PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = (6 - x) \cdot e^{x/3}$, se pide:

a) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) Determinar el área de un triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.

----

a)

La función $f(x)$ está definida para cualquier valor real de x: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen infinito el valor de la función: $\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}$.

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[(6 - x) \cdot e^{x/3}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{6-x}{e^{-\frac{x}{3}}} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}}} = \frac{3}{e^{+\infty}} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(6 - x) \cdot e^{x/3}\right] = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty.$$

$$\underline{La\ recta\ x = 0\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ la\ parte\ negativa\ del\ eje\ X.}$$

Cortes con el eje X:

$f(x) = 0 \Rightarrow (6 - x) \cdot e^{x/3} = 0 \Rightarrow x = 6 \ \Rightarrow \ \underline{A(6, 0)}.$

Cortes con el eje Y:

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (6 - 0) \cdot e^{0/3} = 6 \cdot e^0 = 6 \cdot 1 = 6 \Rightarrow \ \underline{B(0, 6)}.$

$b)$

$f'(x) = -1 \cdot e^{x/3} + (6 - x) \cdot \frac{1}{3} e^{x/3} = \frac{1}{3} e^{x/3}(-3 + 6 - x) = \frac{1}{3} e^{x/3}(3 - x).$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{x/3} \cdot (3 - x).}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente:

$f'(x) = \frac{1}{3} e^{x/3}(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 3.$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3).}$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty).}$$

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) que se anule su primera derivada:

$f'(x) = \frac{1}{3} e^{x/3}(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 3.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} e^{x/3}(3 - x) + e^{x/3}(-1)\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{x/3}(3 - x - 3) = -\frac{1}{9} x e^{x/3}.$

$f''(3) = -\frac{1}{9} \cdot 3 \cdot e^1 = -\frac{e}{3} < 0 \ \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 3.$

$f(3) = (6 - 3) \cdot e^{3/3} = 3e \Rightarrow Máximo\ relativo: \underline{C(3, 3e)}.$

$b)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$m = f'(0) = \frac{1}{3} e^{0/3}(3-0) = e^0 = 1.$$

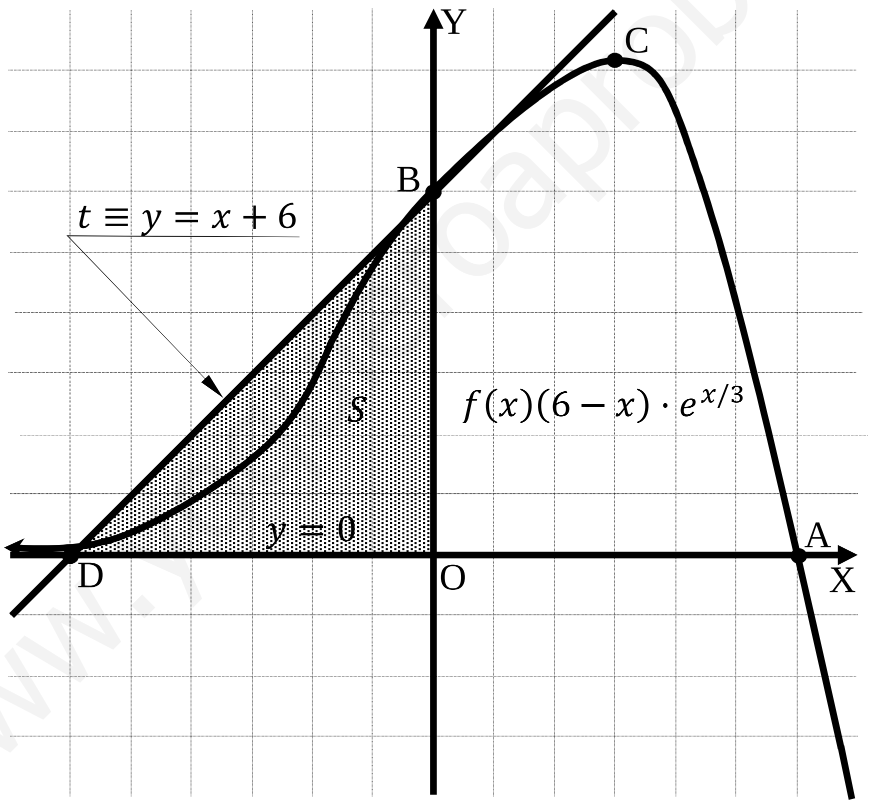
El punto de tangencia es: $f(0) = (6-0) \cdot e^{0/3} = 6 \cdot 1 = 6 \Rightarrow B(0, 6)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 6 = 1 \cdot (x - 0) = x; \;\; x - y = -6 \Rightarrow t \equiv \frac{x}{-6} + \frac{y}{6} = 1.$$

