PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonablemente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular α, β, γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema A · X = B.

b) Si β = γ = 1. ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo A · X = O sea compatible determinado?

c) Si α = -1, β = 1 y γ = 0, resuelve el sistema A · X = B.

----

a)

$$A\cdot X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha+2\beta+3\gamma=1 \\ \gamma+3\alpha=0 \\ 1+2\beta+3\gamma=1 \end{array}\right\}.$$

De las ecuaciones primera y tercera se deduce que α = 1. Sustituyendo en la segunda ecuación: γ = -3. Sustituyendo en la tercera ecuación: $1+2\beta-9=1$;; $\underline{\beta=\frac{9}{2}}$.

$$\underline{\underline{Solución: \ \alpha=1,\ \beta=\frac{9}{2},\ \gamma=-3}}.$$

b)

Para β = γ = 1 tiene que ser compatible determinado el siguiente sistema:

$$A\cdot X=O\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & 0 & \alpha\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\alpha x+y+z=0\\ x+\alpha z=0\\ 1+y+z=0\end{array}\right\}.$$

Para que el sistema homogéneo resultante sea compatible determinado (solución trivial) es necesario que la matriz de coeficientes sea inversible, es decir: su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & 0 & \alpha\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+\alpha-\alpha^2-1=a-a^2=a(1-a)=0\Rightarrow\underline{a_1=0}\ ;;\ \underline{a_2=1}.$$

A · X = O es compatible determinado tiene que ser

$$\underline{\underline{A\cdot X=O\ \ es\ \ compatible\ \ \det er\min ado\ \ \forall a\in R-\{0,\ 1\}}}$$

c)

Para α = -1, β = 1 y γ = 0 es $A\cdot X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y=1\\ -z=0\\ x+y=1\end{array}\right\}$, cuya solución es: $\underline{\underline{x=0,\ y=1,\ z=0}}$.

****

2º) Dado el punto P(1, 0, 1), el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$, la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcular el punto P' simétrico de P respecto de π.

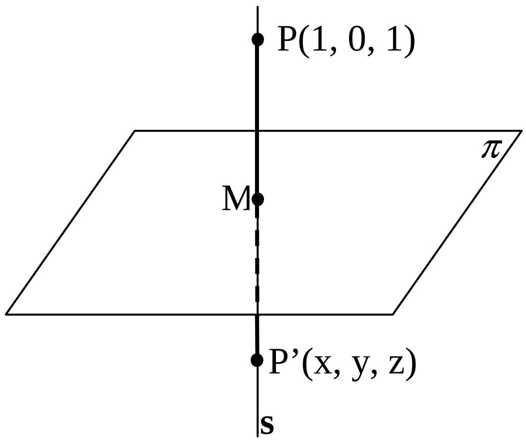
b) Hallar la distancia de P a r.

c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas O(0, 0, 0) y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY, OZ.

----

a)

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(1,\ 5,\ -6)$.



La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano; su ecuación dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=1-6\lambda \end{cases}.$$

El punto M, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+5y-6z=1 \\ s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=1-6\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+5(5\lambda)-6(1-6\lambda)=1\ ;;\ 1+\lambda+25\lambda-6+36\lambda=1\ ;;$$

$$62\lambda=6\ ;;\ 31\lambda=3\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{3}{31}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\frac{3}{31}=\frac{34}{31} \\ y=\frac{15}{31} \\ z=1-\frac{18}{31}=\frac{13}{31} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{34}{31},\ \frac{15}{31},\ \frac{13}{31}\right)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'} \Rightarrow M-P=P'-M\ ;;\ \left(\frac{34}{31},\ \frac{15}{31},\ \frac{13}{31}\right)-(1,\ 0,\ 1)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{34}{31},\ \frac{15}{31},\ \frac{13}{31}\right);;$$

