PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{L(x+1)}{x+1}$, donde L denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) Calcular $\int f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función puede expresarse de la forma $f(x) = \frac{x^2+x+L(x+1)}{(x^2-4)(x+1)}$.

$(x^2 - 4)(x + 1) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 2}$.

Teniendo en cuenta que no existe el logaritmo de cero ni de números negativos y que las funciones racionales no están definidas para los valores que anulan su denominador, el domino de la función es el siguiente:

$$\underline{D(f) \Rightarrow (-1, 2) \cup (2, +\infty)}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x perteneciente al dominio de la función que anulan su denominador:

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 2}.$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+L(x+1)}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1+2x\cdot L(x+1)+\frac{x^2-4}{x+1}}{2x(x+1)+x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)(x+1)+2x(x+1)\cdot L(x+1)+x^2-4}{(2x^2+2x+x^2-4)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+2x+x+1+(2x^2+2x)\cdot L(x+1)+x^2-4}{(3x^2+2x-4)(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3x-3+(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+3x^2+2x^2+2x-4x-4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3x-3+(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+5x^2-2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3x-3}{3x^3+5x^2-2x-4} + \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+5x^2-2x-4} =$$

$$= 0 + \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+2x)\cdot L(x+1)}{3x^3+5x^2-2x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{L(x+1)}{x}}{3+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}}. \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to\infty} \frac{L(x+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$, sustituyendo en (*):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{L(x+1)}{x}}{3+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}} = \frac{0\cdot 0}{3+0-0-0} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ horizontal: y = 0}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$b)$

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} + \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)-L(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2-4+2x^2}{(x^2-4)^2} + \frac{1-L(x+1)}{(x+1)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{0-4+0}{(0-4)^2} + \frac{1-L(0+1)}{(0+1)^2} = \frac{-4}{16} + \frac{1-0}{1} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{m = \frac{3}{4}}.$$

El punto de tangencia es:

$$f(0) = \frac{0}{0-4} + \frac{L(0+1)}{0+1} = 0 + \frac{0}{1} = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{O(0,0)}.$$

La ecuación de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$; aplicándola al punto y pendiente que nos ocupa:

$$y - 0 = \frac{3}{4} \cdot (x - 0);\;\; 4y = 3x \;\; \Rightarrow \;\; \underline{Recta\ tangente\colon t \equiv 3x - 4y = 0}.$$

$c)$

$$I = \int f(x)\, dx = \int \left[\frac{x}{x^2-4} + \frac{L(x+1)}{x+1}\right] \cdot dx = \int \frac{x}{x^2-4} dx + \int \frac{L(x+1)}{x+1} \cdot dx = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}.$$

$$A = \int \frac{x}{x^2-4} dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 - 4 = t \rightarrow 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot Lt =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2} \cdot L\left|x^2 - 4\right|}.$$

$$B = \int \frac{L(x+1)}{x+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} L(x+1) = t \\ \frac{1}{x+1} \cdot dx = dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2} \cdot L^2|x + 1|}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de A y B en la expresión de I:

$$I = A + B = \frac{1}{2} \cdot L|x^2 - 4| + \frac{1}{2} \cdot L^2|x + 1| + C.$$

$$\underline{\int f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[L|x^2 - 4| + L^2|x + 1|\right] + C.}$$

****

2º) $a)$ Discutir, según los valores de m, el sistema $\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$:

$b)$ Resolver el sistema para el caso de $m = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & m-1 \\ 1 & -2 & m \\ 5 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & m-1 & 0 \\ 1 & -2 & m & 1 \\ 5 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & m-1 \\ 1 & -2 & m \\ 5 & m & 1 \end{vmatrix} = -8 + m(m-1) + 15m + 10(m-1) - 4m^2 - 3 =$$

$$= -11 + m^2 - m + 15m + 10m - 10 - 4m^2 = -3m^2 + 24m - 21 = 0;$$

$$-3(m^2 - 8m + 7) = 0;\ m^2 - 8m + 7 = 0;\ \ m = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} =$$

$$= 4 \pm 3 \Rightarrow \boldsymbol{m_1 = 1, m_2 = 7}.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} m \neq 1 \\ m \neq 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 2}.$$

$$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ m = 7 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 15 - 28 - 3 = -24 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 3}.$$

$$\underline{Para\ m = 7 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Resolvemos el sistema para $m = 1$, que es compatible indeterminado.