Los puntos de corte con los ejes de la tangente son $D(-6, 0)$ y $B(0, 6)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la siguiente:



El área del triángulo es: $S = \frac{6 \cdot 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$.

$$\underline{S = 18 \, u^2}.$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \{(2+\lambda, 1-3\lambda, \lambda);\ \lambda \in R\}$, se pide:

$a)$ Obtener la recta t que pasa por el punto $P(1,0,5)$ y corta perpendicularmente a r.

$b)$ Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

$c)$ Hallar la distancie entre las rectas r y s.

$a)$

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2j + k + 2i - j = 2i - 3j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2,-3,1).$$

El haz de planos β perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano α que contiene al punto $P(1,0,5)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0 \\ P(1,0,5) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 5 + D = 0;\ \ 2 + 5 + D = 0;$$

$7 + D = 0 \to D = -7 \ \Rightarrow\ \alpha \equiv 2x - 3y + z - 7 = 0.$

El punto Q, intersección de π con r es:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x - 3y + z - 7 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 7 \\ x - 2z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right\}.$$ Resolviendo por Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1+24+14+3}{1+6+4+3} = \dfrac{42}{14} = 3 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{14} = \dfrac{2+4-14-1+16-7}{14} = \dfrac{22-22}{14} = 0 \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \dfrac{7-3-2+12}{14} = \dfrac{14}{14} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(3,0,1).$$

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = [(1,0,5) - (3,0,1)] = (-2,0,4).$

Un vector director de t es cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{QP}$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_t} = (1,0,-2)$.

La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}}$.

$b)$

El plano π pedido, por contener a r, contiene al punto $Q(3,0\ 1) \in r$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{v_r} = (2,-3,1)$ y, por ser paralelo a s tiene como vector director al vector $\overrightarrow{v_s} = (1,-3,1)$.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi(Q;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-3) + y - 6(z-1) + 3(z-1) + 3(x-3) - 2y = 0;\ \ -y - 3(z-1) = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv y + 3z - 3 = 0}.$$

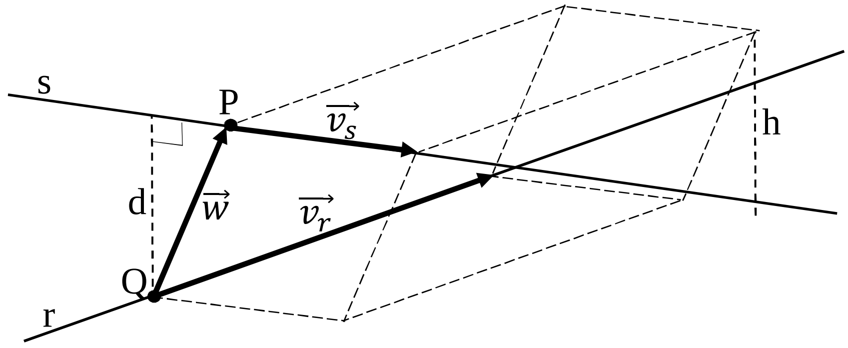
$c)$

Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; por otra parte r y s no tienen puntos en común, por lo cual se cruzan.

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\vec{w}$ que tiene como origen al punto Q de r y extremo el punto $P(2,1,0)$ de s.

$\vec{w} = \overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(3,0,1) - (2,1,0)] = (1,-1,1).$

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}.$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix}\right|} = \frac{|-6-1-3+3+2+3|}{|-3i+j-6k+3k+3i-2j|} = \frac{|8-10|}{|-j-3k|} =$$

$$= \frac{|-2|}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+9}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\underline{d(r,s) = \frac{\sqrt{10}}{5} u.}$$

****

3º) a) Determine, si es posible, los parámetros $\alpha\ y\ \beta$ de modo que se verifique la igualdad: $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

b) Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde $A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3\alpha + \beta = 3 \\ -4\alpha = -8 \\ 5\alpha + 4\beta = -2 \\ -\alpha + \beta = -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha = 2, \beta = -3}.$$

b)

$$A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Para que $Rang\ A = 2$ tiene que ser $|A| \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ (2\lambda + 1)(3\lambda + 1) - 2\lambda^2 = 0;$$

$6\lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda + 1 - 2\lambda^2 = 0;\ \ 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0;\ \ \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{8} =$

$= \frac{-5 \pm 3}{8} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{4}$.

$$\underline{Rang\ A = 2, \forall \lambda \in R - \left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}}.$$

****

4º) Cierta fundación ha destinado 247.000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3.000 euros, si el estudiante cursa grado universitario; de 2.000 euros, si cursa la fundación profesional y de 1.500 euros, si realiza estudios de posgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de posgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios.