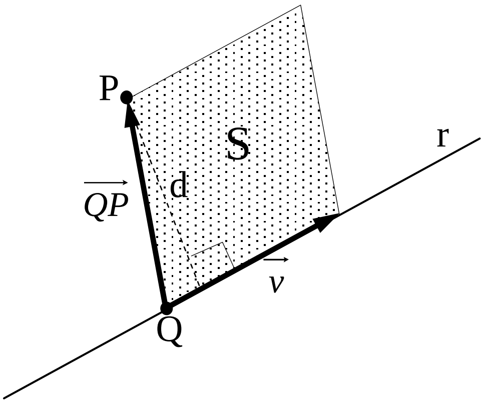
$$\left(\frac{3}{31},\ \frac{15}{31},\ -\frac{18}{31}\right)=\left(x-\frac{34}{31},\ y-\frac{15}{31},\ z-\frac{13}{31}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\frac{34}{31}=\frac{3}{31} \to \underline{x=\frac{37}{31}} \\ y-\frac{15}{31}=\frac{15}{31} \to \underline{y=\frac{30}{31}} \\ z-\frac{13}{31}=-\frac{18}{31} \to \underline{z=-\frac{5}{31}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(\frac{37}{31},\ \frac{30}{31},\ -\frac{5}{31}\right)}}.$$

b)

La distancia d del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que

Q(0, 0, 1) es un punto de r y $\overrightarrow{v}=(0,\ 0,\ 1)$ es un vector director de la recta r.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S=d\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|$ y que también puede ser $S=\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

El vector $\overrightarrow{QP}$ en el caso que nos ocupa es:

$\overrightarrow{QP}=P-Q=(1,\ 0,\ 1)-(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ 0)$.

$$d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{|\,j\,|}{\sqrt{1}}=\frac{1}{1}=\underline{\underline{1\ unidad}}.$$

c)

Los puntos de corte del plano $\pi\equiv x+5y-6z=1$ con los ejes de coordenadas se obtienen igualando a cero las variables que no coincidan con el eje:

$$Eje\ \ X\ \rightarrow \left.\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\ x=1\ \Rightarrow\ \underline{A(1,\ 0,\ 0)}.$$

$$Eje\ \ Y\ \rightarrow \left.\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow 5y=1\ ;;\ y=\tfrac{1}{5}\ \Rightarrow\ \underline{B\left(0,\ \tfrac{1}{5},\ 0\right)}.$$

$$Eje\ \ Z\ \rightarrow \left.\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow\ -6z=1\ ;;\ z=-\tfrac{1}{6}\ \Rightarrow\ \underline{C\left(0,\ 0,\ -\tfrac{1}{6}\right)}.$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{OB}=\left(0,\ \tfrac{1}{5},\ 0\right)$ y $\overrightarrow{OC}=\left(0,\ 0,\ -\tfrac{1}{6}\right)$.

El volumen de un tetraedro en función de los tres vectores que lo determinan es un sexto del producto mixto de estos vectores.

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{6} \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|-1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\right|=\underline{\underline{\frac{1}{180}\ u^3}}$$

****

3º) a) Sea $f: R \rightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x=-2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta $y=16x+16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar $f(-2)$, $f'(-2)$ y $f''(-2)$.

b) Determinar el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x)=x^4+4x^3$ y el eje OX.

----

a)

Por tener un punto de inflexión para x = -2 tiene que ser $\underline{\underline{f''(-2)=0}}$.

Siendo la recta $y=16x+16$, cuya pendiente es 16, tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa x = -2, tiene que cumplirse que $\underline{\underline{f'(-2)=16}}$.

Por tener el punto de tangencia abscisa x = -2, y pertenecer a la función y a la tangente tiene que cumplirse que:

$$f(-2)=y(-2)=16\cdot(-2)+16=-32+16=-16 \Rightarrow \underline{\underline{f(-2)=-16}}.$$

b)

La función $g(x)=x^4+4x^3$ puede expresarse de la forma $g(x)=x^3(x+4)$.

Los únicos puntos de corte de g(x) con el eje OX son O(0, 0) y A(-4, 0).

Teniendo en cuenta que $g(-1)=(-1)^4+4\cdot(-1)^3=1-4=-3<0$, lo que significa que todas las ordenadas de la superficie a calcular son negativas.