El sistema resulta: $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ x-2y+z=1 \\ 5x+y+z=1 \end{cases}$. Despreciando la primera ecuación y haciendo $x=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} -2y+z=1-\lambda \\ y+z=1-5\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y-z=-1+\lambda \\ y+z=1-5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=-4\lambda;\ \ y=-\frac{4}{3}\lambda.$$

$z=1-5\lambda-y=1-5\lambda+\frac{4}{3}\lambda=1-\frac{11}{3}\lambda.$

$$\underline{Solución: x=\lambda, y=-\frac{4}{3}\lambda, z=1-\frac{11}{3}\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

o mejor,

$$\underline{Solución: x=3\lambda, y=-4\lambda, z=1-11\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

****

3º) a) Dados los vectores $\vec{u}=(2,3,4)$, $\vec{v}=(-1,-1,-1)$ y $\vec{w}=(-1,\lambda,-5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.

b) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z=0$, con dirección perpendicular a $\vec{a}=(2,-1,4)$ y que pasa por el punto $Q(1,1,0)$.

----

a)

El volumen de un paralelepípedo es, en valor absoluto, el producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$$V_P=\|\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}\,)\|=6\ \Rightarrow\ \left\|\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -5\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 5\end{matrix}\right\|=6;$$

$$|10-4\lambda+3-4+2\lambda-15|=6;\ \ |-6-2\lambda|=6;\ \ |-3-\lambda|=3\Rightarrow\begin{cases}-3-\lambda=3\\ 3+\lambda=3\end{cases}.$$

$$-3-3=\lambda\Rightarrow\underline{\lambda_1=-6};\ \ \underline{\lambda_2=0}.$$

b)

El plano $z=0$ tiene como vector normal a $\vec{n}=(0,0,1)$.

Si un vector es normal a un plano es perpendicular a todos los vectores directores de las infinitas rectas contenidas en ese plano, por lo cual, el vector $\vec{n}$ es perpendicular al vector director de la recta r pedida.

Como los vectores $\vec{a}=(2,-1,4)$ y $\vec{n}=(0,0,1)$ son perpendiculares a r, un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\overrightarrow{v_r'}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-i-2j\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}=(1,2,0).$$

La expresión de r dada, por ejemplo, en forma vectorial es la siguiente:

$$\underline{r\equiv(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(1,2,0)}.$$

****

4º) Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica que tiene por ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

La ecuación de una esfera de centro $O'(c_1, c_2, c_3)$ y radio r tiene por expresión:

$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + (z-c_3)^2 = r^2$, por lo que la esfera dada tiene su centro en el punto $O'(1, 1, 2)$ y su radio es 3.

El haz de planos β paralelos a π tiene por expresión $\beta \equiv x - 2y + 2z + D = 0$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\alpha \equiv Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0 = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Los planos pedidos, π_1 y π_2, paralelos a π y pertenecientes al haz β, distan tres unidades del centro de la esfera.

Aplicando la fórmula de la distancia del punto $O'(1, 1, 2)$ al haz β, sabiendo que es de 3 unidades:

$$d(O', \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3;\ \frac{|1 - 2 + 4 + D|}{\sqrt{1+4+4}} = 3;\ \frac{|3 + D|}{\sqrt{9}} = 3;\ |D + 3| = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} D + 3 = 9 \\ -D - 3 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{D_1 = 6, D_2 = -12}.$$

Los planos pedidos son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv x - 2y + 2z + 6 = 0, \pi_2 \equiv x - 2y + 2z - 12 = 0}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen O, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$, se pide:

a) Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) Determinar la distancia de P a r.

c) ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

----

a)

El punto medio Q' del segmento de extremos O y P es $Q'(-2, 3, 3)$.

Los puntos O y P determinan el vector $\overrightarrow{OP} = (-4, 6, 6)$.

Un punto genérico de la recta r es $R(-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda)$, que con el punto medio $Q'(-2, 3, 3)$ determinan el vector $\overrightarrow{Q'R} = (-2 + 4\lambda, 5 + 3\lambda, -3 - 2\lambda)$.

