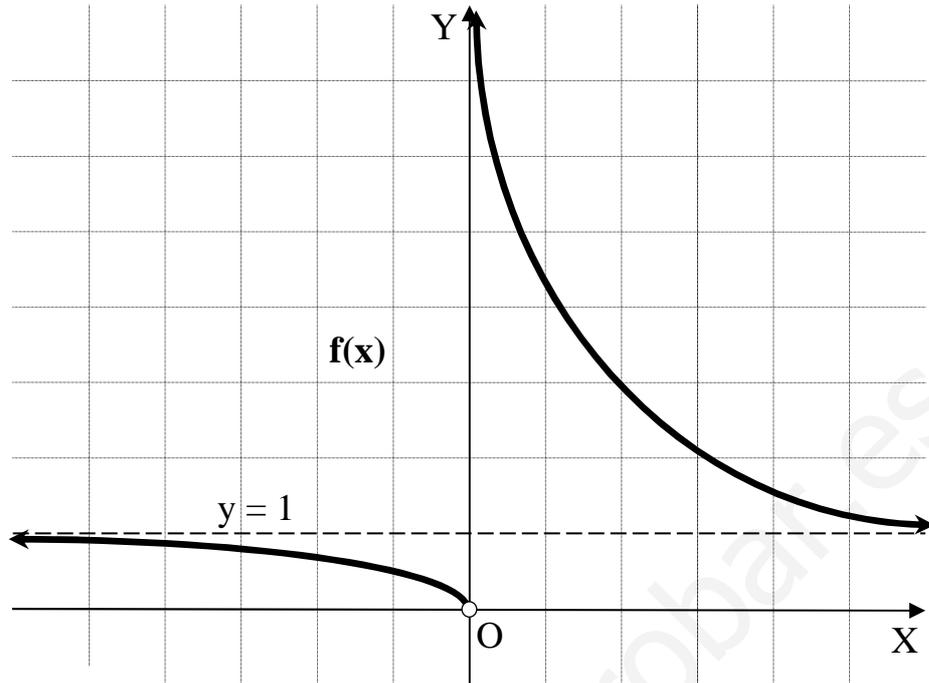
Del apartado a) se deduce que:

Es asíntota horizontal la recta $y = 1$.

Considerando que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{\infty} = \infty$:

La recta $x = 0$ (eje Y) es asíntota vertical de la función.

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que el recorrido de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ es $(0, +\infty)$, se puede esbozar la gráfica de $f(x)$, que es, aproximadamente, la siguiente:



www.yoquieroaprobar.es