Sean x, y, z el número de becas concedidas a estudiantes de grado universitario, formación profesional y postgrado, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} 3.000x+2.000y+1.500z=247.000 \\ x+y+z=115 \\ y=2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6x+4y+3z=494 \\ x+y+z=115 \\ y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 494 & 4 & 3 \\ 115 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-988+345-494+920}{-12+3-6+8}=\frac{1.265-1.482}{11-18}=\frac{-217}{-7}=31.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 494 & 3 \\ 1 & 115 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{-2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 494 \\ 1 & 115 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{-2\cdot(690-494)}{-7}=\frac{-2\cdot 196}{-7}=2\cdot 28=56.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 494 \\ 1 & 1 & 115 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{-\begin{vmatrix} 6 & 494 \\ 1 & 115 \end{vmatrix}}{-7}=\frac{690-494}{7}=\frac{196}{7}=28.$$

$\underline{Se\ concedieron\ 31, 56\ y\ 28\ becas\ de\ grado, f.profesional\ y\ posgrado, respec.}$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x+(a-1)y-2z=a \\ 2x+y-az=2 \\ -x+y+z=1-a \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) Resolverlo cuando sea posible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\ 2-4+a(a-1)-2+2a-2(a-1)=0;$$

$$-4+a^2-a+2a-2a+2=0;\ \ a^2-a-2=0;\ \ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=-1, a_2=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4-2+4-1-4+8=16-7\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-1\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{F_1=F_2\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=2\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Resolvemos en primer lugar para $a\neq -1$ y $a\neq 2$ aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}=\frac{a-4+a(a-1)^2+2(1-a)+a^2-2(a-1)}{(a+1)(a-2)}=$$

$$=\frac{a-4+a(a^2-2a+1)+4(1-a)+a^2}{(a+1)(a-2)}=\frac{a-4+a^3-2a^2+a+4-4a+a^2}{(a+1)(a-2)}=\frac{a^3-a^2-2a}{(a+1)(a-2)}=\frac{a(a^2-a-2)}{(a+1)(a-2)}=$$

$$=\frac{a(a^2-a-2)}{(a+1)(a-2)}=\frac{a(a-2)(a+1)}{(a+1)(a-2)}=a.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}=\frac{4+a^2-4(1-a)-4-2a+2a(1-a)}{(a+1)(a-2)}=\frac{a^2-4+4a-2a+2a-2a^2}{(a+1)(a-2)}=$$

$$=\frac{-a^2+4a-4}{(a+1)(a-2)}=\frac{-(a-2)^2}{(a+1)(a-2)}=\frac{-(a-2)}{a+1}=\frac{2-a}{a+1}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}=\frac{2(1-a)+2a-2(a-1)+a-4-2(a-1)(1-a)}{(a+1)(a-2)}=$$

$$=\frac{-4(a-1)+3a-4+2(a-1)^2}{(a+1)(a-2)}=\frac{-4a+4+3a-4+2(a^2-2a+1)}{(a+1)(a-2)}=\frac{-a+2a^2-4a+2}{(a+1)(a-2)}=\frac{2a^2-5a+2}{(a+1)(a-2)}=$$

$$=\frac{(a-2)(2a-1)}{(a+1)(a-2)}=\frac{2a-1}{a+1}.$$

$$\underline{\mathit{Solución}:\ x=a, y=\frac{2-a}{a+1}, z=\frac{2a-1}{a+1}}.$$

Resolvemos ahora para $a=2$. El sistema resulta: $\begin{cases} 2x+y-2z=2 \\ 2x+y-2z=2 \\ -x+y+z=-1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} 2x+y-2z=2 \\ -x+y+z=-1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y=2+2\lambda \\ -x+y=-1-\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x+y=2+2\lambda \\ x-y=1+\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x=3+3\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1+\lambda;\ \ y=x-1-\lambda=1+\lambda-1-\lambda=0.$