Para que la proyección de Q sea el punto Q' es necesario que los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{Q'R}$ sean perpendiculares, para lo cual, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{Q'R} = 0 \Rightarrow (-4, 6, 6) \cdot (-2 + 4\lambda, 5 + 3\lambda, -3 - 2\lambda) = 0;$$

$$8 - 16\lambda + 30 + 18\lambda - 18 - 12\lambda = 0;\ \ 20 - 10\lambda = 0;\ \ 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 2}.$$

$$\left.\begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \underline{Q(4, 14, -4)}.$$

b)

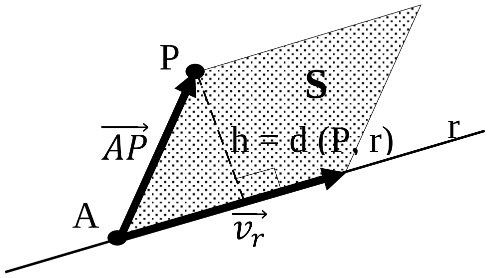
La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Un punto y un vector de r son $A(-4, 8, 0)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (4, 3, -2)$.

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(-4, 6, 6) - (-4, 8, 0)] = (0, -2, 6).$$

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.

$$\left.\begin{array}{r} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| \\ S = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \;\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\; h = d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{|\overrightarrow{v_r}|}.$$

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{|18i-8k-4i-24j|}{\sqrt{16+9+4}} = \frac{|14i-24j-8k|}{\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{2\cdot|7i-12j-4k|}{\sqrt{29}} = \frac{2\cdot\sqrt{7^2+(-12)^2+(-4)^2}}{\sqrt{29}} = \frac{2\cdot\sqrt{49+144+16}}{\sqrt{29}} = \underline{2 \cdot \sqrt{\frac{209}{29}}\; u = d(P,r).}$$

$c)$

Los puntos O, P y R están alineados cuando los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{PR}$ sean linealmente dependientes, es decir, que sus componentes sean proporcionales.

$$\overrightarrow{OP} = (-4, 6, 6).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda) - (-4, 6, 6)] = (4\lambda, 2 + 3\lambda, -6 - 2\lambda).$$

$$\frac{4\lambda}{-4} = \frac{2+3\lambda}{6} = \frac{-6-2\lambda}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4\lambda}{-4} = \frac{2+3\lambda}{6} \to -6\lambda = 2 + 3\lambda \to -9\lambda = 2 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} \\ \frac{4\lambda}{-4} = \frac{-6-2\lambda}{6} \to -6\lambda = -6 - 2\lambda \to 2\lambda = 3 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \end{cases}.$$

$$\underline{No\ existe\ ningún\ punto\ R \in r\ tal\ que\ O, P\ y\ R\ estén\ alineados.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{sen\,x}{x}, & si\ x < 0 \\ xe^x + 1, & si x \geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la continuidad de f.

b) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) Calcular $\int_1^3 f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función f(x) es continua $\forall$x $\in R$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad se estudia a continuación.

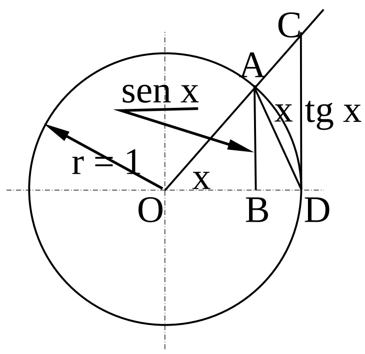
Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1 \qquad (*) \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(xe^x + 1) = 1 = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x)\ es\ continua\ en\ R}.$$

Aclaración del límite (*).

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} = \frac{sen\,0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{cos\,x}{1} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}.$$

Una forma geométrica de obtener este límite es la siguiente.



Considerando los triángulos OAD, OCD y el sector circular OADO, de la observación de la figura se deduce la desigualdad de sus superficies, tal que:

$S_{OAD} \leq S_{OADO} \leq S_{OCD}$, o de otra forma:

$$\frac{\overline{OD}\cdot\overline{BA}}{2} \leq \frac{x\cdot\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r} \leq \frac{\overline{OD}\cdot\overline{DC}}{2} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \frac{1\cdot\overline{BA}}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1\cdot\overline{DC}}{2};\ \frac{sen\,x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{tg\,x}{2}.$$

$sen\,x \leq x \leq tg\,x$. Dividiendo por sen x: $\frac{sen\,x}{sen\,x} \leq \frac{x}{sen\,x} \leq \frac{tg\,x}{sen\,x};\ 1 \leq \frac{x}{sen\,x} \leq \cos x$.