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie pedida es:

$$S=\int_0^{-4} g(x)\cdot dx=\int_0^{-4}\left(x^4+4x^3\right)\cdot dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4x^4}{4}\right]_0^{-4}=\left[\frac{x^5}{5}+x^4\right]_0^{-4}=\left[\frac{(-4)^5}{5}+(-4)^4\right]-0=$$

$$=\frac{-1024}{5}+256=\frac{-1024+1280}{5}=\underline{\underline{\frac{256}{5}\,u^2=S}}.$$

****

4º) Calcular justificadamente:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1-2x-e^x+sen\,(3x)}{x^2}$ b) $\lim_{x \to \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$.

----

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-2x-e^x+sen\,(3x)}{x^2} = \frac{1-0-e^0+0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-2-e^x+3\cdot\cos(3x)}{2x} = \frac{-2-e^0+3\cdot 1}{0} = \frac{-2-1+3}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-e^x-9\cdot sen\,(3x)}{2} = \frac{-e^0-9\cdot 0}{2} = \frac{-1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}.$$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x^2+2}{x^2-1} \cdot \frac{x-6}{2x-1} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+2}{x^2-1} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x-6}{2x-1} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} a+L(1-x), & si \;\; x<0 \\ x^2 \cdot e^{-x}, & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$, (donde L denota logaritmo neperiano), se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calcular el valor de α, para que $f(x)$ sea continua en todo R.

c) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f’, donde sea posible.

----

a)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot e^{-x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = \underline{\underline{0}}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [a + L(1-x)] = a + L(1+\infty) = a + \infty = \underline{\underline{+\infty}}.$$

b)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para el valor x = 0, que debemos determinar el valor de α para que lo sea.

Para que $f(x)$ sea continua en x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [a - L(1-x)] = a - 0 = \underline{a} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 \cdot e^{-x}\right) = \underline{0} = f(0) \qquad (*) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}.$$

(*) Este límite se ha resuelto en el apartado a).

c)

$$\underline{\underline{f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{1-x}, & si \;\; x<0 \\ x \cdot e^{-x}(2-x) \;(**), & si \;\; x>0 \end{cases}}}.$$

(**) Siendo $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, es $g\,(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x}(2-x)$.

Nótese que la función no es derivable para x = 0 por ser distintas sus derivadas por la izquierda y por la derecha:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\dfrac{-1}{1-0}=-1 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f'(0^-)\neq f'(0^+)}.$$

$$\underline{\underline{f(x) \ es \ derivable \ en \ (-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)}}$$

****

2º) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y π.

b) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) Determinar la recta que pasa por A(-2, 1, 0), corta a r, y es paralela a π.

----

a)

Las dos formas más usuales del estudio de la posición relativa de una recta y un plano son mediante sus ecuaciones implícitas o por sus vectores normal y director, respectivamente.

Por ecuaciones implícitas:

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema de ecuaciones son las siguientes: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 $\rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M' = 2 $\rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$Rango\ \ M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3}.$$

<u>La recta r y el plano π son secantes.</u>

Por vectores:

Un vector normal al plano π es $\underline{\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 0)}$.

Para determinar un vector director de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \;;;\; y = 2 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (0,\ 2,\ 1)}.$$

Los vectores $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{v_r}$ no son paralelos (sus componentes no son proporcionales) ni tampoco son perpendiculares (su producto escalar es distinto de cero), lo cual implica que:

<u>La recta r y el plano π son secantes.</u>

b)

Existes diversas formas de resolver este apartado; una de ellas es la siguiente.

El punto de corte de r y π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ \underline{x = 1} \\ y - 2z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - y = 2 \;;;\; \underline{y = 0} \;;;\; 0 - 2z = 2 \;;;\; \underline{z = -1} \Rightarrow \underline{P(1,\ 0,\ -1)}.$$

El plano β pedido tiene como vectores directores a $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{v_r}$ y contiene a P; su expresión general es la siguiente:

$$\beta\left(P;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v_r}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1) + 4(z+1) - 2y = 0 \;;;\; -x + 1 + 4z + 4 - 2y = 0 .$$

$$\underline{\underline{\beta \equiv x + 2y - 4z - 5 = 0}}$$

Otra forma:

El plano β pedido, por ser perpendicular a π tiene que tener un vector normal perpendicular a $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 0)$; por contener a r, el vector normal de β tiene que ser perpendicular a $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 2,\ 1)$. Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican, un vector director de β es cualquiera que sea linealmente dependiente del siguiente producto vectorial:

$$\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -i + 4k - 2j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n_\beta} = (1,\ 2,\ -4)}.$$

La expresión general del plano pedido es de la forma $\beta \equiv x + 2y - 4z + D = 0$.