$$\underline{\mathit{Solución}:\ x=1+\lambda,\ y=0, z=\lambda,\ \forall\lambda\in R}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & si \;\; x \leq 0 \\ \frac{1}{5+x} & si \;\; x > 0 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) Calcular $I = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función f(x) es continua $\forall$x $\in R$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} = f(0) \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

$$\underline{f(x) \; es \; continua \; en \; R}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$x < 0 \Rightarrow y = k = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$x > 0 \Rightarrow y = k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La \; recta \; y = 0 \; (eje \; X) \; es \; asintota \; horizontal \; en -\infty \; y \; en +\infty}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No \; tiene \; asíntotas \; verticales}.$$

(Los valores que anulan el denominador no pertenecen a la parte de la función)

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se ha estudiado su continuidad.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para los valores $x = 0$ cuya derivabilidad se va a estudiar a continuación.

Un función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(0^-) \Rightarrow \frac{0 \cdot (5-x) - 1 \cdot (-1)}{(5-x)^2} = \frac{1}{(5-x)^2} \Rightarrow f'(0^-) = \frac{1}{(5-0)^2} = \frac{1}{25}.$$

$$f'(0^+) \Rightarrow \frac{0 \cdot (5+x) - 1 \cdot 1}{(5+x)^2} = \frac{-1}{(5+x)^2} \Rightarrow f'(0^+) = \frac{-1}{(5+0)^2} = \frac{-1}{25}.$$

$$\underline{f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = 0}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R - \{0\}}.$$

La función derivada de $f(x)$ es la siguiente:

$$\underline{f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(5-x)^2} & si\ \ x \leq 0 \\ \frac{-1}{(5+x)^2} & si\ \ x > 0 \end{cases}}.$$

$c)$

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x} \cdot dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x} \cdot dx =$$

$$= [-L|5-x|]_{-1}^{0} + [L|5+x|]_{0}^{1} = (-L5) - (-L6) + L6 - L5 = 2L6 - 2L5 =$$

$$= L\frac{36}{25} = L1{,}44 \cong 0{,}36.$$

$$\underline{I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = L1{,}44 \cong 0{,}36.}$$

****

3º) Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(-1,-2,-1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,0,1) - (0,2,1)] = (1,-2,0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-1,-2,-1) - (0,2,1)] = (-1,-4,-2).$$

$$\pi(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$4x - 4(z-1) - 2(z-1) + 2(y-2) = 0;\ \ 4x - 6(z-1) + 2(y-2) = 0;$$

$$2x + (y-2) - 3(z-1) = 0\ \Rightarrow\ \pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0.$$

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0$ con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ Eje\ X \rightarrow \{y = 0, z = 0\} \end{array}\right\} \rightarrow 2x + 1 = 0;\ x = -\frac{1}{2}\ \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ Eje\ Y \rightarrow \{x = 0, z = 0\} \end{array}\right\} \rightarrow y + 1 = 0;\ y = -1\ \Rightarrow B(0,-1,0).$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ Eje\ Z \rightarrow \{x = 0, y = 0\} \end{array}\right\} \rightarrow -3z + 1 = 0;\ z = \frac{1}{3}\ \Rightarrow C\left(0, 0, \frac{1}{3}\right).$$

Los puntos A, B y C con el origen forman los vectores que determinan el tetraedro.

$$\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{1}{2},\ 0, 0\right).\ \ \overrightarrow{OB} = (0,-1,0).\ \ \overrightarrow{OC} = \left(0,\ 0, \frac{1}{3}\right).$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que los determinan:

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{36}\ u^3}.$$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano β perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) Determinar el punto P del plano π más cercano al origen de coordenadas.

----

a)

Un vector director del plano β pedido es el vector normal de π: $\vec{n} = (3, 3, 1)$.

El plano β, por contener al eje OX contiene al punto $O(0, 0, 0)$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

La expresión general del plano β es la siguiente:

$$\beta(O;\ \vec{n}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ y - 3z = 0.$$

$$\underline{\beta \equiv y - 3z = 0}.$$

b)

La recta r que pasa por el origen y es perpendicular al plano π tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto P pedido es la intersección del plano π con la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 3\lambda + 3 \cdot \lambda + \lambda - 9 = 0;\ \ 9\lambda + 9\lambda + \lambda = 9;$$

$19\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{19}$.

$$\underline{P\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)}.$$

****