Sabiendo que si se invierte el valor de los elementos de una desigualdad se obtiene otra desigualdad de sentido contrario: $1 \geq \frac{sen\,x}{x} \geq \frac{1}{\cos x}$.

Tomando límites cuando $x \to 0$: $\lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos\,x};\ 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} \leq 1$.

Lo anterior demuestra que $\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1}$.

$b)$

La función $f(x)=\begin{cases} \frac{sen\,x}{x}, & si\ x<0 \\ xe^x+1, & six\geq 0 \end{cases}$, es derivable para cualquier valor real de x, excepto para el valor críticos $x=0$, cuya derivabilidad vamos a estudiar.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{\cos x\cdot x-sen\,x\cdot 1}{x^2}, & si\ x<0 \\ 1\cdot e^x+x\cdot e^x, & si\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \qquad f'(x)=\begin{cases} \frac{x\cdot\cos x-sen\,x}{x^2}, & si\ x<0 \\ e^x(x+1), & si\ x>0 \end{cases}.$$

$$f'(0^-)\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-sen\,x}{x^2}=\frac{0\cdot 1-0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1\cdot\cos x-x\cdot sen\,x-cos\,x}{2x}=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot sen\,x}{x}=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0} sen\,x=-\frac{1}{2}\cdot 0=\mathbf{0}.$$

$$f'(0^+)\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}[e^x(x+1)]=e^0(0+1)=1\cdot 1=\mathbf{1}.$$

$$\underline{f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x=0}.$$

$$\underline{f(x)\ es\ derivable\ en\ R-\{0\}}.$$

$$\underline{f'(x)=\begin{cases} \frac{x\cdot\cos x-sen\,x}{x^2}, & si\ x<0 \\ e^x(x+1), & si\ x>0 \end{cases}}.$$

$c)$

$$\int_1^3 f(x)\cdot dx=\int_1^3(xe^x+1)\cdot dx=\int_1^3 x\cdot e^x\cdot dx+\int_1^3 dx=A+B.$$

$$A=\int_1^3 x\cdot e^x\cdot dx\Rightarrow\begin{Bmatrix} u=x\to du=dx \\ e^x\cdot dx=dv\to v=e^x\end{Bmatrix}\Rightarrow\left[x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx\right]_1^3=$$

$$=[x\cdot e^x-e^x]_1^3=[e^x(x-1)]_1^3=[e^3(3-1)]-[e^1(1-1)]=\boldsymbol{2e^3}.$$

$$B=\int_1^3 dx=[x]_1^3=3-1=\mathbf{2}.$$

Sustituyendo en la integral los valores de A y B obtenidos:

$$\underline{\int_1^3 f(x)\cdot dx=2e^3+2=2(e^3+1)}.$$

****

3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular A^{15} y A^{20}.

b) Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A.$

En general: $A^n = I$ si n es par y $A^n = A$ si n es impar.

$$\underline{A^{15} = I;\ A^{20} = A}.$$

b)

$6X = B - 3AX;\ \ 6X + 3AX = B;\ \ (6I + 3A) \cdot X = B.$

Haciendo $6I + 3A = M$:

$M \cdot X = B;\ \ M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = M^{-1} \cdot B \ \Rightarrow\ \underline{X = M^{-1} \cdot B}.$

$$M = 6I + 3A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa por la adjunta de la matriz traspuesta:

$$|M| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 324 - 81 = \mathbf{243}. \qquad M^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = M.$$

$$Adj.\,de\ M^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|M|} = \frac{1}{243} \cdot \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la expresión de X:

$$X = M^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

****

4º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$ $e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el rango de A en función de t.

b) Calcular t para que $det(A - tI) = 0$.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 12 - 9t + 2 = t^2 - 9t + 14 = 0;$$

$t = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 7.$

$$\underline{Rang\ A = 3, \forall t \in R - \{2, 7\}.}$$

$$Para\ t = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A = 2}.$$

$$Para\ t = 7 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A = 2}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} t = 2 \\ t = 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

b) Calcular t para que $det(A - tI) = 0$.

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ 12 + 2(1-t) = 0;\ \ 12 + 2 - 2t = 0;$$

$14 - 2t = 0;\ \ 7 - t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{t = 7}.$

$$\underline{det(A - tI) = 0\ para\ t = 7.}$$

****