Para determinar el valor de D tenemos en cuenta que el punto P(1, 0, -1) de corte del plano π y la recta r pertenece a β, por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\beta \equiv x+2y-4z+D=0 \\ P(1,\ 0,\ -1)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 1+2\cdot 0-4\cdot(-1)+D=0\ ;;\ 1+0+4+D=0\ ;;\ \underline{D=-5}.$$

$$\underline{\underline{\beta \equiv x+2y-4z-5=0}}$$

c)

El plano ψ paralelo al plano π y que contiene al punto A(-2, 1, 0) es:

$$\left.\begin{array}{l}\psi \equiv 2x-y+Q=0 \\ A(-2,\ 1,\ 0)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot(-2)-1+Q=0\ ;;\ -4-1+Q=0\ ;;\ \underline{Q=5} \Rightarrow \underline{\psi \equiv 2x-y+5=0}.$$

El punto H, intersección de r con ψ es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\psi \equiv 2x-y+5=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot 1-(2+2\lambda)+5=0\ ;;\ 2-2-2\lambda+5=0\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{5}{2}} \Rightarrow \underline{H\left(1,\ 7,\ \frac{5}{2}\right)}.$$

La recta pedida s es la que pasa por los puntos A y H; su vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{AH}=H-A=\left(1,\ 7,\ \frac{5}{2}\right)-(-2,\ 1,\ 0)=\left(3,\ 6,\ \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s}=(6,\ 12,\ 5)}.$$

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x=-2+6\lambda \\ y=1+12\lambda \\ z=5\lambda \end{cases}}}$.

****

3º) Dala la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor o valores de α para que la matriz A tenga inversa.

b) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso de α = 2.

----

a)

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix}=2-3a^2+a^2+3=5-2a^2=0 \;;;\; a^2=\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{a_1=-\frac{\sqrt{10}}{2}} \;;;\; \underline{a_2=\frac{\sqrt{10}}{2}}.$$

$$\underline{\underline{A \text{ es inversible } \forall a \in R-\left\{-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}}}.$$

b)

Para α = 2 es $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $|A|=5-2\cdot 2^2=5-8=-3$ y $A^t=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$Adj.\ de\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}}.$$

****

4º) Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y 6 bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide:

a) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos 8 cuadernos y 3 rotuladores.

----

a)

Llamando x, y, z a los precios respectivos de un cuaderno, un rotulador y un bolígrafo, podemos establecer el sistema: $\left.\begin{array}{r} 5x+2y+3z=22 \\ 2x+y+6z=14 \end{array}\right\}$.

Parametrizando la variable z (precio de un bolígrafo), el sistema anterior puede expresarse de la forma: $\left.\begin{array}{r} 5x+2y=22-3z \\ 2x+y=14-6z \end{array}\right\}$. Resolviendo por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y=22-3z \\ -4x-2y=-28+12z \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=-6+9z} \;;; \left.\begin{array}{r} -10x-4y=-44+6z \\ 10x+5y=70-30z \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=26-24z}$$

<u>El precio de un cuaderno equivale a 9 bolígrafos menos 6 euros.</u>

<u>El precio de un rotulador equivale a 26 euros menos 24 bolígrafos.</u>

b)

Expresando el valor a pagar en función de z (precio de un bolígrafo):

$$8(-6+9z)+3(26-24z)=-48+72z+78-72z=\underline{30}$$

<u>Por la adquisición de 8 cuadernos y 3 rotuladores deberíamos pagar 30 euros</u>.

****